

Тема 4. Модель расчета оптимального объема и периодичности заказа (модель EOQ, Уилсона – Харриса) и ее модификации.

Управление запасами должно давать ответ на два основных вопроса: когда размещать заказ на пополнение запаса и как много ресурса (товара, продукта, предметов производства) заказывать?

Рассмотрим основные положения управления запасами на идеальной модели которая строится исходя из следующих предположений:

- 1) интенсивность (скорость) потребления ресурса (товара, продукта, предметов производства) из запаса известна и постоянна;
- 2) потребление осуществляется мелкими партиями или поштучно, а пополнение (возобновление) запаса – крупной партией;
- 3) пополнение запаса происходит мгновенно при снижении его уровня до нуля.

Пусть $n_{пост}$ – партия поставки; $R_{пост}$ – ритм поставки, тогда интенсивность потребления может быть рассчитана как: $I = n_{пост}/R_{пост}$. На идеальной модели аналитически решается лишь один вопрос из двух, поставленных ранее, а именно: определяется величина оптимальной партии поставки ресурса. Графическое представление идеальной модели показано на рисунке 1. В данной модели сделано одно важное допущение: ступенчатая линия потребления ресурса аппроксимирована прямой (поскольку партия поставки существенно больше партии потребления). Тогда, тангенс угла наклона (α) этой прямой к временной оси будет равен интенсивности потребления ресурса (т.е. $\tan \alpha = I$).

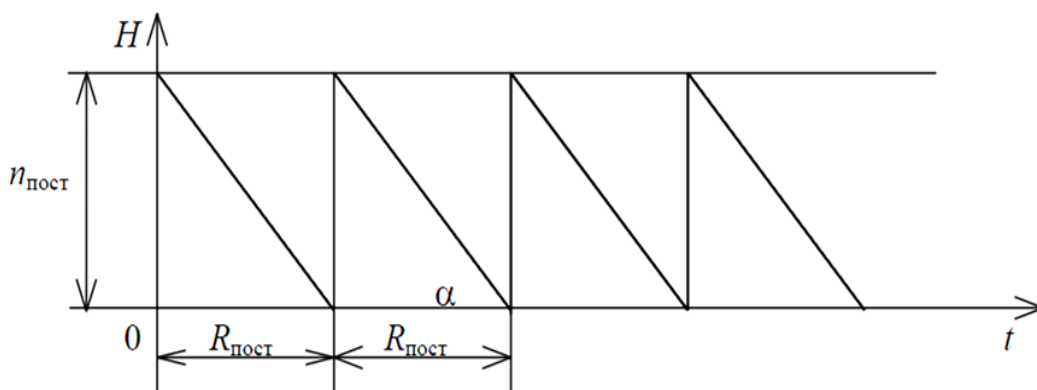


Рисунок 1 – Идеальная модель управления запасом.

На идеальной модели аналитически определяется величина оптимальной партии поставки ресурса. При этом исходят из минимизации суммарных затрат на пополнение и хранение ресурса (см. рис. 2):

$$C_{\Sigma} = \frac{DC_0}{n_{ном}} + \frac{n_{ном}C_h}{2} \quad (1)$$

где D – годовой объем потребления ресурса;

C_0 – затраты, обусловленные поставкой очередной партии;

C_h – затраты на хранение единицы запаса в течение года;

Тогда:

$D/n_{ном}$ – количество партий, получаемых за год;

$(DC_0)/n_{ном}$ – затраты на поставку ресурса за год;

$n_{ном}/2$ – средний объем хранения;

$(n_{ном} C_h)/2$ – средние затраты на хранение запаса за год.

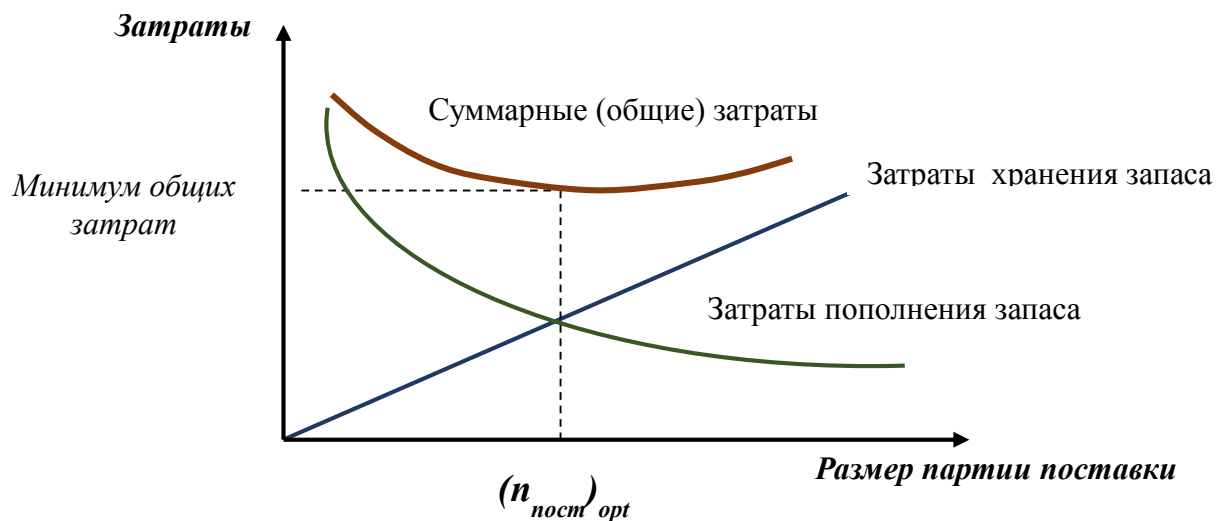


Рисунок 2 – Зависимость затрат от размера партии поставки.

Взяв первую производную от функции суммарных затрат (1) и приравняв ее к нулю, получим размер оптимальной партии поставки:

$$(n_{ном})_{opt} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \quad (2)$$

Либо:

$$(n_{nocm})_{opt} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_n f}}, \quad (3)$$

где f – доля закупочной цены единицы запаса, приходящаяся на затраты по хранению (содержанию) запаса, %;

C_n – закупочная цена единицы запаса.

Нахождение оптимальной партии поставки автоматически ведет к определению количество поставок и оптимального ритма поставки (продолжительности цикла поставки (времени между поставками)):

$$N = D / n_{nocm}, \quad (4)$$

где N – количество поставок (количество партий, получаемых за год).

$$R_{nocm} = n_{nocm} / I = T / N, \quad (5)$$

где T – количество рабочих дней в году.

В свою очередь минимальные общие затраты могут быть рассчитаны на основе использования формулы (1), либо:

$$C_{\Sigma} = \sqrt{2DC_0C_n f} \quad (6)$$

Использование формул (2), (3) дает устойчивое решение, поскольку допустимы значительные отклонения размера партии от найденного оптимума без существенного роста суммарных затрат (см. рис.2), что используется для корректировки $(n_{nocm})_{opt}$ в целях учета ряда факторов, не вошедших в данную модель. Данная модель получила название – модель EOQ (Economic Order Quantity, или модель Уилсона – Харриса).

Классические формулы (2), (3) расчета оптимального размера заказа имеют множество различных модификаций, позволяющих учесть разнообразные варианты работы с запасом в условиях современного бизнеса. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

Будем считать, что исполнение заказа на поставку очередной партии происходит не мгновенно, а за конечное время $T_{nocm} > 0$. Это время требуется для оформления документации, на изготовление или закупку партии, ее доставку на склад, входной контроль и т.п. Будем считать, что оно практически не зависит от размера партии поставки.

Простейшей моделью, соответствующей этому условию, является так называемая **модель производственного запаса** (отличается от ЕОQ тем, что пополнение запаса происходит не скачком, а постепенно, по мере изготовления партии поставки) см. рис. 3. Пунктирная прямая показывает, как нарастал бы запас, если бы одновременно с пополнением он не потреблялся. Тангенс угла наклона (β) этой прямой к оси времени равен интенсивности производства ресурса и пополнения запаса, т.е. $\tan \beta = P$.

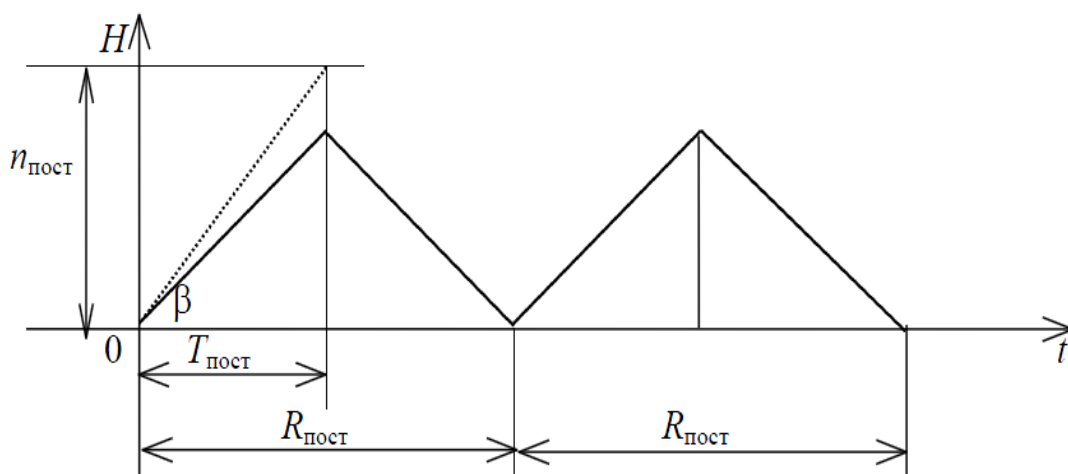


Рисунок 3 – Модель производственного запаса.

Пусть $T_{пост}$ – срок изготовления и поставки очередной партии, P – интенсивность изготовления (пополнения запаса), тогда:

$$P = n_{пост} / T_{пост} \quad (7)$$

Таким образом:

$$n_{пост} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h(1 - \frac{I}{P})}} \quad (8)$$

$$C_{\Sigma} = \frac{DC_0}{n_{пост}} + \frac{n_{пост}C_h(P - I)}{2P} \quad (9)$$

Данная модель называется моделью производственного запаса, поскольку она как правило встречается в условиях производства, где запас изделий создается между двумя смежными рабочими местами, участками и т.д. При этом

затраты, обусловленные поставкой очередной партии, в данном случае, трактуются как затраты на переналадку производящего подразделения, а интенсивность P – как его производительность.

На практике часто используется еще один тип моделей, получаемый расширением модели EOQ. Суть модели – **в учете скидки (дисконта) с цены закупаемого ресурса** при увеличении объема партии.

Среди различного вида скидок в управлении запасами наиболее часто используются оптовые скидки. Применение оптовых скидок означает, что цена единицы продукции зависит от объема закупаемой партии, при этом соблюдается правило, чем больше объем партии поставки, тем меньше цена единицы продукции. Следует отметить, что иногда могут предоставляться дифференциальные скидки, при использовании которых скидки для каждой партии товара учитываются отдельно в каждом ценовом диапазоне.

При расчетах параметров модели EOQ с учетом оптовых скидок возможны различные ситуации. Наиболее часто встречается первая ситуация, когда затраты на содержание (хранение) запаса не зависят от цены приобретения.

Вторая ситуация, когда вместе с изменением цены приобретения продукции пропорционально изменяются и затраты на содержание (хранение) запаса.

Третья ситуация при которой между изменениями цены приобретения продукции и затратами на хранение не наблюдается однозначной зависимости.

Рассмотрим последовательность расчета параметров модели EOQ для первой ситуации.

Снижение цены на продукцию предприятия-поставщика (учет оптовых скидок) может быть представлено в виде дискретной зависимости (см. рис. 4).

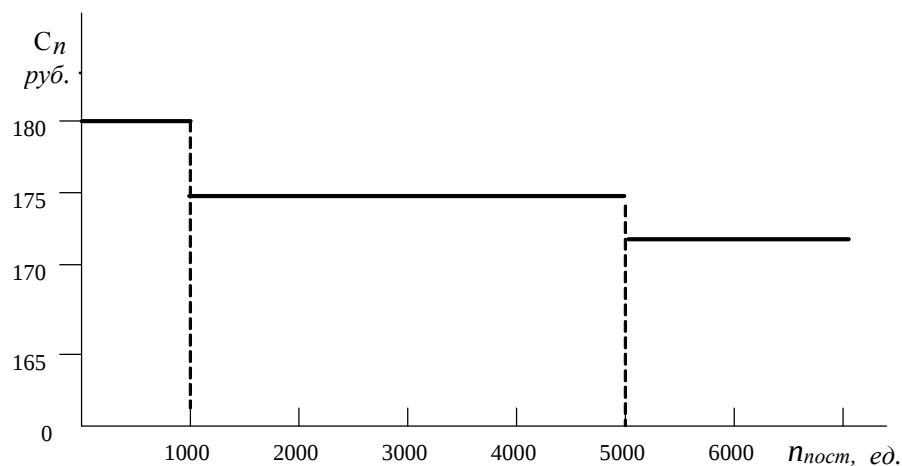


Рисунок 4. – Зависимость оптовой цены продукции от объема заказа.

На данном рисунке показана ситуация, когда при величине заказа $n_{ном} \leq 1000$ ед. продукции цена единицы товара $C_{n1} = 180$ руб.; при величине заказа от 1000 до 5000 ед. цена единицы товара $C_{n2} = 175$ руб.; и, наконец, при величине заказа больше 5000 ед. цена единицы товара $C_{n3} = 172$ руб. Допустим, что затраты на заказ у предприятия-потребителя данной продукции составляют 400 руб., а текущие затраты на хранение единицы данной продукции – 20 руб./ед. год, величина годовой потребности в продукции данного наименования – 10000 ед. Необходимо найти размер оптимальной партии закупки данной продукции с учетом предлагаемых скидок.

Использование формулы (2) позволяет найти размер оптимальной партии поставки:

$$(n_{ном})_{opt} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 400}{20}} = 632 \text{ ед.}$$

Что позволяет сделать вывод о том, что оптимальная партия попадает в первый ценовой интервал. Это значит, что меньшие суммарные затраты могут быть только на границах – в начале второго или третьего ценовых интервалов. Проверим эти точки: рассчитав в них суммарные затраты на закупку, пополнение и содержание (хранение) запаса (см. формулу 4 темы 3).

При закупке продукции оптимальными партиями по 632 ед., суммарные затраты составят:

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 180 + \frac{10000 \times 400}{632} + \frac{632 \times 20}{2} = 1812649 \text{ руб.}$$

При закупке партиями по 1000 ед. (нижняя граница второго интервала):

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 175 + \frac{10000 \times 400}{1000} + \frac{1000 \times 20}{2} = 1764000 \text{ руб.}$$

При закупке партиями по 5000 ед. (нижняя граница третьего интервала):

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 172 + \frac{10000 \times 400}{5000} + \frac{5000 \times 20}{2} = 1770800 \text{ руб.}$$

Следовательно, при закупках продукции оптимальными партиями, рассчитанными на основе использования формулы (2), суммарные затраты окажутся выше, чем при закупках партиями большего размера (ввиду того, что скидки оказывают существенное влияние на данную величину). Проведенный расчет показывает, что из двух граничных точек необходимо выбрать минимальный размер партии равный 1000 ед. (т.е. второй ценовой интервал).

Модель планирования дефицита. В некоторых случаях затраты хранения являются очень высокими. Поэтому имеет смысл допустить регулярные интервалы времени когда товар на складе отсутствует. В этом случае возможны два подхода:

- 1) полученная новая продукция не идет на выполнение заявок на товар во время его отсутствия;
- 2) часть полученной новой продукции идет на погашение всех заявок, оставленных во время отсутствия запасов.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

Случай невыполнения заявок (см. рис. 5). На графике периоды дефицита условно изображены ниже оси времени, а величина S – максимальный размер дефицита (максимально возможное число единиц товара (продукта и т.д.), которое могло быть реализовано за время его отсутствия в каждом цикле).

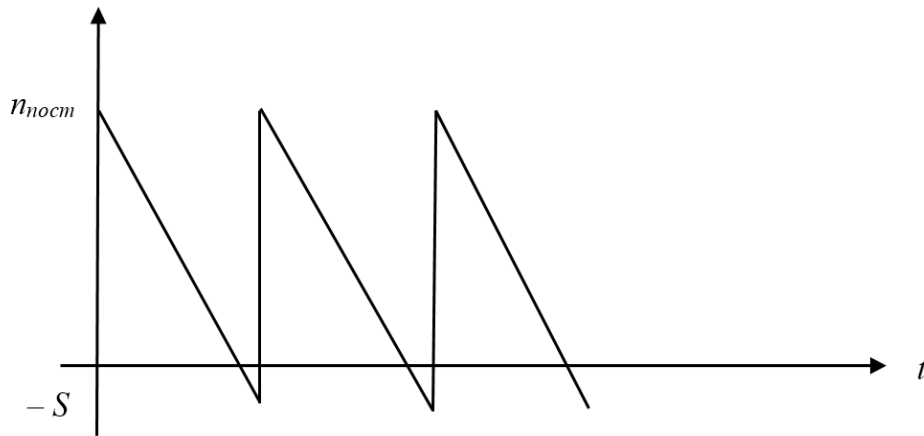


Рисунок 5 – Модель планирования дефицита. Случай невыполнения заявок.

Формула для расчета размера оптимальной партии поставки:

$$n_{ном} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}}, \quad (10)$$

где C_b – годовая стоимость отсутствия единицы продукции в запасе (потеря доверия клиентов, нереализованная продукция и т.д.).

Максимальный размер дефицита может быть определен как:

$$S = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} \quad (11)$$

В свою очередь:

$$C_{\Sigma} = \frac{DC_0}{n_{ном} + S} + \frac{n_{ном}^2 C_h}{2(n_{ном} + S)} + \frac{S^2 C_b}{2(n_{ном} + S)} \quad (12)$$

Случай выполнения заявок.

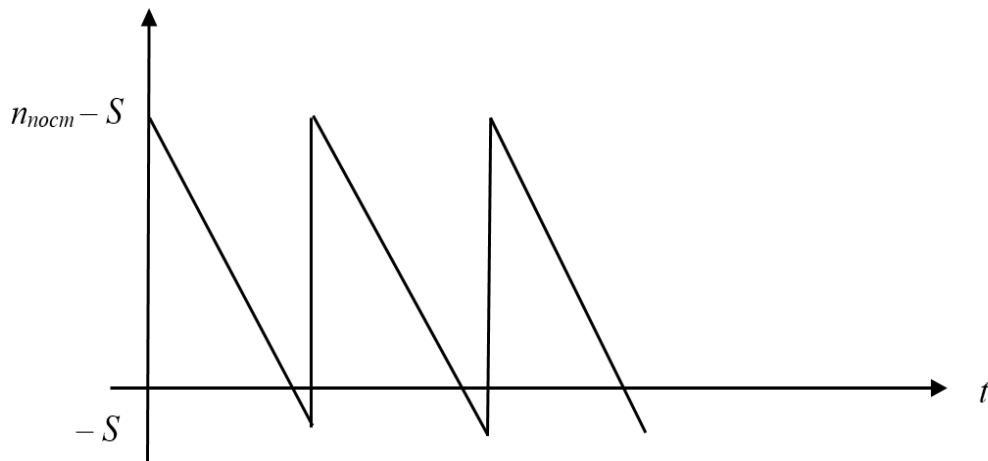


Рисунок 6 – Модель планирования дефицита. Случай выполнения заявок.

В данном варианте (см рис.6) максимальный уровень запасов будет равен величине $n_{ном} - S$. А решение задачи сводится к следующим формульным выражениям:

$$n_{ном} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_h + C_b}{C_b}} \quad (13)$$

$$S = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} \quad (14)$$

$$C_{\Sigma} = \frac{DC_0}{n_{ном}} + \frac{(n_{ном} - S)^2 C_h}{2n_{ном}} + \frac{S^2 C_b}{2n_{ном}} \quad (15)$$

Модель с учетом затрат на содержание запаса на единицу площади склада. Практика аренды складских помещений, а также расчеты затрат на хранение на складах ряда фирм, говорят о том, что как правило учитывается не средний размер партии, а площадь (или объем) склада, которая требуется для всей поступившей партии. Таким образом затраты на хранение могут быть выражены:

$$C_x = \alpha k \theta n_{ном}, \quad (16)$$

где α – затраты на хранение продукции в единицу времени с учетом занимаемой площади (объема) склада, руб./м²·ед. времени (руб./м³·ед. времени);

k – коэффициент, учитывающий пространственные габариты единицы продукции, м²/шт. (м³/шт.);

θ – коэффициент, учитывающий неодновременность поступления различных видов продукции на склад, $0 < \theta \leq 1$ (примем $\theta=1$).

Коэффициент θ отражает преимущества современных технологий грузопереработки продукции на складах: по мере освобождения стеллажей (ячеек, площадей) на них размещаются вновь поступающие партии продукции, не дожидаясь момента окончания расхода предыдущей партии. В результате повышается наполняемость склада, что приводит к снижению затрат на хранение продукции.

С учетом выражения (16) формула Уилсона – Харриса (5.6) может быть преобразована следующим образом:

$$n_{ном} = \sqrt{\frac{DC_0}{\alpha k}} \quad (17)$$

В свою очередь, величина минимальных общих затрат:

$$C_{\Sigma} = 2\sqrt{DC_0 \alpha k} \quad (18)$$