Министерство образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Я.ДОЛГИХ, Э.Б.ШВАРЦ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Часть II

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов I курса общетехнических специальностей

НОВОСИБИРСК
2004

Рецензенты: *А.Г.Пинус*, доктор физ.-мат. наук, профессор
К.Н.Пономарев, доктор физ.-мат. наук, профессор

Работа выполнена на кафедре инженерной математики

Долгих В.Я., Шварц Э.Б.

Высшая математика для заочников. Часть II: Учеб. пособие для студентов общетехнических специальностей. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 251 с.

Часть II учебного пособия по высшей математике для заочников включает в себя материал по высшей математике, обязательный для изучения студентами во втором семестре. В нее включены также вопросы для самопроверки и варианты контрольных заданий №3, 4.

Учебное пособие написано в соответствии с рабочими программами по математическому анализу для студентов общетехнических и экономических специальностей и предназначено для студентов – заочников упомянутых специальностей. Оно может быть рекомендовано студентам общетехнических и экономических специальностей дневной формы обучения.

Ил. 33, список лит. 10 назв.

ГЛАВА 7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задачей дифференциального исчисления функций одной переменной является на первом этапе отыскание по заданной функции ее производной или дифференциала.

Поставим обратную задачу: по заданной производной или дифференциалу функции найти саму функцию.

Вопросы, связанные с решением этой задачи, рассматриваются в данной главе.

§7.1. Первообразная. Два вида задач, приводящих к понятию интеграла

О п р е д е л е н и е**.** *Пусть в каждой точке некоторого промежутка для некоторых функций $F(x)$ и $f(x)$ выполняется условие*

$$F'(x) = f(x) \tag{7.1}$$

или, что то же самое,

$$dF(x) = f(x)\, dx. \tag{7.2}$$

Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (или для дифференциала $f(x)\,dx$).

Пример 1. Функция $F(x) = x^3$ является *первообразной* для функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси Ox, так как при любом x, очевидно, $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$. #

Пример 2. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная для дифференциала $dx/(2\sqrt{x})$ для всякого $x \in (0, +\infty)$, ибо

$$dF(x) = d(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})'dx = dx/(2\sqrt{x}). \#$$

Обратимся к задаче в общей постановке.

Пусть $F(x)$ – закон изменения переменной естественно-физической или геометрической величины y, зависящей от переменной x, т.е. $y = F(x)$ при этом x принимает значения из некоторого множества X. Тогда, как известно, производная $F'(x)$ –

скорость изменения y, т.е. $y' = F'(x)$ (или $dy = F'(x)\,dx$).

Представим себе теперь, что нам известна только скорость изменения величины, но не известен сам закон изменения величины. В этом случае возникают два вида задач:

А. Зная скорость, найти закон изменения величины y.

Б. Зная скорость, найти приращение величины Δy при изменении x от значения x_1 до значения x_2.

В задачах вида А используем соотношение (7.1) (или (7.2)), которое указывает на то, что функция $F(x)$ является *первообразной* для заданной функции $F'(x)$ и, таким образом, речь идет об отыскании *первообразной* для заданной функции.

В отношении задач вида Б отметим, что искомое приращение имеет значение

$$\Delta y = F(x_2) - F(x_1)\,, \tag{7.3}$$

т.е. в задачах этого вида речь идет об отыскании *приращений* первообразной (см. (7.3)). В общем виде упомянутые задачи могут быть сформулированы так:

I. *Зная функцию f (x), найти ее первообразную.*

II. *Зная функцию f (x), найти приращение ее первообразной при переходе от значения x = a к значению x = b, где a и b - заданные числа.*

Задачи I и II – простейшие задачи, решаемые *интегральным исчислением*, при этом задачи вида I приводят к понятию *неопределенного интеграла* (глава 7), а задачи вида II – к понятию *определенного интеграла* (глава 8).

§7.2. Общий вид первообразной данной функции. Неопределенный интеграл

Рассмотрим пример.

Пример 3. Две функции $F_1(x) = 1/2\left(\cos 2x\right)$ и $F_2(x) = \cos^2 x$ для всякого $x \in (-\infty, +\infty)$ имеют своими производными одну и ту же функцию; действительно,

$$F_1'(x) = \left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = -\frac{1}{2}\sin 2x\,(2x)' = -\sin 2x,\quad F_2'(x) = (\cos^2 x)' =$$

$$= 2\cos x\,\left(\cos x\right)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x.$$

Таким образом, для функции $f(x) = -\sin 2x$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$ существуют, по крайней мере, две первообразные – вышеуказанные функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$. #

Поставим перед собой следующий вопрос: сколько первообразных может существовать для данной функции $f(x)$?

Ответ основывается на следующей теореме.

Теорема 7.1. *Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в некотором промежутке X имеют конечные и совпадающие производные, равные $f(x)$, то эти функции во всем промежутке отличаются на постоянную.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Для произвольного отрезка $[a,b]$, содержащегося в X, к функции $\Phi(x)$ применим теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)\,(b-a), \tag{7.4}$$

где $\xi \in (a, b)$. Так как производная

$$\Phi'(x) = (F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$$

для всякого $x \in X$, то из (7.4) следует, что разность $\Phi(b) - \Phi(a) \equiv 0$ при любых a и b из X, а это означает, что $\Phi(x) = \text{const} = C$ для всякого $x \in X$, где C – произвольная постоянная; таким образом $F_2(x) - F_1(x) = C$, отсюда следует $F_2(x) = F_1(x) + C$, что требовалось доказать.

Возвращаясь к примеру 3, имеем

$F_2(x) - F_1(x) = \cos^2 x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ = [из тригонометрии известно: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$] $= \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x) - \dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ (= const), что следовало ожидать по теореме 7.1.

Из теоремы 7.1 следует: если функция $f(x)$ имеет одну первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество их, которое записывается в виде

$$F(x) + C, \tag{7.5}$$

где C – произвольная постоянная, и других первообразных, не входящих в (7.5), для функции $f(x)$ не существует.

О п р е д е л е н и я. 1^0. *Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ в промежутке X, то $F(x) + C$ (совокупность всех первообразных) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от дифференциала $f(x)\,dx$) и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е.*

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}, \tag{7.6}$$

где C – произвольная постоянная.

В (7.6) $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*. Символ $\int$ представляет собой удлиненную латинскую букву S и называется *знаком интеграла*.

2^0. *Операции отыскания первообразной и неопределенного интеграла называются интегрированием. Интегрирование есть операция, обратная дифференцированию.*

Для проверки правильности интегрирования достаточно продифференцировать результаты интегрирования, в итоге должны получить подынтегральную функцию.

3^0. *Если интеграл* (7.6) *существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой.*

Геометрически теорема 7.1 утверждает, что график любой первообразной для функции $f(x)$ получается простым сдвигом вдоль оси Oy вверх или вниз графика функции $y = F(x)$ (рис.7.1).

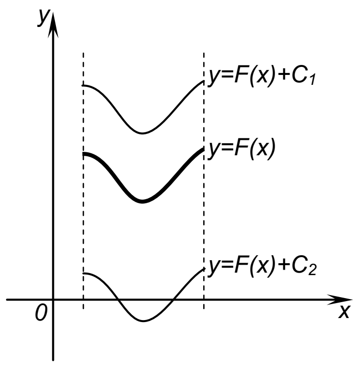


Рис. 7.1

Пример 4. а) Так как функция x^3 есть первообразная для функции $3x^2$ (см. пример 1), то

$$\int 3x^2dx = x^3 + C. \quad \#$$

б) Так как функция $\sqrt{x}$ есть первообразная для дифференциала $dx/(2\sqrt{x})$, то

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C.$$

Зададим теперь следующий важный вопрос: всегда ли возможно интегрирование, т.е. для всякой ли функции $f(x)$, заданной в некотором промежутке, существует первообразная?

Оказывается, нет. Однако *если функция $f(x)$ непрерывна, то первообразная всегда существует*, - этот факт примем без доказательства и всюду в данной главе будем говорить только об интегрировании *непрерывных* функций (напомним, что для дифференцирования функции условие непрерывности было необходимым, но не достаточным).

§7.3. Прямые и обратные операции

В различных разделах математики вводятся математические операции, которые иногда условно подразделяются на *прямые* и *обратные*. В некоторых случаях, например, операции сложения, умножения, возведения в целую степень принято называть прямыми, а операции вычитания, деления, извлечения корня – обратными.

Будем считать, что на некотором множестве определена прямая операция, если результат действия этой операции на элементы множества, есть элемент этого же множества. Так, в арифметике операция сложения, определяемая на множестве натуральных чисел, является прямой, ибо сумма любых двух натуральных чисел есть число натуральное; обратная операция – вычитание – не всегда выполнима на множестве натуральных чисел, ибо разность двух натуральных чисел в некоторых случаях есть отрицательное число, не входящее в множество натуральных. Операция умножения всегда выполнима на множестве целых чисел, и поэтому считается прямой операцией, а обратная операция – деление – не всегда выполнима на множестве целых чисел, ибо приводит в отдельных случаях к дробным числам, не принадлежащих множеству целых чисел. Прямая операция возведения в n-ю степень, где n – целое, всегда имеет место на множестве рациональных чисел, а обратная операция – извлечение корня n-й степени – выполнима не всегда на этом множестве, хотя бы потому что результатом могут оказаться иррациональные или комплексные числа, не принадлежащие множеству рациональных чисел.

Из рассмотренных примеров видно, что так называемые обратные операции в каком-то смысле «хуже» прямых и алгоритмы обратных операций в большинстве случаев сложнее алгоритма прямых операций.

В математическом анализе операция дифференцирования, как известно, выполнима (при определенных условиях) на множестве элементарных функций и их суперпозиций и в результате получаем функции из этого же множества; будем называть эту операцию прямой. Обратная операция – интегрирование – на множестве элементарных функций и их суперпозиций «хуже», чем дифференцирование, ибо алгоритм отыскания первообразной для некоторых функций из указанного множества после конечного числа шагов либо приводит к математически неразрешимой проблеме, либо требует привлечения *специальных функций*, не входящих в множество элементарных функций и их суперпозиций. В силу изложенных обстоятельств из множества элементарных функций и их суперпозиций выделим конечное число подмножеств функций, первообразные для которых принадлежат множеству элементарных функций и их суперпозиций. Значительную часть таких подмножеств рассмотрим в этой главе.

§7.4. Простейшие свойства неопределенного интеграла

Установив тесную связь между дифференцированием и интегрированием, рассматривая последние как прямую и обратную операции, приведем здесь правила и формулы интегрирования подобно тому, как это было сделано для дифференцирования.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые функции, $k = const \neq 0$. Тогда имеют место следующие свойства неопределенного интеграла:

А. $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (7.7)$$

– постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

Б. $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \qquad (7.8)$$

– интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме их интегралов;

В. $$d\int f(x)dx = f(x)dx \qquad (7.9)$$

– знаки d и $\int$, стоящие рядом, когда первый помещен перед вторым, взаимно сокращаются.

Г. Так как $F(x)$ есть первообразная для $F'(x)$, то

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (7.10)$$

– знаки $\int$ и d, стоящие перед $F(x)$, взаимно сокращаются и тогда, когда d стоит после $\int$, но только к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, $G(x)$ – первообразная для $g(x)$.

а) В правой части (7.7) имеем

$$k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC. \qquad (7.11)$$

Но $k\,F(x)$ – первообразная для $k\,f(x)$, (так как $(k\,F(x))' = k(F(x))' = k\,f(x)$), а kC – произвольная постоянная (поскольку произведение произвольной постоянной на любую константу, не равную нулю, есть произвольная постоянная), и таким образом, в правой части (7.11) узнаем $\int kf(x)dx$, что и доказывает свойство А.

б) В правой части (7.8) имеем

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) =$$
$$= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2), \qquad (7.12)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Но $F(x) \pm G(x)$ – первообразная для $f(x) \pm g(x)$, поскольку

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x), \qquad .$$

а $C_1 \pm C_2$ - произвольная постоянная (как сумма двух произвольных постоянных). Поэтому в выражении $F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2)$ из (7.12) узнаем $\int (f(x) \pm g(x))dx$, что и доказывает свойство Б.

в) По определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = (F'(x) \pm C')\, dx = f(x) + 0 = f(x),$$

что доказывает свойство В.

г) Так как

$$dF = F'(x)\, dx = f(x)\, dx\,,$$

то из определения неопределенного интеграла (7.6) следует свойство Г.

З а м е ч а н и е 1. При вычислениях не пишут kC или $C_1 \pm C_2$, а пишут просто C, так как *способ записи* произвольной постоянной несуществен. Важно, чтобы постоянное слагаемое в интеграле было произвольным, т.е. было способно принимать *любые* значения, а *как* это слагаемое записано, безразлично. Так, если C – произвольная постоянная, то $3C$, C^3, $\operatorname{tg} C$, $\ln|C|$ – также произвольные постоянные, а, скажем, C^2, $\sin C$, e^C – не произвольные постоянные, ибо $C^2 \geq 0$, $|\sin C| \leq 1$, $e^C > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Свойство Б распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых.

З а м е ч а н и е 3. Свойства А и Б будем называть правилами интегрирования I и II по аналогии с соответствующими правилами дифференцирования.

Пример 5.

$$\int\left(2\cos x - \frac{3}{x}\right)dx = [\text{применяем правила II и I}: (7.8) \text{ и } (7.7)] =$$

$= 2\int \cos x dx - 3\int \frac{dx}{x}$ = [функция $\sin x$ есть первообразная для $\cos x$ (поскольку $(\sin x)' = \cos x$), а функция $\ln|x|$ – первообразная для $1/x$ (ибо $(\ln|x|)' = 1/x$); учитываем замечание 1] $= 2\sin x - 3\ln|x| + C$. #

Пример 6.

$$\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\text{правило II}: \int(f+g)dx=\int fdx+\int gdx\right]=\int x^2dx+$$

$+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[x^3/3$ – первообразная для $x^2:(x^3/3)'=x^2$ – сравните с примером 1; $1/\sqrt{x}$ – первообразная для $2/\sqrt{x}$, ибо $\left(2\sqrt{x}\right)'=1/\sqrt{x}$ (сравните с примером 2)] $=x^3/3+\sqrt{x}+C$. #

§7.5. Сводка основных формул и правил интегрирования

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производная будет $f(x)$, непосредственно приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления (см. (7.6)).

Обращением формул, по которым вычислялись производные элементарных функций, получим формулы интегрирования, которые из соображений удобства и большей наглядности поместим в таблицу 7.1 вместе с формулами дифференцирования.

Таблица 7.1

Формулы дифференцирования	**Формулы интегрирования**
1^0. $(C)'=0$	1^0. $\int 0\,dx=C$
2^0. $(x)'=1$	2^0. $\int 1\,dx=x+C$
3^0. $(\sin x)'=\cos x$	3^0. $\int \cos x dx=\sin x+C$
4^0. $(\cos x)'=-\sin x$	4^0. $\int \sin x dx=-\cos x+C$
5^0. $(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	5^0. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$
6^0. $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	6^0. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C$

7^0. $(\ln\lvert x\rvert) = 1/x$	7^0. $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
8^0. $(e^x)' = e^x$	8^0. $\int e^x dx = e^x + C$
9^0. $(a^x)' = a^x \ln a$	9^0. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10^0. $\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	10^0. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ $= \arcsin\frac{x}{a} + C$
11^0. $\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{a^2 + x^2}$	11^0. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} =$ $= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
12^0. $(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$	12^0. $\int \operatorname{ch}x dx = \operatorname{sh}x + C$
13^0. $(\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x$	13^0. $\int \operatorname{sh}x dx = \operatorname{ch}x + C$
14^0. $(\operatorname{th}x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	14^0. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x + C$
15^0. $(\operatorname{cth}x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	15^0. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}x + C$
16^0. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	16^0. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
17^0. $(\ln\lvert f(x)\rvert)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ – логарифмическое дифференцирование	17^0. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
	18^0. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$

	$= \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$
	$19^0.\ \displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} =$ $= \ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C$
	$20^0.\ \displaystyle\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
	$21^0.\ \displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$

З а м е ч а н и е 1. Напомним, $\operatorname{sh}x = (e^x - e^{-x})/2$, $\operatorname{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{th}x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$, $\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x$ – гиперболические функции.

З а м е ч а н и е 2. Справедливость формул 18^0 – 21^0 проверяется дифференцированием; проверим 18^0: $d\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{dx}{x^2-a^2}$ по свойству В неопределенного интеграла ,

$$d\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)' dx = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2-a^2}dx\ ,$$

– таким образом, формула верна.

З а м е ч а н и е 3. Формулы интегрирования 1^0 – 21^0 сохраняют свой вид независимо от обозначения независимой переменной подынтегральной функции. Так, если (см. пример 4,а) $\int 3x^2 dx$ = $= x^3 + C$, то $\int 3t^2 dt = t^3 + C$.

Правила интегрирования и известные ранее правила дифференцирования поместим в таблицу 7.2.

Таблица 7.2

Правила дифференцирования	**Правила интегрирования**
I. $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$	I. $\int c \cdot u(x)dx = c\int u(x)dx$
II. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$	II. $\int (u(x) \pm v(x)dx = \int u(x)dx \pm \pm \int v(x)dx$
III. $(u \cdot v)' = u'v + u\,v'$	III. $\int uv'dx = u \cdot v - \int vu'dx$ или $\int udv = u \cdot v - \int vdu$
IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	
V. $y(u(x))' = y'_u \cdot u'_x$	
	IV. $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$

З а м е ч а н и е 4. Правило интегрирования III называется правилом интегрирования по частям в неопределенном интеграле (или просто интегрирование по частям), а правило IV называется правилом замены переменной в неопределенном интеграле (или просто замена переменной); справедливость этих правил установим ниже.

З а м е ч а н и е 5. Из таблицы 7.2 видно:

а) правила дифференцирования I–V выполняются, если функции *u, v, y* дифференцируемы по соответствующим переменным;

б) в правилах интегрирования I и II необходима интегрируемость функций u и v на промежутке X, в правиле III необходима интегрируемость функций uv' и $u'v$ на X, а в правиле IV – интегрируемость функции $f(x)$ на некотором промежутке X и функции $f(x(t))x'(t)$ на соответствующем промежутке T.

З а м е ч а н и е 6. Формул и правил из таблиц 7.1 и 7.2 достаточно для нахождения неопределенных интегралов для достаточно большого числа элементарных функций. Найденные интегралы, в свою очередь, являются промежуточными этапами для интегрирования более сложных выражений. Чтобы каждый раз не повторять промежуточных выкладок, для практических целей таблица 7.1 может быть расширена до нескольких десятков, сотен и даже тысяч неопределенных интегралов, рассматриваемых как табличные. Но для овладения техникой интегрирования на первых порах достаточно правил и неопределенных интегралов, приведенных в таблицах 7.2 и 7.1.

§7.6. О методах интегрирования

Следует подчеркнуть, что наши возможности проинтегрировать функцию ограничиваются формулами интегрирования 1^0 – 21^0 таблицы 1 и правилами I и II , в справедливости которых мы не сомневаемся. Если какая-то функция не совпадает с одной из подынтегральных функций указанных формул или с помощью правил I и II данный интеграл не приводится к табличным, то мы должны либо отказаться от возможности найти интеграл в конечном виде (хотя он, возможно, существует), либо придумать способ отыскания первообразной от произвольной функции.

В науке давно известно: если поставлена новая задача, то можно пойти по одному из путей:

1) разработать новые методы решения этой новой задачи;

2) новую задачу переформулировать таким образом, чтобы она оказалась «похожей» на одну из старых задач, решение которой уже известно, то есть, как говорят, попытаться свести новую задачу к уже решенной.

В дальнейшем при вычислении интегралов будем следовать по второму пути, а именно *сводить* интеграл от сложной (в вычислительном плане) функции к интегралу от менее сложного выражения.

Приемы сведения интегралов от произвольных функций к табличным интегралам (формулы 1^0 – 21^0) относятся к *методам интегрирования*.

Правильнее было бы говорить не о методах, а об *искусстве* интегрирования, ибо даже внутри одного метода существует несколько вариантов интегрирования, но надо суметь выбрать самый рациональный, а это уже искусство.

Проиллюстрируем идею сведения к более простой задаче на простейших примерах, используя свойства основных элементарных функций, элементарные преобразования подынтегральных выражений, линейные свойства неопределенного интеграла (правила I и II).

Пример 7. а) $\int \frac{dx}{4x^2+7}$ = [среди формул 1^0-21^0 нет в точности такого интеграла; ближе всего формула 11^0, «подгоним» интеграл под формулу 11^0] = $\int \frac{dx}{4(x^2+7/4)}$ = [по правилу I: $\int cu(x)dx =$ $= c\int u(x)dx$] $= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{7}/2)^2} = \left[\text{см.} 11^0\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}} + C$.

б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ = [среди формул 1^0-21^0 нет подобного; преобразуем подынтегральное выражение] = $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$ $= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$ = [по правилу II: $\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx +$ $+ \int v(x)dx\Big]= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx$ = [см. формулы 2^0, 5^0] = tg $x - x$ + C.

в) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{3/4}dx = \left[\text{см.} 16^0\right] = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$. #

З а м е ч а н и е . В дальнейшем при решении примеров в примечаниях в квадратных скобках, ссылаясь на номер соответствующих формул и правил, не всегда будем указывать их содержание.

Ниже рассмотрим *метод интегрирования по частям* (правило III) и особенно сильный прием – *метод замены переменной* (правило IV).

Еще раз подчеркнем то обстоятельство, что при интегрировании выражений общего вида трудно сказать заранее применение *каких* правил и в *какой* последовательности приведет к успеху. Ответ (положительный или отрицательный) может быть получен в результате *перебора* нескольких вариантов выбора правил и последовательности их применения. В этом трудность и существенное отличие обратной операции – интегрирования – от прямой операции – дифференцирования.

§7.7. Интегрирование по частям (правило III)

Справедливо следующее утверждение.

Пусть: 1) $u(x)$ и $v(x)$ – *дифференцируемые функции с непрерывными производными* $u'(x)$ и $v'(x)$, 2) *произведение* $u'(x)\ v(x)$ *есть интегрируемая функция; тогда произведение* $u(x)\ v'(x)$ *тоже интегрируемая функция и*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \qquad (7.13)$$

или, что то же самое,

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (7.13)$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения функций имеем

$$d(uv) = udv + vdu,$$

откуда $udv = d(uv) - vdu$ и, следовательно, по правилу интегрирования II: $\int udx = \int d(uv) - \int vdu.$

Поскольку по свойству Г (см. (7.10)) $\int d(uv)\ =\ uv\ +\ C,$ постольку $\int udv = uv - \int vdu$ или, что то же самое,

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

(постоянную C мы «присоединили» к той, которая получится от второго интеграла), – теорема доказана.

Формула (7.13) носит название *формулы интегрирования по частям* и содержание ее составляет правило интегрирования III , которое часто позволяет сложный (в плане вычислений) интеграл свести к менее сложному.

Значительная часть неопределенных интегралов, берущихся по частям, может быть разбита на три группы:

1.Интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)^2$, ..., и которая принимается за функцию $u(x)$, входящую в формулу (7.13), при условии, что оставшаяся часть подынтегрального выражения есть дифференциал известной функции.

2. Интегралы вида

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)dx\,,\ \int (ax+b)^n \sin(cx)dx\,,\ \int (ax+b)^n e^{cx}dx\,,$$

где a, b, c - константы, n – целое ≥ 1 , берутся каждый с помощью n-кратного интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ каждый раз берется $(ax + b)$ в соответствующей степени, а в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения.

3. Интегралы

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx,\quad \int e^{ax}\cos(bx)dx,\quad \int \cos(\ln x)dx,\quad \int \sin(\ln x)dx$$

и т.п. относятся к так называемым *циклическим интегралам*, для которых после неоднократного применения правила интегрирования по частям получаем *уравнение*; тогда искомый интеграл находится из решения полученного уравнения.

З а м е ч а н и е 1 . Поскольку отыскание неопределенного интеграла сводится к отысканию первообразной, то при интегрировании на промежуточных этапах находим только соответствующую первообразную, а произвольную постоянную «приплюсовываем» в самом конце решения при записи ответа.

З а м е ч а н и е 2 . Если подынтегральное выражение допускает произвол в выборе $u(x)$ и $dv(x)$, входящих в формулу (7.13), то при неудачном выборе u и dv исходный интеграл сведется к более сложному (в плане вычислений) интегралу.

Удачный выбор u и $d\,v$ зависит от опыта, а «опыт – дело наживное».

Пример 8. $I = \int x\,\mathrm{arctg}x dx =$ [интеграл относится к группе 1, интегрируем по частям; примем здесь $u = \mathrm{arctg}x$, $dv = xdx$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \int xdx =$ [см.16^0]$= x^2/2$.

Обратить внимание! Для большей наглядности и удобства в дальнейшем будем писать так:

Применим правило III:

$u = \mathrm{arctg}x;$	$du = \frac{dx}{1+x^2};$
$dv = xdx;$	$v = \int xdx =$ [см. 16^0] $= x^2/2.$

$I = uv - \int vdu = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx =$ [используем правило I и преобразуем подынтегральное выражение, прибавив и отняв в числителе единицу] =

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctgx} - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$=\text{[используем правило II]} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$=\text{[см. формулы } 2^0,\ 11^0\text{]} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C. \quad \#$$

Пример 9. $\int x^2 \sin x dx$ = [интеграл относится к группе 2; применим правило III:

$u = x^2;$	$du = 2xdx;$
$dv = \sin xdx;$	$v = \int \sin xdx = \left[\text{см. } 4^0\right] = -\cos x$]=

$$= \int udv = vu - \int vdu\ \ ] = -x^2\cos x - \int -2x\cos xdx = \text{[по правилу I]} =$$

$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx$ = [полученный интеграл проще исходного – понижена степень при x – и снова относится к группе 2, поэтому для его вычисления повторно применим правило III:

$u_1 = x;$	$du_1 = dx;$
$dv_1 = \cos x dx;$	$v_1 = \int\cos x dx = [\text{см. } 3^0] = \sin x$]=

$= -x^2\cos x + 2(u_1v_1 - \int v_1du_1) = -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int\sin x dx)$ = [см. 4^0] = $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$.

Отметим, что интеграл вычислен с помощью *двукратного* применения правила III.

З а м е ч а н и е 3 . Если в примере 9 принять

$u = \sin x;$	$du = \cos x\, dx;$
$v = x^2\, dx;$	$v = \int x^2 dx = [\text{см.} 16^0] = x^3/3$,

то по правилу III (по формуле (7.13)) получим

$$\int x^2\sin x dx = uv - \int v du = \frac{x^3}{3}\sin x - \frac{1}{3}\int x^3\cos x dx,$$

т.е. вычисление данного интеграла свелось к вычислению более сложного интеграла от функции $x^3\cos x$ (см. замечание 2 этого пункта).

Пример 10. $I = \int e^x\cos x dx$ – интеграл относится к группе 3; по правилу III:

$u_1 = e^x;$	$du = e^x\, dx;$
$dv = \cos x dx;$	$v = \int\cos x dx = \sin x$

и $I = uv - \int v du = e^x\sin x - \int e^x\sin x dx$ – полученный интеграл снова относится к группе 3; повторно применяем правило III:

$u_1 = e^x;$	$du_1 = e^x\, dx;$
$dv_1 = \sin x dx;$	$v_1 = \int\sin x dx = -\cos x$,

$I = e^x \sin x - (u_1 v_1 - \int v_1 du_1) = e^x \sin x - (-e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx) =$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$.

Итак, получили

$$\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx$$

– уравнение для интеграла $I = \int e^x \cos x dx$;

Перепишем и решим уравнение:

$$I = e^x (\sin x + \cos x) - I, \qquad 2I = e^x (\sin x + \cos x),$$

$$I = e^x (\sin x + \cos x)/2 + C$$

– это ответ (приписали произвольную постоянную, ибо искали неопределенный интеграл (см. замечание 1 этого пункта)).

Убедитесь, что ответ не изменится, если начнете решать пример, приняв $u = \cos x$, $dv = e^x dx$. #

§7.8. Интегрирование методом замены переменной (правило IV)

Имеет место следующая лемма.

Лемма (свойство инвариантности интеграла). *Пусть*

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \tag{7.14}$$

Если с помощью формулы $x = \varphi(t)$ *, где* $\varphi(t)$ *– непрерывно дифференцируемая функция, ввести новую переменную t, то будет справедливо равенство*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{7.15}$$

Доказательство. Когда x – независимая переменная, имеем из (7.14)

$$d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

По известной формуле дифференцирования сложной функции

$$d(F(\varphi(t)) + C) = F'_{\varphi}(\varphi)\,\varphi'_t(t)dt = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

откуда следует справедливость формулы (7.15). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1 . Предполагается, что $\varphi(t)$ задана в некотором промежутке, и при изменении t в этом промежутке соответствующие (в силу формулы $x = \varphi(t)$) значения x не выходят из того промежутка, для которого рассматривается формула (7.14).

З а м е ч а н и е 2 . Свойство инвариантности интеграла (лемму) можно перефразировать так: если равенство (7.14) справедливо, когда x является независимой переменной, то оно остается справедливым, когда x является произвольной монотонной непрерывно дифференцируемой функцией от некоторой переменной, то есть

$$\left.\begin{aligned} &\text{если } \int f(x)dx = F(x) + C, \\ &\text{то } \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C. \end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

На лемме основан метод интегрирования с помощью замены переменной (правило IV) в формах а) и б).

Правило IV в форме а). *Если в результате подстановки* $x = \varphi(t)$, *где* $\varphi(t)$*– монотонная непрерывно дифференцируемая функция, приходят к интегралу* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, *который удается вычислить, то возвращаясь к переменной* x *с помощью формулы* $x = \varphi(t)$, *получают значение интеграла* (7.14).

Правило IV в форме б). *Если в результате подстановки* $\psi(x)=t$, *где* $\psi(x)$ *– произвольная монотонная непрерывно дифференцируемая функция, приходят к равенству* $f(x)dx = g(t)dt$, *причем интеграл* $\int g(t)dt$ *удается вычислить, то, возвращаясь от* t *к* x *с помощью формулы* $\psi(x) = t$, *получают значение интеграла* (7.14).

З а м е ч а н и е 3 . При решении примеров в указаниях в квадратных скобках будем, применяя правило IV в любой форме, писать так: «полагаем...», «замена...», «подстановка...», «правило IV... », «IV: ... ».

Пример 11. $\int \cos nx dx = \Big[dx = \frac{1}{n} d(nx)$ – подвели под знак дифференциала nx $\Big]$ = $\int \cos nx \frac{1}{n} d(nx) = \left[\mathrm{I} : \int cu(x)dx = c\int u(x)dx \right]$ = $= \frac{1}{n}\int \cos nx d(nx)$ = [см. (7.16); «напрашивается» введение новой переменной t с помощью формулы $nx = t$] = $\frac{1}{n}\int \cos t dt$ = [см.3^0]= $= \frac{1}{n}\sin t + C =$ [но $t = nx$] = $\frac{1}{n}\sin nx + C$. #

Пример 12. $I = \int (3x-5)^{12} dx$ =[можно было бы возвести двучлен в 12-ую степень (по формуле Ньютона) и затем проинтегрировать алгебраическую сумму тринадцати слагаемых, но мы сделаем иначе: $dx = \frac{1}{3} d3x = \frac{1}{3} d(3x-5)$ – подвели под дифференциал функцию $3x-5$, используя известные правила дифференцирования]= $\int \frac{1}{3}(3x-5)^{12} d(3x-5)$ = [см. (7.16); полагаем $3x - 5 = t$; и применяем правило I] = $\frac{1}{3}\int t^{12} dt$ = [см. формулу 16^0] = $= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{13}}{13} + C$ = $[t = 3x-5]$ = $= \frac{1}{39}(3x-5)^{13} + C$. #

Пример 13. $I = \int \cos^4 x \sin x dx$ = [$\sin x dx = -d\cos x$ – подвели под дифференциал $\cos x$] = $\int -\cos^4 x d\cos x$ = [$\cos x = t$; I:] = $-\int t^4 dt$ = =[см. 16^0]= $-\frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$. #

З а м е ч а н и е 4. Иногда не будем указывать в квадратных скобках действия на подведение под дифференциал функции и выбор соответствующей подстановки (и писать короче, как в нижеследующем примере).

Пример 14. а) $I = \int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int \ln^{-2} x d\ln x$ =[см.16^0 и

$(7.16)]=\dfrac{\ln^{-1}x}{-1}++C=-\dfrac{1}{\ln x}+C$.

б) $I=\int\dfrac{e^x dx}{2+e^{2x}}=\int\dfrac{de^x}{(\sqrt{2})^2+(e^x)^2}$ =[см. формулу 11^0 и (7.16)]=

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}+C$.

в) $I=\int x3^{x^2}dx=\int 3^{x^2}\dfrac{1}{2}d(x^2)=\dfrac{1}{2}\int 3^{x^2}d(x^2)$ = [см. 9^0 и (7.16)]=

$=\dfrac{1}{2\ln 3}3^{x^2}+C$.

Пример 15. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$[полагаем $x=a\sin t$ ($t\in[-\pi/2,$ $\pi/2]$, ибо здесь функция $\sin t$ монотонная), тогда $dx=a\cos t\,dt$] =

$=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t dt=\int a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\Big[\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}$

$=|\cos t|$, но при $t\in[-\pi/2,\ \pi/2]$ $|\cos t|=\cos t$ $\Big]$ $=a^2\int\cos^2 t dt=$

$=a^2\int\dfrac{1+\cos 2t}{2}dt$ = [I, II] = $\dfrac{a^2}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t dt\right)$ =[2^0; $dt=\dfrac{1}{2}d(2t)$] =

$=\dfrac{a^2}{2}\left(t+\int\dfrac{1}{2}\cos 2t d(2t)\right)$ = [$2t=z$] = $\dfrac{a^2}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\int\cos z\ dz\right)$=[см. 3^0]=

$=\dfrac{a^2}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin z\right)+C=\dfrac{a^2}{2}(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t)+C$ = $\Big[x=a\sin t,\ \sin t=\dfrac{x}{a},$

$t=\arcsin\dfrac{x}{a}$] = $\dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}\sin 2(\arcsin\dfrac{x}{a})\right)+C$.

Вычислим этот же интеграл другим способом (по частям):

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\sqrt{a^2-x^2} & du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv=dx & v=\int dx=x \end{array}\right]=$$

$$= uv - \int v du = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

= [в интеграле в числителе добавим и вычтем a^2]= $x\sqrt{a^2 - x^2}$ –

$$- \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx =$$

=[здесь применим правила II и I]= $x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx +$

$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ =[см. 10^0]= $x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$.

Для интеграла $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ получили уравнение

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

откуда $I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$.

Отметим, что данный ответ внешне отличается от полученного первым способом, но после несложных преобразований они совпадут (проделайте самостоятельно). #

З а м е ч а н и е 5 . Естественно, что в начале (да и в конце) обучения нельзя сказать заранее, какой метод интегрирования окажется наиболее рациональным, поэтому приходится довольствоваться тем, что хотя бы какой-то используемый прием оказался успешным. Главное – вычислить интеграл, а каким путем – неважно.

§7.9. Интегрирование простейших (элементарных) рациональных дробей четырех типов

Большое число интегралов сводится (в дальнейшем покажем) в конечном итоге к вычислению интегралов от рациональных дробей четырех типов:

$$1)\int\frac{dx}{x-a},\qquad 2)\int\frac{dx}{(x-a)^n},$$
$$3)\int\frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q},\qquad 4)\int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n},$$

где a, b, p, q – постоянные, n – целое ≥ 2 ; знаменатель в 3) имеет (простые) комплексно-сопряженные корни, а в 4) – кратные комплексно-сопряженные корни, т.е. в этих случаях дискриминант

$$\frac{p^2}{4}-q<0. \tag{7.17}$$

Вычислим каждый из четырех интегралов.

1. $\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}$ = [см. (7.16), 7^0] = $\ln|x–a|$ + C;

$$\boxed{\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C}. \tag{7.18}$$

2. $\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\int(x-a)^{-n}d(x-a)$ = [см. (7.16), 16^0] =

$$=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C;$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C}. \tag{7.19}$$

3. $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ = [преобразуем знаменатель, выделив полный квадрат: $x^2+px+q=\left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)-\frac{p^2}{4}+q=$

$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2$, где $m^2=q-\frac{p^2}{4}>0$ в силу (7.17)] =

$=\int\frac{(ax+b)dx}{(x+p/2)^2+m^2}$ = [полагаем $x+p/2=t$, тогда $x=t-p/2$, $dx=$

$=dt$] = $\int\frac{a(t-p/2)+b}{t^2+m^2}dt$ = [применяем правила II, I] =

$=a\int\frac{tdt}{t^2+m^2}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\left[tdt=\frac{1}{2}d(t^2+m^2);\ 11^0\right]$ =

$=\ a\int\frac{1}{2}\cdot\frac{d(t^2+m^2)}{t^2+m^2}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}$ =[см. формулу (7.16), 7^0]= $\frac{a}{2}\ln\left|t^2+m^2\right|+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C$ = [возвращаемся от t к x: $t^2+m^2=x^2+px+q$, $t=x+p/2$] = $\frac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+$ $+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{(x+p/2)}{m}+C$, $m=\sqrt{q-p^2/4}$,

$$\boxed{\begin{gathered}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\\ =\frac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{(x+p/2)}{m}+C\end{gathered}}. \quad (7.20)$$

П р и м е ч а н и е . Не пишут знак модуля в выражении ln | x^2+px+q | , так как в силу (7.17) трехчлен *положителен*.

4. $\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ = [повторяя выкладки для предыдущего интеграла, получим: $x^2+px+q=t^2+m^2$, $t=x+p/2$, $m^2=q-p^2/4$]=

$=\frac{a}{2}\int\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^n}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n}$ = [см. (7.16), 16^0] =

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(t^2+m^2)^{n-1}}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n} \quad t = x + p/2,$$

$m^2 = q - p^2/4 > 0$; итак,

$$\boxed{\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx = -\frac{a}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)I_n} \qquad (7.21)$$

где принято обозначение $t = x + p/2$, $m^2 = q - p^2/4$,

$$\boxed{I_n = \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n}} \qquad (7.22)$$

(индекс у I_n совпадает с показателем степени в знаменателе подынтегрального выражения).

Вычислим отдельно интеграл I_n.

$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n}$ = [преобразуем подынтегральное выражение: сначала умножим числитель и знаменатель на m^2, затем в числителе прибавим и отнимем t^2] =

$$= \int\frac{(m^2+t^2)-t^2}{m^2(t^2+m^2)^n}dt = \frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^n} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{первый интеграл обозначим } \mathrm{I}_{n-1} \text{ (по аналогии с (7.22)), а ко} \\ \text{второму интегралу применим интегрирование по частям:} \\ \qquad \mathrm{u = t}; \qquad \mathrm{du = dt}; \\ \mathrm{dv} = \frac{\mathrm{tdt}}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{m}^2)^{\mathrm{n}}}; \qquad \mathrm{v} = \int\frac{\mathrm{tdt}}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{m}^2)^{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{t}^2+\mathrm{m}^2)}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{m}^2)^{\mathrm{n}}} = \end{array}\right.$$

$$=-\frac{1}{2(\mathrm{n}-1)(\mathrm{t}^2+\mathrm{m}^2)^{\mathrm{n}-1}}\Bigg]=\frac{1}{m^2}I_{n-1}-\frac{1}{m^2}\left(uv-\int vdu\right)=\frac{1}{m^2}I_{n-1}-$$

$$-\frac{1}{m^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+m^2)^{n-1}}+\int\frac{dt}{2(n-1)(t^2+m^2)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2}I_{n-1}+\frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}}-\frac{1}{m^2(2n-2)}I_{n-1}\ .$$

В итоге для интеграла I_n получим *рекуррентную* формулу:

$$\boxed{I_n=\frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{m^2(2n-2)}I_{n-1}}, \qquad (7.23)$$

которая позволяет интеграл I_n свести к I_{n-1}, затем, полагая в формуле (7.23) вместо индекса n индекс $n-1$, сведем I_{n-1} к I_{n-2} и т.д.; после проведения подобной операции $n-1$ раз интеграл I_n сведется к интегралу

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C\ ,$$

т.е. к табличному интегралу 11^0.

З а м е ч а н и е. Для приобретения навыка интегрирования вычисление интегралов в начале обучения следует делать с подробными выкладками, а формулами (7.18)-(7.21) пользоваться для проверки результатов.

Пример 16. $I=\int\frac{6x-5}{(x^2+4x+7)^3}dx=[x^2+4x+7=(x^2+2x\cdot 2+2^2)-2^2+7=$

$=(x+2)^2+3]=\int\frac{6x-5}{((x+2)^2+3)^3}dx=$[полагаем $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$]=

$$=\int\frac{6(t-2)-5}{(t^2+3)^3}dt=6\int\frac{tdt}{(t^2+3)^3}-17\int\frac{dt}{(t^2+3)^3}=\left[tdt=\frac{1}{2}d(t^2+3)\right]=$$

$$=\frac{6}{2}\int\frac{d(t^2+3)}{(t^2+3)^3}-17I_3=3\int(t^2+3)^{-3}d(t^2+3)-17I_3=\text{[см.(7.16) и }16^0\text{]}=$$

$$=-\frac{3}{2(t^2+3)^2}-17I_3\ ; \qquad (7.24)$$

$I_3=\int\frac{dt}{(t^2+3)^3}$ = [в рекуррентной формуле (7.23) примем $n = 3$, $m^2 = 3$] = $\frac{t}{3\cdot 4(t^2+3)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}I_2$ = [в формуле (7.23) примем теперь $n = 2$, $m^2 = 3$] $=\frac{t}{12(t^2+3)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{3(t^2+3)}+\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{dt}{t^2+3^2}\right)=$

$$\text{[см. }11^0\text{]}=\frac{t}{12(t^2+3)^2}+\frac{t}{12(t^2+3^2)}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} \qquad (7.25)$$

(произвольную постоянную C припишем в ответ).

Подставляя I_3 из (7.25) в (7.24) и возвращаясь от переменной t к x, получим:

$$I=-\frac{3}{2(x^2+4x+7)^2}-17\left(\frac{x+2}{12(x^2+4x+7)^2}+\frac{x+2}{(x^2+4x+7)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C\ .\#$$

§7.10. Интегрирование рациональных выражений

7.10.1. Рациональные дроби

Так называются функции, представленные отношением многочленов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}\ , \qquad (7.26)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m$ – действительные числа, степени многочленов m и n – целые положительные числа.

Рациональная дробь (7.26) называется *правильной*, если $m < n$. При $m \geq n$ дробь (7.26) называется *неправильной*; в этом случае, произведя деление $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ по правилу деления многочленов, можно представить неправильную дробь в виде суммы многочлена T_{m-n} степени $m-n$ и правильной рациональной дроби $\frac{P_{m1}(x)}{Q_n(x)}$ $(m_1 < n)$:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n} + \frac{P_{m1}(x)}{Q_n(x)} .$$

Тогда интегрирование неправильной $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ сводится (по правилу II) к интегрированию многочлена T_{m-n} (что можно сделать *всегда*) и правильной дроби $\frac{P_{m1}(x)}{Q_n(x)}$:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int\left(T_{m-n} + \frac{P_{m1}(x)}{Q_n(x)}\right)dx = \int T_{m-n}(x)dx + \int \frac{P_{m1}(x)}{Q_n(x)}dx .$$

Пример 17. Найти интеграл $\int \frac{x^3+2x-3}{x^2+4x+8}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является неправильной дробью $\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}$ $(m = 3,\ n = 2,\ m > n)$; по правилу деления многочленов «уголком» получаем:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3 + 2x - 3 & x^2 + 4x + 8 \\
\underline{x^3 + 4x^2 + 8x} & \overline{\;x - 4\;} \\
-\;-4x^2 - 6x - 3 & \\
\underline{-4x^2 - 16x - 32} & \\
10x + 29 &
\end{array} .$$

Следовательно, $T_1(x) = x - 4$, $\frac{P_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{10x+29}{x^2+4x+8}$ и

$$\int \frac{x^3+2x-3}{x^2+4x+8}dx = \int\left(x-4+\frac{10x+29}{x^2+4x+8}\right)dx = \int(x-4)dx +$$

$$+\int\frac{10x+29}{x^2+4x+8}dx = \frac{x^2}{2}-4x+I,$$

где I – интеграл от правильной рациональной дроби, причем дискриминант многочлена в знаменателе отрицательный (убедитесь самостоятельно), поэтому I есть интеграл от элементарной дроби третьего типа (см. §7.9); можно было бы найти его по формуле (7.20), но для приобретения навыка стоит проделать выкладки подробно:

$I = \int\frac{10x+29}{x^2+4x+8}dx$ = [в знаменателе выделяем полный квадрат: $x^2 + 4x + 8 = (x^2 + 2x\cdot 2 + 4) + 4 = (x+2)^2 + 4$] =

$= \int\frac{10x+29}{(x+2)^2+4}dx$ = [введем $t = x + 2$, тогда $x = t - 2$, $dx = dt$] =

$= \int\frac{10(t-2)+29}{t^2+4}dt = 10\int\frac{tdt}{t^2+4} + 9\int\frac{dt}{t^2+4} = \left[tdt = \frac{1}{2}d(t^2+4)\right.$ – подвели функцию $t^2 + 4$ под дифференциал; воспользуемся формулой 11^0 из таблицы 7.1] $= 10\int\frac{1}{2}\frac{dt(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} =$ [см. (7.16) и 7^0] $= 5\ln(t^2+4) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = [t = x+2] = 5\ln(x^2+4x+8) +$

$+ \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C$. #

7.10.2. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

Интегрирование правильной дроби вида (7.26) теснейшим образом связано с разложением на множители знаменателя этой дроби

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (7.27)$$

или

$$Q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \,, \tag{7.28}$$

причем (7.28) будет в случае, если предварительно разделить числитель и знаменатель дроби (7.26) на $a_0 \neq 0$.

Разложение многочлена на множители основано на следующих фактах, известных из высшей алгебры:

1) всякий многочлен степени n имеет в точности n корней в множестве комплексных чисел;

2) если $x = a$ – корень многочлена $Q_n(x)$, то $Q_n(a) \equiv 0$;

3) если $x = a$ – корень многочлена с действительными коэффициентами, то этот многочлен делится без остатка на двучлен $x - a$;

4) если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$ (α,β – действительные числа, $i^2 = -1$), то сопряженное этому корню число $\alpha - i\beta$ также является корнем этого многочлена, причем числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ с действительными коэффициентами p и q и с дискриминантом $p^2 - 4q < 0$;

5) любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного двучлена и квадратного трехчлена с действительными коэффициентами;

6) любой многочлен четвертой степени разлагается в произведение квадратных трехчленов с действительными коэффициентами.

На основании этих фактов доказывается, что любой многочлен выше второй степени с действительными коэффициентами единственным образом разлагается в произведение двучленов вида $x - a$ и квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$, причем некоторые множители могут входить в разложение многочлена $Q_n(x)$ несколько раз (в этом случае говорят, что многочлен имеет *кратные* корни).

Объединяя одинаковые множители (если они есть) разложение любого многочлена (7.27) можно представить произведением двучленов и квадратных трехчленов в следующем виде:

$$\boxed{Q_n(x) = a_0(x - x_1)^k \cdot \ldots \cdot (x - x_i)^l \, (x^2 + p_1 x + q_1)^r \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_h x + q_h)^s}\,, \tag{7.29}$$

где $x_1, \dots, x_i$ – действительные попарно различные корни многочлена кратности $k,\dots,l$, соответственно; каждый из трехчленов вида $x^2 + px + q$ имеет комплексно сопряженные корни кратности $r, \dots, s$, соответственно; $k,\dots,l, r, \dots, s$ – натуральные числа, причем

$$k+\dots+l + 2r+ \dots+ 2s = n \ . \qquad (7.30)$$

З а м е ч а н и е . Из вышеизложенного следует, что многочлен любой степени с действительными коэффициентами может иметь только четное число комплексных корней.

При отыскании корней многочлена на практике помогут следующие *утверждения*:

1) для того чтобы несократимая дробь $\frac{a}{b}$ ($a \in Z$, $b \in N$, Z – множество целых чисел, N – множество натуральных чисел) была корнем многочлена (7.27) с целыми коэффициентами необходимо, чтобы число a было делителем свободного члена a_n, а число b – делителем коэффициента a_0 при x^n (теорема Безу);

2) для того чтобы число $a \in Z$ было корнем многочлена (7.28) ($a_0 = 1$) с целыми коэффициентами необходимо, чтобы число a было делителем свободного члена a_n (теорема Безу);

3) если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корни многочлена (7.28) ($a_0 = 1$), то

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1} x_n -$$

– сумма всех возможных произведений двух корней,

$$a_3 = -(x_1x_2 x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

(формулы Виета).

Пример 18. Разложить на множители многочлен

$$Q_3(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Р е ш е н и е . Если данный многочлен имеет рациональные корни, то они являются делителями числа 6 (см. утверждение 2), т.е. могут быть числами ±1, ±2, ±3, ±6. Проверим, при каких числах многочлен обращается в нуль. Убедитесь самостоятельно, что

$$Q_3(1) = 0, \qquad Q_3(2) = 0, \qquad Q_3(3) \neq 0,$$
$$Q_3(-1) \neq 0, \qquad Q_3(-2) \neq 0, \qquad Q_3(-3) = 0.$$

На этом проверку можно прекратить, ибо многочлен может иметь не более трех действительных корней, а они уже обнаружены: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Итак,

$$Q_3(x) = (x-1)(x-2)(x+3)\,. \tag{7.31}$$

Пример 19. Разложить на множители многочлен

$$Q_3(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1.$$

Р е ш е н и е. Если многочлен Q_3 имеет рациональные корни, то это (по утверждению 1) несократимые дроби, при этом a – делитель свободного члена – может принимать значения ± 1, а b – делитель коэффициента при x^3 – может принимать значения 1 и 2. Составим все возможные дроби $\frac{a}{b}$: ± 1, ± 1/2. Проверим, при каких дробях данный многочлен обращается в нуль. Убедитесь самостоятельно, что

$$Q_3(1) \neq 0,\ \ Q_3(-1) \neq 0,\ \ Q_3(1/2) = 0,\ \ Q_3(-1/2) \neq 0.$$

Значит, $x = 1/2$ – корень и данный многочлен без остатка делится на $x - 1/2$:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 + x - 1 & x - 1/2 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^3 - x^2 \phantom{{}+x-1} & 2x^2 + 2x + 2 \\ \cline{1-1}
-\ 2x^2 + x - 1 & \\
2x^2 - x \phantom{{}-1} & \\ \cline{1-1}
-\ 2x - 1 & \\
2x - 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}\ .$$

Итак,

$$Q_3(x) = 2\,(x - 1/2)\,(x^2 + x + 1)\ . \qquad (7.32)$$

Трехчлен $x^2 + x + 1$ ($p = 1$, $q = 1$) имеет комплексные корни, ибо его дискриминант $p^2 - 4\,q = 1 - 4 = -3 < 0$, поэтому приведение многочлена к виду (7.29) закончено.

7.10.3. Разложение правильной дроби

Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей четырех типов основано на следующей теореме (доказательство опустим).

Теорема 7.2. *Пусть* $P_m(x)/Q_n(x)$ *– правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами. Если многочлен* $Q_n(x)$ *представим в виде* (7.29) ($a_0 = 1$), *то существуют числа* A_α ($\alpha = \overline{1,k}$), …, B_β ($\beta = \overline{1,l}$), M_j, N_j ($j = \overline{1,r}$), …, R_t, S_t ($t = \overline{1,s}$), *такие, что*

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{(x-x_1)^k} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \frac{B_1}{(x-x_i)^l} + \frac{B_2}{(x-x_i)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-x_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^r} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \\
&+ \frac{R_1x+S_1}{\left(x^2+p_hx+q_h\right)^s} + \frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+p_hx+q_h\right)^{s-1}} + \ldots + \frac{R_sx+N_s}{x^2+p_hx+q_h}
\end{aligned}}\ . \qquad (7.33)$$

Напомним, что x_1, …, x_i – действительные попарно различные корни многочлена $Q_n(x)$ кратности $k,\ldots,l$; каждый из трехчленов вида $x^2 + px + q$ имеет комплексно-сопряженные корни кратности r, ..., s.

7.10.4. Метод неопределенных коэффициентов

При выполнении разложения вида (7.33) для конкретно заданной дроби оказывается удобным метод неопределенных коэффициентов, который заключается в следующем. Для каждой правильной дроби записывается разложение (7.33), в котором коэффициенты $A_\alpha,\ldots,\ B_\beta,\ M_j\ ,\ N_j,\ldots,\ R_t,\ S_t$ считаются неизвестными и подлежат определению ($\alpha = \overline{1,k}$; $\beta = \overline{1,l}$; $j = \overline{1,r}$; $t = \overline{1,s}$). После этого обе части равенства приводят к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравнивают коэффициенты (ибо два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x). Так как степень знаменателя $Q_n(x)$ равна n , то после приведения равенства (7.33) к общему знаменателю в числителе правой части получится многочлен степени $n - 1$ с n коэффициентами, число же неизвестных также равно n (см. (7.30)):

$$k+\ldots+l+2r+\ldots+2s=n\ .$$

Таким образом, получена система из n уравнений с n неизвестными. Существование у нее решения вытекает из теоремы 7.2.

Замечание. После приведения выражения (7.33) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае, когда $Q_n(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются соотношения между искомыми коэффициентами, облегчающие их определение.

Пример 20. Разложить дробь $\dfrac{x^2+5}{x^3-7x+6}$ на элементарные.

Решение. В знаменателе стоит многочлен $Q_3(x) = x^3 - 7x+6$, который можно представить в виде произведения (см. пример 18, (7.31)): $Q_3(x) = (x - 1)(x-2)(x+3)$. Тогда данная дробь представится в виде $\dfrac{x^2+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ и по формуле (7.33) искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2+5}{x^3-7x+6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}\ , \qquad (7.34)$$

где коэффициенты A, B, C подлежат определению. Приводя разложение к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x^2 + 5 = A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2) . \qquad (7.35)$$

Так как знаменатель имеет действительные корни $x_1= 1$, $x_2= 2$, $x_3 = -3$, то, следуя замечанию этого пункта, подставим их последовательно в равенство (7.35); в результате получим:

для $x_1 = 1$:	$1 + 5 = A\ (1 - 2)\ (1 + 3)$,	$A = -3/2$,
для $x_2 = 2$:	$4 + 5 = B\ (2 - 1)\ (2 + 3)$,	$B = 9/5$,
для $x_3 = 3$:	$9 + 5 = C\ (-3 - 1)\ (-3-2)$,	$C = 7/10$.

Подставив найденные A, B, C в (7.34), запишем искомое разложение

$$\frac{x^2+5}{x^3-7x+6} = \frac{-3/2}{x-1} + \frac{9/5}{x-2} + \frac{7/10}{x+3} \quad . \qquad (7.36)$$

Пример 21. Найти разложение на элементарные дроби для

$$\frac{x^2+x}{2x^3+x^2+x-1} \quad .$$

Р е ш е н и е. Из примера 19 (формула (7.32)) следует, что знаменатель дроби можно представить в виде $2(x-1/2)(x^2 + x +1)$. Тогда данная дробь имеет вид (коэффициент 1/2 вынесен множителем за квадратные скобки) $\frac{1}{2}\left[\frac{x^2+x}{(x-1/2)(x^2+x+1)}\right]$. Для дроби в квадратных скобках по формуле (7.33) имеем:

$$\frac{x^2+x}{(x-1/2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1/2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad ; \qquad (7.37)$$

приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x^2 + x = A\ (x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1/2) \qquad (7.38)$$

или

$$x^2 + x = (A + B)\ x^2 + (A + C - B/2)\cdot x + (A - C/2) . \qquad (7.39)$$

В равенстве (7.39) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x (в левой части равенства коэффициент при x в нулевой степени – свободный член – равен нулю):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x^2: & 1 = A + B \\ \text{при } x^1: & 1 = A + C - B/2 \\ \text{при } x^0: & 0 = A - C/2 \end{array}\right\}. \qquad (7.40)$$

Так как знаменатель данной дроби имеет один действительный корень $x_1 = 1/2$, то до решения системы (7.40) воспользуемся замечанием этого пункта и подставим в обе части равенства (7.38) вместо x значение 1/2, в результате получим, что

$$3/4 = A\ 7/4, \text{ откуда } A = 3/7.$$

Используя найденное $A = 3/7$, проще решить систему (7.40); в итоге имеем $B = 4/7$, $C = 6/7$. Подставляя найденные A, B, C в (7.37) и умножая на $1/2$, получим искомое разложение в виде

$$\frac{x^2+x}{2x^3+x^2+x-1} = \frac{3}{14}\cdot\frac{1}{x-1/2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2x+3}{x^2+x+1}\ . \qquad (7.41)$$

7.10.5. Интегрирование рациональных дробей

Из результатов пунктов 7.10.3 и 7.10.4 следует, что неопределенный интеграл от правильной рациональной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ на всяком промежутке, на котором знаменатель не обращается в нуль, существует и выражается с помощью формулы (7.33) и правил I и II интегрирования (см. таблицу 7.2) через интегралы от элементарных дробей четырех типов (см. §7.9).

Из вышесказанного непосредственно следует *алгоритм* для нахождения неопределенного интеграла от правильной рациональной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$:

– *найти все корни многочлена $Q_n(x)$ любым известным из элементарной математики способом и представить многочлен в виде* (7.29);

– *записать разложение дроби по формуле* (7.33) *в виде суммы простейших дробей с коэффициентами, подлежащими определению;*

– *переходя к общему знаменателю в записанном разложении и отбрасывая его, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x получившегося равенства; в результате получится система алгебраических уравнений, из которой следует найти неизвестные коэффициенты и подставить их в разложение дроби;*

– *проинтегрировать простейшие дроби, входящие в правую часть разложения* (7.33) (*см.* §7.9).

Пример 22. $I = \int \frac{x^2+5}{x^3-7x+6}dx$ = [см. пример 20, (7.36); при– меняем правила I и II] = $-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{7}{10}\int\frac{dx}{x+3} =$

$$=\left[\text{см.}\,(7.18):\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|\right] = -\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{9}{5}\ln|x-2| +$$

$$+\frac{7}{10}\ln|x+3| + C\ . \qquad \#$$

Пример 23. $I=\int\frac{x^2+x}{2x^3+x^2+x-1}dx$ = [см. пример 21, (7.41); правила I и II] = $\frac{3}{14}\int\frac{dx}{x-1/2}+\frac{1}{7}\int\frac{2x+3}{x^2+x+1}dx$ = $[\text{см.}\,(7.18)]$ = $=\frac{3}{14}\ln|x-1/2|+\frac{1}{7}I_1$; вычислим отдельно $I_1=\int\frac{2x+3}{x^2+x-1}dx$ = =[дробь третьего типа (см. §(7.9)), $x^2+x+1=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-$

$$\left.-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4};\ \text{полагаем}\ x+\frac{1}{2}=t, x=t-\frac{1}{2}, dx=dt\right] =$$

$$=\int\frac{2(t-1/2)+3}{t^2+3/4}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+3/4}+\int\frac{2dt}{t^2+3/4}=\left[2tdt=dt^2=d(t^2+3/4)\right.;$$

см. 11^0 из таблицы 7.1]= $\int\frac{d(t^2+3/4)}{t^2+3/4}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}/2}$ =[см. (7.16) и 7^0 из таблицы 7.1] = $\ln(t^2+3/4)+\frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$

$$=\left[t=x+1/2\right]\; = \;\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \quad . \qquad \#$$

Пример 24. Найти $I=\int\frac{7x^2+81}{x(x^2+9)^2}dx$.

Р е ш е н и е . Под интегралом стоит правильная дробь, знаменатель которой уже представлен по формуле (7.29), поэтому по формуле (7.33) записывает разложение дроби в виде:

$$\frac{7x^2+81}{x(x^2+9)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+9} \quad . \qquad (7.42)$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$7x^2+81=A(x^2+9)+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+9)$$

или

$$7x^2+81=(A+D)x^4+Ex^3+(18A+B+9D)x^2+(C+9E)x+81A\ .$$

Приравниваем в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x (в левой части коэффициенты при x^4, x^3 и x^1 равны нулю):

$$\left.\begin{aligned} x^4&:\ 0=A+D\\ x^3&:\ 0=E\\ x^2&:\ 7=18A+B+9D\\ x^1&:\ 0=C+9E\\ x^0&:\ 81=81A \end{aligned}\right\}. \quad \begin{gathered}\text{Решением этой системы будут}\\ A=1,\ B=-2,\ C=0,\ D=-1,\ E=0.\end{gathered}$$

Поэтому искомое разложение (7.42) имеет вид:

$$\frac{7x^2+81}{x(x^2+9^2)}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{(x^2+9)^2}-\frac{xdx}{x^2+9}$$

и

$$\int\frac{7x^2+81}{x(x^2+9)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2xdx}{\left(x^2+9\right)^2}-\int\frac{xdx}{x^2+9}=\left[2xdx=d(t^2+9);\text{см.}7^0\right]$$

$= \ln|x| - \int\frac{d(x^2+9)}{(x^2+9)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}$ =[см. (7.16) и 16^0, 7^0 таблицы 7.1] $= \ln|x| + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. #

§7.11. О рациональных функциях нескольких переменных

При дальнейшем изложении удобно пользоваться понятием рациональной функции нескольких переменных.

О п р е д е л е н и е. Пусть $P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – многочлены от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т.е. алгебраическая сумма всех возможных произведений вида

$$u^{\alpha}{}_1 \cdot u^{\beta}{}_2 \cdots u^{\omega}{}_n \qquad (\alpha + \beta + \cdots + \omega \le k,\ \alpha,\ \beta, \cdots, \omega - \text{целые} \ge 0),$$

умноженных на постоянные коэффициенты. Тогда функции вида

$$R\,(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \tag{7.43}$$

называются *рациональными функциями от переменных* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

О п р е д е л е н и е. *Если в формуле* (7.43) *переменные* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *в свою очередь являются функциями переменной* x:

$u_l = \varphi_l(x)$, $l = \overline{1, n}$, *то функция*

$$R\,(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

называется рациональной функцией от функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$.

Пример 25. а) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x + 5\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x+1}}$.

Если принять $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x+1}$, $u_4 = \sqrt[3]{x^2-1}$, то $f(x)$ можно рассматривать как рациональную функцию от u_1, u_2, u_3, u_4:

$$f(x) = R(x,\ \sqrt{x}\ ,\ \sqrt[3]{x+1}\ ,\ \sqrt[3]{x^2-1}\ ) = R\ (u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1+5u_4}{u_2-2u_3}\ .$$

Если принять $v_1 = \sqrt{x}$, $v_2 = \sqrt[3]{x+1}$, $v_3 = \sqrt[3]{x-1}$, то $x = v_1^2$, $\sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x-1} = v_2v_3$ и $f(x)$ – рациональная функция от v_1, v_2, v_3:

$$f(x) = R\ (\sqrt{x}\ , \sqrt[3]{x+1}\ , \sqrt[3]{x-1}\ ) = R\ (v_1, v_2, v_3) = \frac{v_1^2+5v_2v_3}{v_1-2v_2}\ .$$

б) Пусть дана функция

$$g(x) = \frac{\sin^2 x - 3}{2+\cos x + 3\sin x}\ .$$

Если принять $u = \cos x$, $v = \sin x$, то

$$g(x) = R\ (\cos x, \sin x) = \mathrm{R}(u\ , v) = \frac{v^2-3}{2+u+3v}\ .\ \#$$

Перейдем теперь к интегралам от функций рассмотренных типов и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций.

§7.12. Интегрирование некоторых иррациональностей

Пусть $\frac{m}{n},...,\frac{p}{q}$ – несократимые дроби, k – общий знаменатель этих дробей; в выражении $\frac{ax+b}{cx+d}$ постоянные коэффициенты a, b, c, d таковы, что $ad - cb \neq 0$ (в противном случае выражение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от x).

а) Рассмотрим интеграл

$$\boxed{\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx}\ . \tag{7.44}$$

Сделаем замену в интеграле (7.44) (см. §7.8), положив

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^k\ .} \tag{7.45}$$

Тогда

$$x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}=\varphi(t),\ dx=\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m}\right)' dt=\varphi'(t)dt, \tag{7.46}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}=t^{\frac{mk}{n}}=t^r,\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}=t^{\frac{pk}{q}}=t^s\ ,$$

где r, …, s – целые.

Подставляя (7.45), (7.46) в подынтегральное выражение интеграла (7.44), получим

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},t^r,\ldots,t^s\right)\varphi'(t)dt\ .$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле есть, очевидно, рациональная функция от переменного t.

Таким образом, нахождение интеграла (7.44) подстановкой (7.45) сводится к интегрированию рациональных дробей, что рассмотрено в §7.10.

З а м е ч а н и е . Конечно, для нахождения выражения для исходного интеграла надо после вычисления $\int R^*(t)dt$ сделать обратную замену $t = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$, чтобы вернуться к первоначальной переменной x.

В дальнейшем в аналогичных ситуациях не будем каждый раз оговаривать необходимость обратного перехода к исходной переменной x.

Интересны частные случаи:

б) Интеграл

$$\boxed{\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx} \tag{7.47}$$

и подстановка

$$\boxed{x = t^k} \tag{7.48}$$

получаются из (7.44) и (7.45) при $a = d = 1$, $b = c = 0$.

в) Интеграл

$$\boxed{\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{p}{q}}\right)dx} \tag{7.49}$$

и подстановка

$$\boxed{ax + b = t^k} \tag{7.50}$$

получаются из (7.44) и (7.45) при $c = 0$, $d = 1$.

Пример 26. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

Решение. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ = $\int R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right)dx$ = [наименьший общий знаменатель дробей 1/2 и 1/3 есть 6, поэтому, следуя (7.47) и (7.48), положим $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$] =

$= \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt$ = [подынтегральная функция есть неправильная дробь; выделяем целую часть:

$$\begin{array}{r|l}
-\;\; t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
t^8+t^6 & t^6-t^4+t^2-1 \\ \cline{1-1}
-\;\; -t^6 & \\
-t^6-t^4 & \\ \cline{1-1}
-\;\; t^4 & \\
t^4+t^2 & \\ \cline{1-1}
-\;\; -t^2 & \\
-t^2-1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

1] = $6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$ = [применим правила I, II и формулы 16^0, 11^0 из таблицы 7.1] = $=6(t^7/7 - t^5/5 + t^3/3 - t + \operatorname{arctg} t) + C$ = [$t = \sqrt[6]{x}$] =
$=6\left(x\sqrt[6]{x}/7 - \sqrt[6]{x^5}/5+\sqrt{x}/3 - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$. #

Пример 27. Найти $I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Р е ш е н и е . $I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int R\left(x, \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx$ =[положим, следуя (7.44) и (7.45), $\frac{x-1}{x+1} = t^2$,тогда $x = \frac{t^2+1}{1-t^2}$, $dx = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)' =$
$= \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$, $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$] = $4\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ = [под интегралом стоит правильная дробь и для нее можно было бы найти разложение по

формуле (7.33), но мы сделаем проще: добавим и отнимем единицу в числителе] $= 4\int\frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}dt = 4\left(\int\frac{dt}{t^2+1} - \int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right) =$

$$=[\text{см.}11^0] = 4\,(\operatorname{arctg} t - I_2)\,. \qquad (7.51)$$

Для интеграла I_2 применим рекуррентную формулу (7.23) при $n = 2$, $m = 1$:

$$I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\,. \qquad (7.52)$$

Подставляя (7.52) в (7.51), получаем

$$I = 4\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C \quad , \quad \text{где } t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ . \qquad \#$$

§7.13. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений

Если в формуле (7.43) переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$ являются элементарными тригонометрическими функциями, то получающаяся сложная функция называется рациональной от элементарных тригонометрических функций. Такая функция приведена, в частности, в примере 25,б.

7.13.1. Универсальная подстановка

Пусть $R(\sin x, \cos x)$ – произвольная рациональная функция от переменных $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\,(\sin x, \cos x)\,dx \qquad (7.53)$$

и покажем, что *универсальной подстановкой*

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \qquad (7.54)$$

интеграл (7.53) всегда сводится к интегралу от рациональной функции переменной t, рассмотренному в §.7.10.

Действительно, имеем

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad (7.55)$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

поэтому

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int\widetilde{R}(t)dt,$$

т.е. интеграл (7.53) сведен к интегралу от рациональной функции $\widetilde{R}(t)$.

Пример 28. $I=\int\frac{dx}{4+4\sin x+3\cos x}$ = [следуя (7.54) и (7.55), положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$] =

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(4+\frac{8t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+8t+7}=$$ [знаменатель дроби $1/(t^2+8t+7)$ имеет действительные корни $t_1=-7$, $t_2=-1$; по формуле (7.33) ищем разложение дроби в виде

$$\frac{1}{t^2+8t+7}=\frac{1}{(t+7)(t+1)}=\frac{A}{t+7}+\frac{B}{t+1},$$

$$1 = A\,(t + 1) + B\,(t + 7); \qquad (*)$$

подставляем значения корней t_1 и t_2 в обе части равенства (*):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при } t=-7: & 1=-6A\,, & A=-1/6, \\ \text{при } t=-1: & 1=\ \ 6B\,, & B=\ \ 1/6, \end{array}\right] =$$

$=2\int\left(-\dfrac{1/6}{t+7}+\dfrac{1/6}{t+1}\right)dt$ = [применим правила II и I и формулу (7.18)] $=-\dfrac{1}{3}\ln|t+7|+\dfrac{1}{3}\ln|t+1|+C=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{1+\mathrm{tg}(x/2)}{7+\mathrm{tg}(x/2)}\right|+C$. #

7.13.2. Частные случаи функции *R*(sin*x*, cos*x*)

При интегрировании нижеперечисленных функций укажем подходящие подстановки, не приводя доказательств.

1. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ – *нечетная* функция относительно переменной $\sin x$:

$$\boxed{R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x),}\ \text{то}\ \boxed{t=\cos x}\,. \qquad (7.56)$$

2. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ – *нечетная* функция относительно переменной $\cos x$:

$$\boxed{R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x, \cos x),}\ \text{то}\ \boxed{t=\sin x}: \qquad (7.57)$$

3. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ – *четная* функция относительно обеих переменных $\sin x$ и $\cos x$:

$$\boxed{R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x, \cos x),}\ \text{то}\ \boxed{t=\mathrm{tg}x\ (\text{либо } t=\mathrm{ctg}x)}. \qquad (7.58)$$

4. Интегралы вида

$$\boxed{\int\sin^m x\cos^n x\,dx\ ,\quad m,n-\text{целые}} \qquad (7.59)$$

подпадают под один или несколько случаев из (7.56) – (7.58).

5. Интегралы вида

$$\boxed{\int\sin^{2k}x\cos^{2l}x\,dx\,,\ k,\,l\in N} \qquad (7.60)$$

подпадают под случай (7.58); следовательно, годится подстановка $t = \mathrm{tg}x$, но проще воспользоваться формулами

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2, \quad \sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2,$$

$$\sin x \cos x = (\sin 2x)/2, \tag{7.61}$$

которые приведут (в общем случае) к интегралам от функций, рассмотренных в случаях (7.56) – (7.58), но степени тригонометрических функций будут ниже (и, следовательно, вычислений необходимо меньше).

Замечание. Универсальная подстановка $t = \mathrm{tg}(x/2)$ также годится для всех вышеперечисленных случаев (7.56) – (7.60), но ее применение приводит к более сложной подынтегральной рациональной функции от t.

Пример 29.

$\mathrm{I} = \int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x + 1} = \left[\mathrm{R}(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} \right.$ – нечетная относительно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x + 1} = -R(\sin x, \cos x)$; поэтому применим, следуя (7.56), подстановку $t = \cos x$. Тогда $x = \arccos t$, $\left. dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \sin x = \sqrt{1-t^2} \right] =$

$$-\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 dt}{(t^2+1)\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{1-t^2}{t^2+1} dt = = \int \frac{(t^2+1)-2}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1}$ = [см. 2^0 и 11^0 из таблицы 7.1] = $t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \cos x - 2\,\mathrm{arctg}(\cos x) + C$. #

Пример 30. $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$ = [подынтегральная функция – четная относительно обеих переменных $\cos x$ и $\sin x$ (проверьте это самостоятельно), поэтому, следуя (7.58), положим $\mathrm{tg}x=t$, тогда

$$\sin x=\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},x=\mathrm{arctg}\,t,$$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}\Bigg]=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}+\frac{5}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t-2)^2+1}=\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2+1}$$ = [см. (7.16) и 11^0 из таблицы 7.1] =

$\mathrm{arctg}(t-2)+C=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x-2)+C$. #

Пример 31. $I=\int\frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$ = [интеграл вида (7.59), подынтегральная функция

$$R(\sin x,\cos x)=(\cos^5 x)/\sin^7 x$$

удовлетворяет условиям всех случаев (7.56)– (7.58), поэтому можно выбрать подстановку и $t=\cos x$, и $t=\sin x$, и $t=\mathrm{tg}x$ (и универсальную: $t=\mathrm{tg}(x/2)$), но наиболее рациональное решение получится при подстановке $t=\mathrm{ctg}x$; тогда $dt=-dx/\sin^2 x$ (либо $dx=-dt/(1+t^2)$) $=\int\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\mathrm{ctg}^5 x\,d(\mathrm{ctg}x)=-\int t^5dt$ = [см. 16 из таблицы 7.1] $=-t^6/6+C=-(\mathrm{ctg}^6x)/6+C$. #

Пример 32. $I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$ = [интеграл вида (7.60); см. (7.61)] = $\int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right)\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$ =

= $\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx$ = [в первом интеграле снова воспользуемся формулой из (7.61), а во втором интеграле $\cos 2x dx = d(\sin 2x)/2$ – подведем $\sin 2x$ под дифференциал] = $\frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\frac{1}{4}d4x + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$ = [см. (7.16) и формулы 2^0, 3^0 и 16^0 из таблицы 7.1]= $\frac{1}{64}(4x - \sin 4x) + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2x +$

$+C = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$. #

7.13.3. Интегралы вида

$$\boxed{\int \cos mx \cos nx dx, \qquad \int \sin mx \sin nx dx, \qquad \int \sin mx \cos nx dx}$$

вычисляются с помощью формул

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

Пример 33. $\int \sin 5x \cos 6x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(5-6)x + \sin(5+6)x\right)dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \sin x dx + \frac{1}{2}\int \sin 11x dx$ =[см. (7.16) и 4^0 из таблицы 7.1] =

$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{22}\cos 11x + C$. #

§7.14. Интегрирование некоторых иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

Нижеследующие интегралы с помощью соответствующих подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций от элементарных тригонометрических функций, рассмотренных в §7.13.

1. Если

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx}, \text{ то } \boxed{x = a\cos t \text{ (либо } x = a\sin t).} \quad (7.62)$$

(здесь R – рациональная функция переменных x и $\sqrt{a^2 - x^2}$).

Действительно, $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ = [пусть $x = a \sin t$, тогда dx=

$= a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$] $= \int R(a\sin t, a\cos t) a\cos t dt =$

$= \int R_1(\sin t, \cos t)dt.$

2. Если

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx}, \text{ то } \boxed{x = a/\cos t \text{ (либо } x = a/\sin t).} \quad (7.63)$$

Имеем, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ =[полагаем $x=a/\sin t$, $dx= -a\cos t dt/\sin^2 x$,

$\sqrt{x^2 - a^2} = a\cos t/\sin t$] $= \int R(a/\sin t, a\cos t/\sin t)(-a\cos t dt/\sin^2 t)dt =$

$= \int R_2(\sin t, \cos t)dt.$

3. Если

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx}, \text{ то } \boxed{x = a\,\mathrm{tg}t \ \text{(либо } x = a\,\mathrm{ctg}t)}. \quad (7.64)$$

Действительно,

$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx = \Big[\text{пусть } x=a\,\mathrm{tg}t,\ dx=adt/\cos^2 t,$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t\Big] = \int R(a\,\mathrm{tg}\,t, a/\cos t)adt/\cos^2 t = \int R_3(\sin t, \cos t)dt.$$

4. Интегралы вида

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx}, \quad (7.65)$$

где a, b, c – действительные числа, после выделения полного квадрата у квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

и введения подстановки $x + b/2a = t$ сводятся к интегралу

$$\int R\left(t-b/2a, \sqrt{at^2+(c-b^2/4a)}\right)dt.$$

Последний интеграл в зависимости от знака a и знака выражения $c - b^2/4a$ относится к одному из интегралов (7.62)–(7.64). Если $a < 0$ и $(c - b^2/4a) < 0$, то подынтегральная функция не определена и интеграл не имеет смысла.

Пример 34. $I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx = \left[\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} = R\left(x, \sqrt{x^2-3^2}\right)\right.$ – имеет место случай (7.63); примем $x = 3/\cos t$, $t = \arccos(3/x)$, $dx = 3\sin t\ dt/\cos^2 t$, $\left.\sqrt{x^2-9} = 3\sin t/\cos t\right] = \int \frac{\cos^2 t \cdot \cos t \cdot 3\sin t dt}{9\cdot 3\sin t\cdot\cos^2 t}$ $= = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C = \frac{1}{9}\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right) + C =$[используем свойство $\cos(\arccos a)=a]=\frac{1}{9}\sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{3}{x})}+C=\frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+C=$

$$=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C\ . \qquad \#$$

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Дайте определение первообразной функции. Для каких функций первообразная существует всегда? Что называется неопределенным интегралом?

2. В чем заключается геометрический смысл совокупности первообразных?

3. Сформулируйте простейшие свойства неопределенного интеграла. Докажите их.

4. Напишите таблицу основных интегралов.

5. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. На какие (три) группы могут быть разбиты интегралы, берущиеся по частям?

6. Сформулируйте правило замены переменной в неопределенном интеграле.

7. Изложите методы интегрирования простейших дробей 1), 2), 3) и 4) типов.

8. В каком виде можно представить разложение многочлена на множители?

9. Что такое рациональная дробь? Какая рациональная дробь называется неправильной? правильной дробью?

10. Сформулируйте теорему о разложении правильной рациональной дроби на простейшие дроби 1) – 4) типов.

11. Изложите метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной дроби в случае действительных простых корней знаменателя. Приведите пример.

12. Изложите метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной дроби в случае кратных действительных корней знаменателя. Приведите пример.

13. Изложите метод неопределенных коэффициентов для разложения правильной рациональной дроби, если среди корней знаменателя имеются комплексно сопряженные корни. Приведите пример.

14. Укажите подстановку (замену переменной) в интегралах вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right)dx$, $\int R\left(x,\ x^{m/n}, \ldots, x^{p/q}\right)dx$.

15. Укажите универсальную подстановку для интегралов вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$.

16. Какие методы помимо универсальной подстановки могут быть применены для вычисления интегралов вида $\int \sin^{2k} x \cos^{2l+1} x dx$, $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \sin mx \cos nx \, dx$?

17. Укажите тригонометрические подстановки для интегралов $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\ \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\ \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$.

ГЛАВА 8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§8.1. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

В главе 7 рассмотрели процесс интегрирования, который Лейбниц (Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, языковед) разъяснил так: «общая задача квадратуры (интегрирования) сводится к отысканию кривой, обладающей известным законом наклона», то есть чтобы найти интеграл от данной функции $f(x)$, надо найти такую кривую $y = F(x)$, что ее наклон к оси Ox равен $f(x)$. Затем Лейбниц проводит идею, которая висит в воздухе, – вводит аддитивную (с помощью суммирования) произвольную постоянную C и получает неопределенный интеграл $F(x) + C$, что геометрически соответствует множеству интегральных кривых, получающихся сдвигом кривой $y = F(x)$ вдоль оси Oy , причем все кривые в точке x имеют один и тот же наклон к оси Ox (см. рис.7.1).

С первообразной $F(x)$ связано другое важное в теоретическом и практическом отношении понятие интегрального исчисления – определенный интеграл; дадим его определение.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке X , $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ и $F(x) + C$ – любая другая первообразная для $f(x)$ (C – произвольная постоянная). Для двух значений $a,b \in X$ найдем приращение первообразной при переходе от a к b :

$$(F(x)+C)\big|_{x=b} - (F(x)+C)\big|_{x=a} = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b) - F(a). \quad (8.1)$$

Оказалось, что приращение первообразной *не зависит* от того, какую именно первообразную для $f(x)$ взяли.

О п р е д е л е н и е**.** *Приращение любой первообразной для функции* $f(x)$, *получаемое при переходе от* a *к* b, *называется определенным интегралом от функции* $f(x)$, *взятым в пределах от* a *к* b, *и обозначается символом*

$$\int_a^b f(x)dx .$$

В силу (8.1) по самому определению определенного интеграла имеем

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}\ . \tag{8.2}$$

Относительно формулы (8.2) сделаем следующие замечания:

1) равенство (8.2) называется *формулой Ньютона-Лейбница*;

2) $F(x)$ – *любая* первообразная для $f(x)$, x – переменная интегрирования, числа a и b – *нижний* и *верхний пределы интеграла*, соответственно;

3)определенный интеграл – *число* (в отличие от первообразной, которая есть функция);

4) допускается $a < b$ и $a > b$, но при этом a – начало отсчета; указание, какая из двух точек считается началом, называется *ориентацией* промежутка интегрирования; в дальнейшем промежуток $[a, b]$ считаем ориентированным и начало отрезка берем в качестве нижнего предела;

5) условимся приписывать смысл интегралу с равными пределами, полагая

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}\ ; \tag{8.3}$$

6) совершенно безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha \ ;$$

7) если ввести символ $\Big|_a^b$ – «подстановка от a до b », то пишут (в практических вычислениях)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b . \tag{8.4}$$

Пример 1.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}\ .\#$$

Пример 2.

$$\int_{\pi/2}^{0} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{0} = -(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}) = -(1-0) = -1. \qquad \#$$

§8.2. Геометрический смысл определенного интеграла

С обоснованием многих важных фактов интегрального исчисления функций одной переменной и его приложениями связано понятие площади плоской фигуры.

Под плоской фигурой будем понимать замкнутое и ограниченное множество точек плоскости Oxy, при этом замкнутое множество точек – это множество, содержащее все свои граничные точки, а ограниченное множество – это множество, которое можно заключить внутрь круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат.

В плоскости Oxy возьмем фигуру S – *криволинейную трапецию* $ABB'A'$, ограниченную линиями (с соответствующими уравнениями) AA': $x = a$, BB': $x=b$, AB: $y = 0$, $A'B'$: $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция (рис. 8.1); отрезок $[a, b]$ называют основанием криволинейной трапеции.

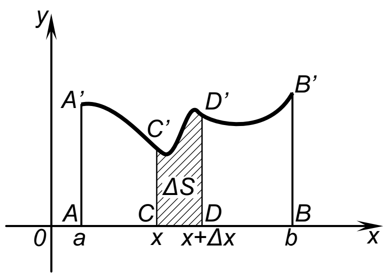


Рис. 8.1

Фигура S представляет собой замкнутое и ограниченное множество точек, поэтому можно говорить о ее площади s (не будем путать фигуру S с площадью s, фигура – это геометрический объект, а площадь – числовая характеристика).

Элементарная геометрия позволяет вычислить площади лишь очень ограниченного числа фигур и не дает способов вычисления площади фигуры, ограниченной произвольным контуром (в частности, фигуры $ABB'A'$ на рис. 8.1).

Для вычисления площади криволинейной трапеции поступим следующим образом. Обозначим через $s\,(x)$ площадь переменной криволинейной трапеции $ACC'A'$ (рис.8.1). Величина $s\,(x)$ есть функция от x, заданная на $[a,\ b]$, причем $s\,(a) = 0$, $s\,(b) = s$, где s – площадь всей криволинейной трапеции $ABB'A'$, и при этом имеет место соотношение

$$s = s(b) - s(a)\ . \tag{8.5}$$

Примем без доказательства следующие простейшие свойства площадей:

1. Если фигура S_1 составляет часть фигуры S_2 , то

площадь $S_1 \leq$ площади S_2 .

2. Площадь прямоугольника равна произведению длины основания на высоту.

3. Если фигура S с помощью линии разделена на части S_1 и S_2, то

площадь $S =$ площадь $S_1 +$ площадь S_2 .

Теорема 8.1. *Пусть функция $y=f\,(x)$ не отрицательна и непрерывна на $[a,\ b]$. Тогда площадь $s\,(x)$ переменной криволинейной трапеции $ACC'A'$* (рис.8.1) *есть функция от x, производная которой равна $f\,(x)$ для всех $x \in [a,\ b]$. Иными словами, $s\,(x)$ является первообразной для $f\,(x)$ или для дифференциала площади $ds\,(x) = f\,(x)dx$.*

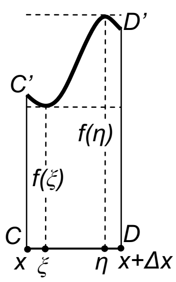


Рис. 8.2

Доказательство. Возьмем значения x и $x + \Delta x$, принадлежащие $[a,\ b]$ (Δx может быть как положительным, так и отрицательным). Обозначим через Δs площадь криволинейной трапеции $CDD'C'$, имеющей основанием отрезок $[x,\ x + \Delta x\ ]$ (рис.8.2). По свойству 3 площадей имеем площадь $ADD'A'$ = площадь $ACC'A'$ + площадь $CDD'C'$

или

$$s\,(x + \Delta x) = s\,(x) + \Delta s\,,$$

откуда следует

$$\Delta s = s\,(x + \Delta x) - s\,(x)\,,$$

т.е. Δs – приращение функции $s\,(x)$.

Для непрерывной функции $f\,(x)$ обязательно существуют наименьшее ($f\,(\xi)$) и наибольшее ($f\,(\eta)$) значения функции $f\,(x)$ на отрезке $[x,\, x + \Delta x\,]$. На этом отрезке, как на основании, построим прямоугольники с высотами $f\,(\xi)$ и $f\,(\eta)$ и площадями $f\,(\xi)\cdot\Delta x$ и $f\,(\eta)\cdot\Delta x$. Первый прямоугольник содержится в криволинейной трапеции с площадью Δs , а второй – содержит ее (рис.8.2). Тогда в силу свойства 1 площадей

$$f\,(\xi)\cdot\Delta x \le \Delta s \le f\,(\eta)\cdot\Delta x\,,$$

откуда

$$f\,(\xi) \le \Delta s/\Delta x \le f\,(\eta)\,.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\xi \to x$ и $\eta \to x$.

Поэтому

$$\lim_{\xi\to x} f\,(\xi) \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \lim_{\eta\to x} f\,(\eta)\,,$$

$$f\,(x) \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \le f\,(x)\,,$$

откуда

$$s' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = f\,(x)\,,$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$s' = \frac{ds}{dx} = f\,(x)\,,$$

то $ds = f(x)\,dx$ – дифференциал функции $s\,(x)$, а сама функция $s\,(x)$ есть одна из первообразных для $f(x)$ (или для $f\,(x)\,dx$):

$$\int f(x)dx = s(x).$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница (8.2)

$$\int_a^b f(x)dx = s(b) - s(a)\ . \tag{8.6}$$

Сопоставляя равенства (8.5) и (8.6), получаем

$$\boxed{s = \int_a^b f(x)\,dx}\ . \tag{8.7}$$

Из вышесказанного следует: *геометрический смысл определенного интеграла в случае* $a < b$ и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ – *это площадь соответствующей криволинейной трапеции.*

Отметим попутно, что формула (8.7) иллюстрирует одно из приложений понятия определенного интеграла.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 3$ (рис.8.3).

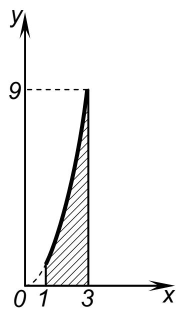


Рис. 8.3

Р е ш е н и е**.** Фигура представляет собой криволинейную трапецию. По формуле (8.7)

$$s = \int_1^3 x^2 dx = [\text{см. пример 1}] = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{26}{3}\ (\text{кв. ед.}).$$

§8.3. О классе интегрируемых функций

Из формулы Ньютона-Лейбница (8.2) следует, что к интегрируемым на $[a, b]$ относятся непрерывные на $[a, b]$ функции $f(x)$.

Ниже, в §.8.8 будет дано *другое* определение определенного интеграла (по Риману), которое позволит расширить множество интегрируемых функций. Не приводя доказательств, примем следующие утверждения о классах функций, интегрируемых на $[a,\ b]$ либо по формуле Ньютона-Лейбница, либо по Риману.

1. Непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция $f(x)$ интегрируема на нем.

2. Ограниченная на отрезке $[a,\ b]$ функция $f(x)$, имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема на нем. В частности, кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

3. Монотонная на отрезке $[a,\ b]$ функция интегрируема на нем.

§8.4. Свойства определенного интеграла

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые на $[a,\ b]$ функции, $F(x)$ и $G(x)$ – какие-нибудь их первообразные.

Свойство 1.

$$\boxed{\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}\ , \tag{8.8}$$

т.е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

Доказательство. Функция $kF(x)$ является первообразной для $kf(x)$ (см. (7.7)), поэтому по формуле Ньютона-Лейбница (8.2)

$$k\int_a^b f(x)dx = kf(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] =$$

$$= k\int_a^b f(x)dx\,.$$

Свойство 2.

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}\ , \tag{8.9}$$

т.е. интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Функция $F(x) \pm G(x)$ является, очевидно, первообразной для $f(x) \pm g(x)$ (см. (7.8)), тогда в силу формулы (8.2)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = [F(b) \pm G(b)] - [F(a) \pm G(a)] =$$

$$= [F(b) - F(a)] \pm [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

С в о й с т в о 3 .

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}\ , \qquad (8.10)$$

т.е. перестановка пределов интегрирования меняет знак интеграла.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx.$$

С в о й с т в о 4 .

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}\ , \qquad (8.11)$$

при любом положении точек a, b, c (т.е. формула (8.11) справедлива независимо от того, находится ли точка c *внутри отрезка [*a, b*] или вне его, лишь бы функция была интегрируема на соответствующем отрезке).*

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left|\text{отнимем и прибавим } F(c)\right| =$$

$$= [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

З а м е ч а н и е . Свойство 4 распространяется на случай любого конечного числа «промежуточных» точек.

С в о й с т в о 5 . *Если* f *(*x*) ≥ 0 для всех* x ∈ *[*a, b*] (*a > b*), то*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \ge 0}\ . \qquad (8.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как F′ (x) = f (x) ≥ 0 для всех x ∈ [a, b], то F (x) не убывает (возрастает в широком смысле) и, следовательно, F(b) ≥ F(a) и F(b) – F(a) ≥ 0 , откуда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ge 0\ .$$

С в о й с т в о 6 . *Если* f *(*x*)* ≤ g *(*x*) для всех* x ∈ *[*a, b*] (*a < b*), то*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}, \qquad (8.13)$$

т.е. допустимо почленное интегрирование неравенства.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть h (x) = g (x) – f (x), h (x) ≥ 0 для всех x ∈ [a, b]; g (x) = h (x) + f (x) и по свойству 4

$$\int_a^b h(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\ .$$

По свойству 5 $\int_a^b h(x)dx \ge 0$, поэтому из предыдущего равенства следует

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\ .$$

С в о й с т в о 7. (О ц е н к а о п р е д е л е н н о г о и н т е г р а л а). *Если для всех* $x \in [a, b]$ *выполняется*

$$m \le f(x) \le M, \tag{8.14}$$

где m *и* M – *точные нижняя и верхняя грани значений функции* f(x), *соответственно, то*

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}. \tag{8.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства 6 можно почленно проинтегрировать неравенство (8.14)

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx .$$

Пользуясь свойством 1 вычислим крайние интегралы:

$$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = mx\Big|_a^b = m(b-a), \qquad \int_a^b M dx = M(b-a);$$

таким образом, неравенство (8.15) доказано.

З а м е ч а н и е. Для неотрицательной на [a, b] (a < b) функции это свойство имеет наглядное геометрическое представление: площадь соответствующей криволинейной трапеции с отрезком [a, b] в качестве основания, равная $\int_a^b f(x)dx$, ограни-

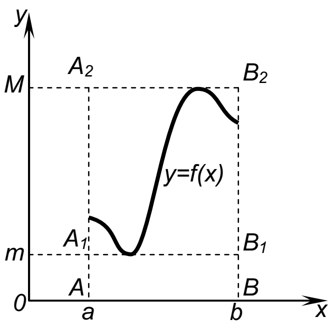


Рис. 8.4

чена снизу и сверху площадями прямоугольников ABB_1A_1 и ABB_2A_2 с общим основанием, равным $b - a$, и высотами, равными m и M, соответственно (рис.8.4).

Свойство 8 может быть сформулировано следующей теоремой.

Теорема 8.2. *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняется $m \le f(x) \le M$. Тогда существует число μ, такое, что*

$$m \le \mu \le M \tag{8.16 а}$$

и

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)}. \tag{8.16 б}$$

Доказательство. Из (8.15) после деления на $(b - a)$ следует

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M. \tag{8.17}$$

Полагая

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ ,$$

видим, что при таком выборе μ выполняется как условие (8.16 а) (в силу (8.17)), так и условие (8.16 б); теорема доказана.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ – непрерывна *на* $[a, b]$, *то она принимает все промежуточные значения между* m *и* M, *а потому для числа μ, удовлетворяющего условиям* $m \le \mu \le M$, *най-*

*дется на отрезке [*a, b*] по крайней мере одна точка* ξ*, в которой* f *(*ξ*)* = μ*. Тогда из (8.16 б)*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (8.18)$$

Это следствие обычно называется интегральной теоремой о среднем*, ибо утверждается существование на отрезке [*a, b*] некоторой «средней точки», обладающей определенным свойством, связанным с интегралом от функции.*

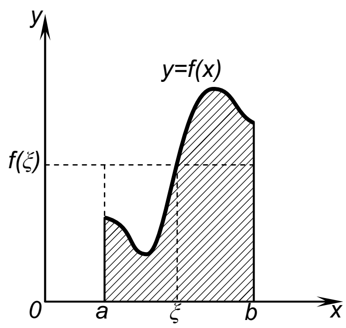


Рис. 8.5

З а м е ч а н и е. Если a < b и f (x) ≥ 0 для всех x ∈ [a, b] , то теорема о среднем имеет простое геометрическое истолкование: площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника (b – a) и высотой f (ξ) (рис.8.5).

С в о й с т в о 9. *Если* a < b*, то*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.} \quad (8.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как всегда

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

то (по свойству 6, интегрируя почленно неравенство)

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

– это другая форма неравенства (8.19).

§8.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Для определенного интеграла имеет место формула, аналогичная формуле (7.13) для неопределенного интеграла:

Если u (x), v(x) – дифференцируемые функции с непрерывными производными, то

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}. \tag{8.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как d(uv) = vdu + udv , то функция uv является первообразной для vdu + udv ; поэтому

$$\int_a^b (vdu + udv) = uv\Big|_a^b,$$

откуда, используя свойство 2 определенных интегралов (см. (8.9)), получим формулу (8.20).

Пример 4. Интеграл

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{array}\right] = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vdu =$$

$$= x\,\mathrm{arctg}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}\,0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \quad \#$$

З а м е ч а н и е . При вычислении определенных интегралов можно, разумеется, сначала найти первообразную (по частям или в таблице интегралов), а потом использовать формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 5. $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x dx =$ [см. пример 8 из главы 7] $=$

$= \left(\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$ = [при x = 0 первообразная равна нулю] $= \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. #

Пример 6. Интеграл

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right] = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= \mathrm{e} - e^x\Big|_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - \mathrm{e}^0) = 1 . \quad \#$$

§8.6. Замена переменной в определенном интеграле

Рассмотрим правило IV (замена переменной), установленное для неопределенного интеграла, применительно к определенному интегралу.

Теорема 8.3. *Если: 1) функция $f(x)$ – непрерывна на [a, b]; 2) функция x(t), где $t \in [\alpha, \beta]$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$; 3) $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$ (т.е. $\varphi(t)$ возрастает или убывает, когда t меняется от α до β); 4) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}. \tag{8.21}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{8.22}$$

С другой стороны, для сложной функции $F(x)$ в силу правила дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'_\varphi(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

для любого $t \in [\alpha, \beta]$, т.е. функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ и потому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [\text{в силу условия 4 теоремы}] =$$

$$= F(b) - F(a). \tag{8.23}$$

Из сопоставления (8.22) и (8.23) следует (8.21).

Замечание. Делая замену переменной при нахождении первообразной для неопределенного интеграла, необходимо от новой переменной t вернуться к прежней переменной x.

При вычислении определенного интеграла от функции $f(x)$ по отрезку [a, b] после замены переменной приходят к определенному интегралу от другой функции $g(t)$ по другому отрезку $[\alpha, \beta]$, т.е. к совершенно другому интегралу (предполагается, к более простому) и прежний интеграл можно «забыть» (т.е. возвращение к прежней переменной не обязательно).

Пример 7. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ = [«избавимся» от иррациональности, положив $\sqrt{x}=t$, тогда x = t^2 – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, причем dx = 2tdt; при x = 0 имеем t = $\sqrt{0}=0$, при x = 4 получим t = $\sqrt{4}=2$; применим (8.21)] = $\int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\left(\int\limits_0^2 dt - \int\limits_0^2 \frac{dt}{t+1}\right) = 2\left(t\big|_0^2 - \ln|t+1|\big|_0^2\right)$ =(4 – 0) - –2(ln3 – ln 1) = 4 – 2 ln 3. #

Замечание. В дальнейшем делаем замену переменной, убедившись предварительно, что условия теоремы 8.3 для функции x = φ(t) выполняются.

Пример 8. $\int\limits_{0,5}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \left[\begin{array}{c|c} x=\sin t & x=0{,}5 \to 0{,}5=\sin t,\ t=\arcsin 0{,}5; t=\pi/6 \\ \sqrt{1-x^2}=\cos t & \left(x=\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin t,\ t=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}, \\ dx=\cos t dt & t\in[\pi/6,\pi/2] \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos t} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t\big|_{\pi/6}^{\pi/4} = -\left(1-\operatorname{ctg}(\pi/6)\right). \qquad \#$$

Пример 9.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\left[\begin{array}{ll}\sqrt{e^x-1}=t, & x=0\to \mathrm{t}=\sqrt{e^0-1}=0,\\ e^x=t^2+1, & x=\ln 2\to t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=1,\\ x=\ln(t^2+1), & x\in[0;1]\\ dx=\dfrac{2tdt}{1+t^2} & \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^1\frac{t\cdot 2tdt}{1+t^2}=2\int_0^1\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^1=$$

$$= 2\ (1 - arctg\ 1) = 2\ (1 - \pi/4) = (4 - \pi)/2\ . \quad \#$$

§8.7. Интегрирование четных и нечетных функций

На практике часто приходится рассматривать интегрирование четных и нечетных функций $f(x)$ по симметричному относительно точки О промежутку [– a, a].

1. Пусть $f(x)$ – четная функция, т.е. для любого $x \in [-a, a]$ выполняется

$$f(-x) \equiv f(x). \tag{8.24}$$

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = I_1 + I_2\ . \tag{8.25}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx = \left[\begin{array}{l|l}\text{пусть } x=-t, & x=-a\to t=a\\ dx=-dt & x=0\to t=0\end{array}\right] = -\int_a^0 f(-t)dt =$$

= [(8.24): $f(-t) \equiv f(t)$; по свойству 3 при перестановке пределов интеграл меняет знак] = $\int_0^a f(t)dt$ = I_2 (в силу независимости определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования).

Таким образом, $I_1 = I_2$ и из (8.25) имеем

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \text{ если } f(x) - \text{четная.}} \quad (8.26)$$

2. Если $f(x)$ – нечетная функция, то для любого $x \in [-a, a]$ выполняется

$$f(-x) \equiv -f(x). \quad (8.27)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = I_1 + I_2 . \quad (8.28)$$

$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx$ =[см. случай 1 выше]= $-\int_a^0 f(-t)dt$ =[(8.27):

$f(-t) \equiv -f(t)$] = $\int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -I_2$, т.е. $I_1 = -I_2$.

Тогда из (8.28) следует:

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \text{ если } f(x) - \text{нечетная.}} \quad (8.29)$$

Пример 10. $\int_{-2}^{2}(e^x + e^{-x})dx$ =[$f(x)=(e^x + e^{-x})$, $f(-x)= e^{-x}+ e^{-(-x)}=$ $= e^{-x}+ e^x \equiv f(x) \rightarrow f(x)$– четная; применим

$$(8.26)] = 2\int_0^2 (e^x + e^{-x})dx =$$

$$= 2\left(e^x - e^{-x}\right)\Big|_0^2 = 2\,(e^2 - e^{-2} - 1 + 1) = 2\,(e^2 - e^{-2}). \qquad \#$$

Пример 11. $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx = [f(x) = x\cos x,\ f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x \equiv$

$\equiv -f(x) \to f(x)$ – нечетная, применим $(8.29)] = 0.$ #

§8.8. Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Введение определенного интеграла формулой (8.2) в некотором смысле не является конструктивным, ибо не указан алгоритм, который позволил бы для (любой) заданной функции $f(x)$ находить первообразную $F(x)$.

Рассмотрим здесь другой подход к понятию определенного интеграла.

8.8.1. Интегральная сумма

Пусть на отрезке [a, b] ($a < b$) задана непрерывная функция

$f(x)$ (рис.8.6). Точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b \qquad (8.30)$$

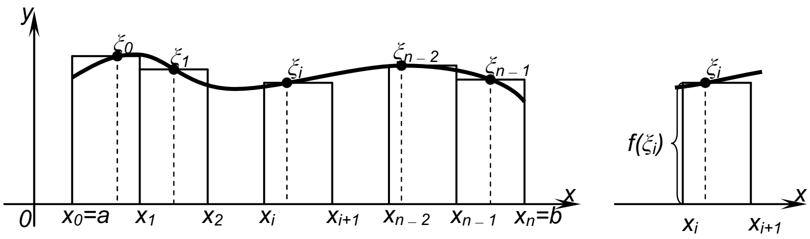


Рис. 8.6

отрезок [a, b] разобъем на n частей $l_k = [x_k , x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ с длинами $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Множество T отрезков l_k: T = { l_k } = { $l_1, l_2, ..., l_{n-1}$} назовем разбиением отрезка [a, b], а длину наибольшего из отрезков l_k обозначим λ: $\lambda = \sup\limits_k \{\Delta x_k\}$ и назовем диаметром разбиения.

Возьмем в каждом из частичных отрезков $[x_k , x_{k+1}]$ произвольную точку $x = \xi_k : x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$ и составим сумму

$$I_n = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + ... + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad (8.31)$$

которую назовем интегральной суммой для функции f (x) на [a, b] при разбиении T и выборе точек ξ_k.

Величина суммы (8.31) зависит от способа разбиения на части и от выбора точек ξ_k на частичных отрезках.

8.8.2. Сравнение интегральной суммы с величиной определенного интеграла

Посмотрим, какая существует связь между суммой (8.31) и определенным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Для разбиения T = { l_k } по свойству 4 определенных интегралов (см. (8.11)) имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx =$$ [применим к каждому интегралу справа теорему о среднем значении (8.18)] =

$$f(\eta_0)(x_1 - x_0) + f(\eta_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\eta_n)(x_n - x_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)\Delta x_k, \tag{8.32}$$

где точки η_k не произвольные точки из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, а получаются по теореме о среднем значении.

Оценим разность между интегральной суммой (8.31) и определенным интегралом (8.32):

$$\left| I_n - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)\Delta x_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(\xi_k) - f(\eta_k)\big)\Delta x_k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(\xi_k) - f(\eta_k) \right| \Delta x_k . \tag{8.33}$$

Так как $\xi_k, \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ и f (x) непрерывна на [a, b], то (это можно показать) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (общее для всех точек отрезка [a, b]), что из неравенства $|\xi_k - \eta_k| < \delta$ всегда следует неравенство

$$\left| f(\xi_k) - f(\eta_k) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.34}$$

Если $\lambda < \delta$ (т.е. все части, на которые разбит отрезок [a, b], имеют длины, меньшие δ), то подавно $|\xi_k - \eta_k| < \delta$, и, следовательно, выполняется (8.34). Тогда в силу соотношения (8.33) получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx\right| < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k =$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\left(\Delta x_0 + \Delta x_1 + ... + \Delta x_{n-1}\right) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

а это означает, по определению предела, что

$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0} I_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx} \qquad (8.35)$$

независимо от способа разбиения T и выбора точек ξ_k . Пометка «$\lambda \to 0$» под знаком предела означает, что стремится к нулю наибольшая из длин частичных отрезков, и в предельном переходе длины всех частичных отрезков стремятся к нулю (при этом обязательно число отрезков $n \to \infty$).

Итак, мы видим, что появляется возможность дать другое определение определенного интеграла, не ограниченное необходимостью знать первообразную для подынтегральной функции.

8.8.3. Понятие определенного интеграла по Риману

(Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866) – немецкий математик).

О п р е д е л е н и е. *Число I называется пределом интегральных сумм (8.31) при $\lambda\to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\lambda < \delta(\varepsilon)$ неравенство*

$$/I - I_n/ < \varepsilon$$

выполнено независимо от разбиения (для которого, однако $\lambda<\delta(\varepsilon)$) и от выбора точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Выше было показано, что если $f(x)$ непрерывна на [a, b], и существует первообразная $F(x)$ для $f(x)$, то величина

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

и есть предел интегральных сумм I_n при $\lambda \to 0$. Поэтому естественным является следующее новое определение определенного интеграла.

О п р е д е л е н и е (определение определенного интеграла по Риману). *Ограниченная на [a, b] функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на [a, b], если существует предел интегральных сумм для этой функции при $\lambda \to 0$. Этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке [a, b] и обозначается символом* $\int_a^b f(x)dx$.

8.8.4. Связь интеграла Римана с первообразной

Выше мы ввели определенный интеграл формулой Ньютона-Лейбница (8.2) и интеграл Римана как предел интегральных сумм, но в обоих случаях использовали одно обозначение $\int_a^b f(x)dx$. Нет ли здесь путаницы, т.е. не определяются ли здесь две разные величины, имеющие одно и то же обозначение?

Ответ дается теоремой, исключающей недоразумение.

Теорема 8.4. (основная теорема интегрального исчисления).

Пусть: 1) $f(x)$ определена [a, b] ; 2) существует первообразная $F(x)$ для $f(x)$ в (a, b); 3) $f(x)$ интегрируема по Риману на [a, b]. Тогда интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ *равен разности значений* *первообразной в точках x = a и x = b, т.е. имеет место формула Ньютона-Лейбница (8.2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T – любое разбиение отрезка [a, b] точками (8.30). Имеем

$F(b)–F(a)=F(x_n)–F(x_0)$=[прибавим и отнимем $F(x_k)$, k = $\overline{1, n-1}$] =

$=(F(x_n) – F(x_{n-1}))+(F(x_{n-1}) – F(x_{n-2})) + . . .+ (F(x_1) – F(x_0))$ = [применим к каждой разности теорему Лагранжа о конечных приращениях] =

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\eta_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)\Delta x_k \,, \qquad (*)$$

т.е. F(b) – F(a) есть значение некоторой интегральной суммы для любого разбиения отрезка [a, b]. По условию теоремы функция f (x) интегрируема на [a, b] по Риману; это означает, что существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$. На основании (*) этот предел равен F(b) – F(a), – теорема доказана.

Установленная теорема показывает, что в тех случаях, когда одновременно существуют определенные интегралы в смысле первого определения (по формуле (8.2) с помощью первообразных) и второго определения (по Риману), значения этих интегралов совпадают. Именно по этой причине для них используется общее обозначение.

Однако ни одно из этих определений не является более общим, чем другое, так как можно указать случаи, когда функция имеет первообразную, но не интегрируема по Риману, и, наоборот, случаи, когда f (x) интегрируема по Риману, но не имеет первообразной.

§8.9. Несобственные интегралы

До данного момента рассматривались определенные интегралы для случая конечного промежутка интегрирования (отрезка) $[a,\ b]$ и интегрируемой функции на нем. Расширим область применения определенного интеграла. Рассмотрим случаи:

а) промежуток интегрирования имеет один из видов: $[a,+\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty,+\infty)$;

б) на конечном промежутке $[a,\ b]$ функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный разрыв (разрыв второго рода).

Свойство 4 интегралов (см. п. 8.4) при соответствующем делении промежутка интегрирования на части позволяет свести случай а) к рассмотрению промежутков $[a,+\infty)$, $(-\infty, b]$ с *непрерывными* на них функциями, а для случая б) ограничиться рассмотрением функции с *единственным* разрывом, и притом в одном из концов промежутка.

8.9.1. Несобственные интегралы первого рода (НИ-1) (несобственные интегралы по бесконечному промежутку)

Так называются интегралы, обозначаемые символами

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\ , \qquad (8.36)$$

возникшие в результате обобщения понятия определенного интеграла на случай бесконечного промежутка. Иногда в символах (8.36) в качестве верхнего предела интегрирования пишут «∞» (вместо «$+\infty$»).

Для понимания существа дела (и для большинства практически важных случаев) достаточно ограничиться заданием на соответствующем промежутке непрерывной функции $f(x)$.

Введем обозначения $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$, понимая:

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\,, \qquad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)\,.$$

О п р е д е л е н и е. *Говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится (или существует), если выполняются два условия*:

1) *в рассматриваемом промежутке* $f(x)$ *обладает первообразной* (для непрерывной $f(x)$ это заведомо выполняется);

2) *значение* $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ *существует и конечно*.

При выполнении этих условий полагают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) \tag{8.37}$$

– обобщенная формула Ньютона-Лейбница.

Функцию $f(x)$ при этом называют интегрируемой в $[a, +\infty)$.

Если значение $F(+\infty)$ не существует или бесконечно, то несобственный интеграл *расходится* (или не существует).

Аналогичные определения можно дать для двух других несобственных интегралов из (8.36) (сформулируйте их самостоятельно).

Пример 12. Исследовать на сходимость НИ-1 $\int\limits_a^{+\infty} e^{-px}dx$ ($p>0$).

Р е ш е н и е . Интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-px}dx = -\frac{1}{p}\int\limits_a^{\infty} e^{-px}d(-px) = -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{pe^{px}}\right) - \left(\frac{-1}{pe^{pa}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}e^{-pa}$$ – конечное число; таким образом, данный несобственный интеграл сходится. #

Пример 13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x =$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, т.е. несобственный интеграл сходится. #

Пример 14. $\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-\infty}^{0} = -\cos 0 - \lim\limits_{x\to-\infty}(-\cos x)$ – предел не существует; несобственный интеграл расходится. #

Условие сходимости НИ-1 на $[a,+\infty)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 8.5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна для $x \ge a$. Для интегрируемости этой функции на промежутке $[a,+\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$\lim_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)dx \quad (B \ge a) \tag{8.38}$$

При этом

$$\boxed{\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)dx}. \tag{8.39}$$

Н е о б х о д и м о с т ь . Пусть $f(x)$ интегрируема в $[a,+\infty)$ и $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty}(F(B)-F(a)) = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)dx, \tag{8.40}$$

т.е. существует конечный предел (8.38) и справедливо (8.39).

Д о с т а т о ч н о с т ь . Пусть существует конечный предел (8.38). Тогда, прочитав цепочку равенство (8.40) в обратном порядке придем к интегрируемости функции в $[a,+\infty)$ и справедливости (8.39). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1 . Теорема, аналогичная доказанной, справедлива и для промежутка $(-\infty, b]$ и при этом

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{b} f(x)dx} \tag{8.41}$$

и для промежутка $(-\infty,+\infty)$, тогда

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} f(x)dx}. \qquad (8.42)$$

З а м е ч а н и е 2 . Если в формуле (8.42) предел не существует, полезным иногда оказывается рассмотреть предел, если величины А и В стремятся к бесконечности, оставаясь равными (образно говоря, стремятся к бесконечности по одному закону). И если в этом случае предел существует, его называют *главным значением* интеграла:

$$\boxed{\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx}. \qquad .$$

Пример 15. Интеграл в смысле главного значения

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-A}^{A} \right) = 0,$$

но $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to+\infty}}\left(\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-A}^{B} \right)$ – расходится.

Пример 16. Исследовать поведение интеграла $I(p) = \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) в зависимости от параметра p.

Р е ш е н и е . Пусть $p \neq 1$.

Тогда

$$\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = -\lim_{B\to\infty} \frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_{a}^{B} = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(B^{1-p} - a^{1-p}\right).$$

Если $p > 1$, то $\lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{a}^{B} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$ и (в силу (8.39)) интеграл

$I(p)=\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится. Если же $p<1$, то $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B}\frac{dx}{x^p}=\infty$ – интеграл расходится.

Пусть $p = 1$. Тогда $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{B\to+\infty}\left(\ln B-\ln a\right)$ – интеграл расходится.

Таким образом,

$$I(p)=\int\limits_{a>0}^{\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}\text{сходится, если } p>1;\\ \text{расходится, если } p\le 1.\end{cases}\qquad\#$$

Часто *сходящиеся* несобственные интегралы можно вычислить только с помощью приближенных методов, либо применение формулы (8.37) для них сопряжено с громоздкими выкладками при отыскании первообразной. В таких случаях до начала вычислений необходимо убедиться, что данный несобственный интеграл сходится. Для этой цели служат теоремы сравнения, одну из которых приведем здесь.

Теорема 8.6. *Пусть функции* $f(x)$ и $g(x)$ *непрерывны для* $x\ge a$ и *удовлетворяют условиям* $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, *причем* $g(x)\ne 0$ *для достаточно больших x. Если при этом существует конечный предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K\quad(0<K<\infty), \tag{8.43}$$

то интегралы $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx$ *либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся* (доказательство опустим).

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место для промежутка $(-\infty, b]$.

Замечание 2. Обычно подынтегральная функция сравнивается с функцией $y=\frac{1}{x^p}$ (см. пример 16).

Пример 17. Исследовать поведение интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x-\ln x}$.

Р е ш е н и е . Формула (8.37) неприменима, ибо не знаем первообразную для $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$. Возьмем $g(x)=\frac{1}{x^p}$ и подберем p так, чтобы выполнялось условие (8.43):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(1-\ln x/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}}{1-(\ln x/x)}=$$

$=$ [пусть $p=1$] $=\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$ = [применив правило Лопиталя-Бернулли, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$] $=1=K$ $(0<1<\infty)$.

Итак, $g(x)=\frac{1}{x}$. Так как $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 16), то по теореме 8.6 данный несобственный интеграл тоже расходится.

Пример 18. Исследовать поведение интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Р е ш е н и е . $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$; возьмем $g(x)=\frac{1}{x^p}$ и потребуем выполнения (8.43):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-2}}{\sqrt{1+1/x^2}}=[\text{ пусть } p=2]=1=K$$

$(0<1<\infty)$. Так как $\int\limits_1^{\infty}g(x)dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 16), то по теореме 8.6 данный несобственный интеграл тоже сходится и имеет смысл вычислять его приближенно или с помощью формулы (8.37) (если найдем первообразную).

8.9.2. Несобственные интегралы второго рода (НИ-2) (несобственные интегралы от неограниченных функций)

1^0. Рассмотрим теперь другой тип несобственных интегралов – случай, когда $f(x)$ неограничена на отрезке $[a,\ b]$ интегрирования.

О п р е д е л е н и е**.** *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) *неограничена на* $[a,\ b]$, 2) *ограничена на любом отрезке* $[a,\ b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ *и неограничена на любом отрезке* $[b-\varepsilon,\ b]$ *слева от точки* b (*в этом случае точка* $x=b$ *называется особой точкой*), 3) *интегрируема на* $[a,\ b-\varepsilon]$. *Тогда предел* $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ *при* $\varepsilon\to 0$ (*конечный или бесконечный*) *называют несобственным интегралом функции* $f(x)$ *от a до b – несобственным интегралом второго рода – и обозначают*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}. \tag{8.44}$$

Если предел конечен, то интеграл (8.44) называется *сходящимся*, а неограниченная на $[a,\ b]$ функция $f(x)$ – *интегрируемой* на $[a,\ b]$; в противном случае это *расходящийся* интеграл.

Пример 19. Исследовать $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Р е ш е н и е . Так как

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty,$$

то $x=1$ – особая точка, причем $(x=1)\in[0;\ 1]$. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ конечна и интегрируема на $[0;\ 1-\varepsilon]$: $\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ = [см. 10^0 из таблицы 7.1] $= \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon)$. Тогда по формуле (8.44)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \pi/2,$$

т.е. данный НИ-2 сходится. #

Пусть теперь заданная на $[a, b]$ функция $f(x)$ неограниченна на любом отрезке $[a, a+\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b - a)$ справа от точки a (a – особая точка), но ограничена и интегрируема на $[a+\varepsilon, b]$, тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ от a до b определяется равенством

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx}. \qquad (8.45)$$

В общем случае в промежутке $[a, b]$ может быть конечное число особых точек $c_1, \ldots, c_m$, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченна. Пусть особой точкой является точка c: $a < c < b$. Тогда по определению

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}. \qquad (8.46)$$

или

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx}. \qquad (8.47)$$

Здесь ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Если интеграл (8.47) расходится, но при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to 0$ сходится, то его называют главным значением несобственного интеграла и обозначают символом V.p. $\int_a^b f(x)dx$; таким образом

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right). \qquad (8.48)$$

Пример 20. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ = [особые точки функции $1/\sqrt{1-x^2}$ есть $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, причем $(x_1 = -1) \in [-1;\ 0]$; применим формулу (8.45)]$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} = -\arcsin(-1) =$ $=\pi/2$ – НИ–2 сходится.

Пример 21. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ = [особые точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ принадлежат отрезку $[a, b]$; произвольной точкой, например, $x = 0$ разобъем отрезок $[-1;\ 1]$ на два и применим свойство 4 определенного интеграла] $= \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ = [см. примеры 19 и 20] $= \pi/2 + \pi/2 = \pi$ – НИ–2 сходится.

Пример 22. Пусть $f(x) = 1/(x-c)$, $c \in (a, b)$.

$$\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b}\frac{dx}{x-c} = [\text{см. } (7.18)] = \ln|x-c|\Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \ln|x-c|\Big|_{c+\varepsilon_2}^{b} =$$

$$= \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (8.49)$$

Предел этой суммы при независимом стремлении к нулю ε_1 и ε_2 не существует. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Тогда предел выражения (8.49) при $\varepsilon \to 0$ есть главное значение рассматриваемого интеграла и в силу (8.48)

$$\text{V.p.}\int_a^b \frac{dx}{x\text{-}c} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right) = \ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad \#$$

Пример 23. Рассмотрим интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(b > a,\ \alpha > 0)$. Точка a – особая точка. При $\alpha \neq 1$ интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right];$$

при $\alpha = 1$ интеграл

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \ln(b-a) - \ln\varepsilon,$$

и предел при $\varepsilon \to 0$ существует лишь при $0 < \alpha < 1$. Поэтому

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha} \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1, \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{8.50}$$

2^0. Применение формулы Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ неограничена на $[a, b]$ и точка b – особая точка для нее, и пусть для $f(x)$ существует *непрерывная* на $[a, b]$ первообразная $F(x)$, тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a) = F(b) - F(a).$$

Таким образом, в случае существования непрерывной на $[a, b]$ первообразной $F(x)$ для неограниченной на $[a, b]$ функции понятие НИ-2 ничем не отличается от понятия интеграла от ограниченной функции и

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad . \tag{8.51}$$

З а м е ч а н и е 3 . Формула (8.51) справедлива, если особая точка подынтегральной функции совпадает с другим концом отрезка $[a, b]$ или лежит внутри промежутка, лишь бы первообразная для этой функции была непрерывна на всем промежутке интегрирования.

В примерах 19-21 первообразная для функции $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ есть $\arcsin x$, непрерывная на $[-1, 1]$, поэтому по формуле (8.51) имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi/2 + \pi/2 = \pi \ .$$

Пример 24. $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ =[x=0 – особая точка функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, но первообразная $F(x) = 3\sqrt[3]{x^2}/2$ непрерывна для любого x из промежутка [–1; 8], поэтому имеет место формула (8.51)] =

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2} \ . \qquad \#$$

3⁰. Для НИ-2 имеют место теоремы, аналогичные теоремам 8.5 и 8.6 для НИ-1. Приведем их здесь, опуская доказательства.

Теорема 8.7. *Пусть для неограниченной на* $[a, b]$ *функции точка* b *– особая точка. Для интегрируемости этой функции необходимо и достаточно, чтобы существовал предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Теорема 8.8. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$ *и точка* b *–*

особая точка для обеих функций, причем $g(x) \neq 0$ *в некоторой окрестности точки* b . *Если при этом существует конечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 < k < \infty) \qquad (8.52)$$

то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.*

З а м е ч а н и е 4. Аналогичные теоремы имеют место, если особая точка на другом конце или внутри промежутка.

З а м е ч а н и е 5. Обычно подынтегральная функция сравнивается с функцией $1/(x - b)^{\alpha}$ (см. (8.50)).

Пример 25.Исследовать поведение интеграла $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - \sin x}$.

Р е ш е н и е . $x = 0$ – особая точка функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sin x}$.

Первообразная на классе элементарных функций не существует (то есть не существует ни одной элементарной функции, производная которой равняется $f(x)$).

Рассмотрим функцию $g(x) = 1/x^{\alpha}$, для которой $x = 0$ – особая точка, и подберем α так, чтобы выполнялось условие (8.52): $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x} - \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ = [применим правило Лопиталя]=

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^{\alpha})'}{\left(\sqrt{x} - \sin x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x^{\alpha - 1}}{1/(2\sqrt{x}) - \cos x} = [\text{пусть } \alpha = 1/2] = 1.$$

Итак, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\int\limits_0^1 g(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ – сходится (см. (8.50)), следовательно, интеграл I тоже сходится по теореме 8.8. #

Пример 26. Исследовать $I=\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\ln x}$.

Р е ш е н и е . Точка $x = 1$ – особая точка функции $f(x)=1/\ln x$. Первообразная на классе элементарных функций не существует.

Пусть $g(x) = 1/(x - 1)$ с особой точкой $x = 1$; тогда

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1+0}x=1,$$

интеграл $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x-1}$ расходится (см. (8.50)), поэтому по теореме 8.8 данный интеграл I тоже расходится. #

§8.10. Некоторые применения определенного интеграла

Рассмотрим здесь приложение определенного интеграла к вычислению дуги кривой, площади плоской фигуры, объема тела вращения. При этом не даем определение понятия площади произвольной поверхности, объема тела, необходимых и достаточных условий существования таковых понятий – все это можно найти в подробных курсах математического анализа.

Правильнее было бы говорить не о приложении определенного интеграла к вышеперечисленным задачам, а о том, что эти и им подобные задачи *привели* к понятию определенного интеграла, к необходимости разработки его теории, что, в свою очередь, способствовало развитию других разделов математического анализа.

8.10.1. Вычисление площади плоской фигуры

1^0. Площадь в прямоугольных координатах. Ранее для площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x) \geq 0$ (см. рис.8.1) мы установили формулу (8.7):

$$s = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Пусть теперь фигура ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_0(x)$ и $y = Y(x)$, причем $0 \leq y_0(x) \leq Y(x)$ для всякого $x \in [a, b]$ (рис. 8.7). Площадь s фигуры $ABCD$ есть разность площадей криволинейных трапеций $LBCM$ и $LADM$, а потому в силу формулы (8.7) имеем

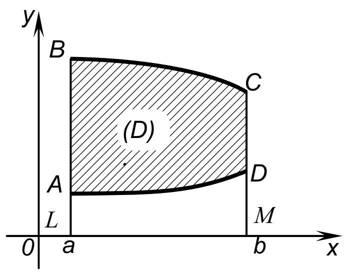


Рис. 8.7

$$s = s_{LBCM} - s_{LADM} = \int_a^b Y(x)dx - \int_a^b y_0(x)dx = \int_a^b [Y(x) - y_0(x)]dx \,. \tag{8.53}$$

З а м е ч а н и е 1 . Формула (8.53) имеет место и в том случае, когда функции $y_0(x)$ и $Y(x)$ ($y_0(x) \leq Y(x)$) принимают на $[a, b]$ значения любых знаков.

Действительно, в силу ограниченности функций существует постоянная C такая, что функции $\tilde{y}_0(x) = y_0(x) + C$ и $\tilde{Y}(x) = Y(x) + C$ уже неотрицательны для всякого $x \in [a, b]$. Геометрически это соответствует «опусканию» оси Ox вниз на «расстояние» $C > 0$, что не изменяет ни области, ни величины ее площади. Но тогда

$$s=\int_a^b\left[\widetilde{Y}(x)-\widetilde{y}_0(x)\right]dx=\int_a^b\left[\left(Y(x)+C\right)-\left(y_0(x)+C\right)\right]dx=\int_a^b\left[Y(x)-y_0(x)\right]dx.$$

З а м е ч а н и е 2. Можно поменять роли переменных x и y и рассмотреть фигуру, ограниченную линиями $y = c$, $y = d$, $x = x_0(y)$ и $x = X(y)$ (рис. 8.8). Тогда площадь этой фигуры

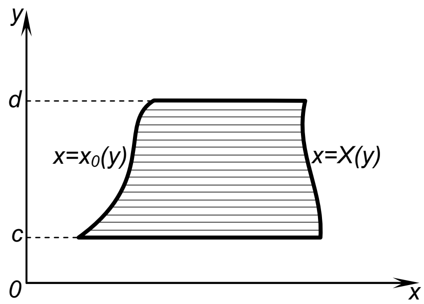


Рис. 8.8

$$\boxed{s=\int_c^d\left[X(y)-x_0(y)\right]dy}. \tag{8.54}$$

Пример 27. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2-2x+2$ и $y = -x^2 + 4x + 2$.

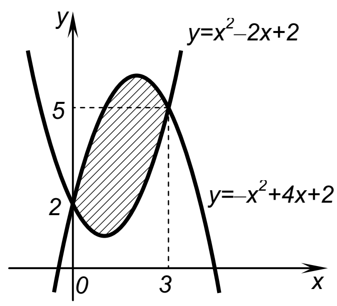


Рис. 8.9

Р е ш е н и е . Фигура изображена на рис.8.9. Абсциссы точек пересечения кривых найдены из уравнения $x^2 - 2x + 2 = - x^2 + 4x + 2$; решая его, получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. По формуле (8.53) площадь

$$s=\int_0^3\left[\left(-x^2+4x+2\right)-\left(x^2-2x+2\right)\right]dx=2\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=$$

$$=2\left(\left(3x^2/2\right)-\left(x^3/3\right)\right)\Big|_0^3=9. \quad \#$$

Пример 28. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-1$ и $y^2=x+1$.

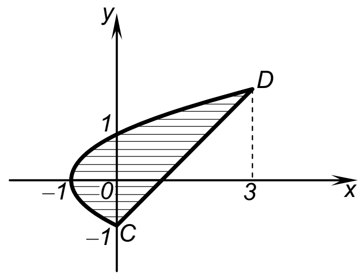


Рис. 8.10

Решение. Найдем координаты точек пересечения линий. Решая уравнение $(x-1)^2=x+1$, находим $x_1=0$ и $x_2=3$. Тогда точками пересечения параболы и прямой будут $C(0;-1)$ и $D\ (3;2)$ и фигура примет вид, изображенный на рис.8.10. Здесь удобнее воспользоваться формулой (8.54):

$$s=\int_{-1}^{2}\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left[(y+1)-(y^2-1)\right]dx=\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)dy$$

$$=$$

$$=\ 2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=\left(4+2-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\ . \qquad \#$$

2^0. Площадь в полярных координатах: Будем называть *криволинейным сектором* фигуру в полярной системе координат, ограниченную полупрямыми (лучами) $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\ \beta-\alpha<2\pi)$ и графиком непрерывной функции $\rho=\rho\ (\varphi)$, $\varphi\in\ [\alpha,\beta]$, где ρ, φ – полярные координаты (рис. 8.11).

Найдем площадь криволинейного сектора *OAB*.

Разбивая фигуру лучами

$$\varphi = \varphi_i \quad (\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta)$$

на n частей, представим площадь s криволинейного сектора как предел при $\lambda \to 0$ $\left(\lambda = \sup\limits_i \{\Delta\varphi_i\} = \sup\limits_i \{\varphi_i - \varphi_{i-1}\}\right)$ суммы площадей круговых секторов, ограниченных лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дугой окружности радиуса $\rho = \rho(\tilde{\varphi}_i)$, где $\tilde{\varphi}_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = \overline{1,n}$. Так как

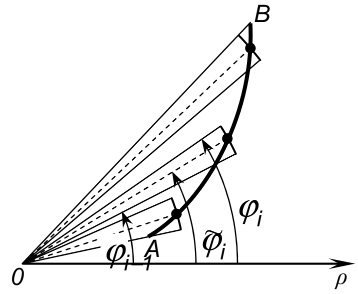


Рис. 8.11

площадь такого кругового сектора есть величина, равная $\frac{1}{2}\rho^2(\tilde{\varphi}_i)\Delta\varphi_i$, то

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\tilde{\varphi}_i)\Delta\varphi_i \quad . \tag{8.55}$$

В формуле (8.55) мы узнаем предел интегральной суммы для функции $\rho^2(\tilde{\varphi}_i)/2$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и в силу непрерывности функции этот предел существует и равен (см. (8.35))

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi}. \tag{8.56}$$

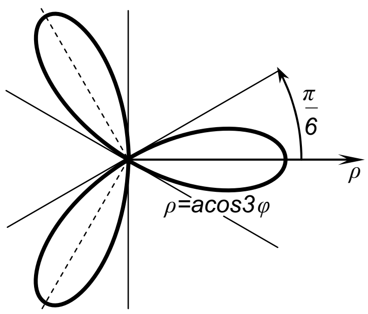


Рис. 8.12

Пример 29. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\cos 3\varphi$ $(a > 0)$.

Р е ш е н и е. Для построения чертежа этой фигуры и вычисления площади, необходимо найти область определения функции $\rho = a\cos 3\varphi$ из условия $\rho \geq 0$ или $\cos 3\varphi \geq 0$, откуда находим $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\varphi \in [-\pi/6, \pi/6] \cup [\pi/2, 5\pi/6] \cup [7\pi/6, 3\pi/2]$, – фигура состоит, таким образом, из трех равновеликих секторов (рис.8.12). С учетом области определения по формуле (8.56)

$$\frac{1}{6}s = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2\cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\int_0^{\pi/6} d\varphi + \int_0^{\pi/6}\cos 6\varphi\frac{d6\varphi}{6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Тогда $s = 6\cdot\frac{\pi a^2}{24} = \frac{\pi a^2}{4}$. #

8.10.2. Вычисление объема тела вращения

Вычислим объем v тела, образованного вращением непрерывной кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox и ограниченного плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) (рис. 8.13).

Плоскостями $x = x_i$ ($a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots x_n = b$) разобьем тело на n частей и каждую часть заменим цилиндром, имеющим радиус основания $f(\tilde{x}_i)$, где $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, и «высоту» $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$; объем такого цилиндра равен $\pi f^2(\tilde{x}_i)\Delta x_i$.

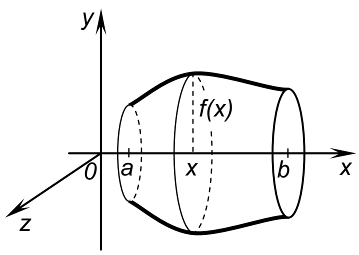


Рис. 8.13

Определим объем тела вращения как предел суммы объемов этих «элементарных» цилиндров при $\lambda \to 0$, имеем $\left(\lambda = \sup_i\{\Delta x_i\}\right)$

$$v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\tilde{x}_i)\Delta x_i \quad . \qquad (8.57)$$

В формулу (8.57) входит предел интегральной суммы для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для непрерывной функции $f(x)$ этот предел существует и равен (см. (8.35)) $\int_a^b \pi f^2(x)dx$; поэтому объем тела вращения, указанного на рис.8.13, равен

$$\boxed{v = \pi \int_a^b f^2(x)dx}. \qquad (8.58)$$

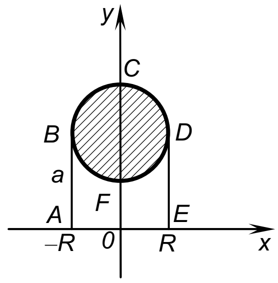


Рис. 8.14

Пример 30. Круг, ограниченный окружностью $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ $(R < b)$ (рис.8.14), вращается вокруг оси Ox. Найти объем полученного тела вращения.

Решение. Из уравнения окружности имеем $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда объем тела вращения – тора – можно представить как разность объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

$$ABCDE = \left\{(x, y): -R \le x \le R,\ 0 \le y \le b + \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

и

$$ABFDE = \left\{(x, y): -R \le x \le R,\ 0 \le y \le b - \sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$

Полагая $y_1 = b - \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y_2 = b + \sqrt{R^2 - x^2}$, по формуле (8.58) получим

$$v = \pi \int_{-R}^{R} y_2^2(x)dx - \pi \int_{-R}^{R} y_1^2(x)dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = 4\pi b \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

=[в силу четности подынтегральной функции применим формулу (8.26): $\int\limits_{-R}^{R} = 2\int\limits_{0}^{R}$]= $8\pi b\int\limits_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$ = [см. пример 15 в главе 7] =

$$= 8\pi b\frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2}\,R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi bR^2\ . \qquad \#$$

8.10.3. Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая AB задана явным уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция (рис.8.15). Основным понятием в теории кривых является понятие длины дуги (отрезка) кривой

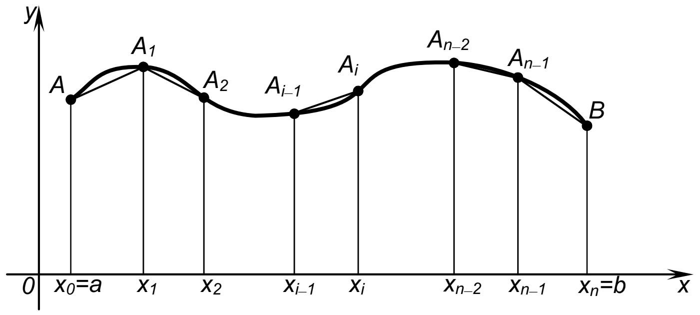


Рис. 8.15

AB. Введем это понятие.

Разобьем кривую AB на n частей точками ($A = A_0, A_1,\ldots, A_{i-1}$, $A_i ,\ldots, A_n = B$) (равенства $A = A_0$ и $A_n = B$ означают, что точки совпадают). Соединив точки A_{i-1} и A_i при $i=\overline{1,n}$ отрезками прямых, получим ломаную, которую будем называть *вписанной в кривую AB*. Обозначим длину ломаной l_n , длину i-го звена $A_{i-1} A_i$ – через Δl_i и $\lambda = \sup\limits_i\{\Delta l_i\}$.

О п р е д е л е н и е**.** *Если существует предел l длины ломаной l_n:*

$$l=\lim_{\lambda\to 0} l_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\ ,$$

то он называется длиной дуги AB, а кривая AB называется спрямляемой.

а) Получим формулу для вычисления длины дуги AB:

$$y=f(x),\ \ x\in[a,b]$$

в случае, если $f(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$. В этом случае точки A_i разбиения кривой на части имеют координаты $(x_i, f(x_i))$, длина i -го звена (расстояние между точками A_{i-1} $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и A_i $(x_i, f(x_i))$ есть

$$\Delta l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{x-1}))^2}\ \ .$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ \text{где}\ \xi_i\in[x_{i-1}, x_i].$$

Следовательно, $\Delta l_i=\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и длина ломаной

$$l_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\ . \tag{8.59}$$

Выражение справа в (8.59) есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на отрезке $[a, b]$ и при $\lambda\to 0$.

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx}\ . \tag{8.60}$$

б) Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно-дифференцируемые на $[\alpha,\beta]$] функ–ции, $\varphi'(t)>0$ (условие $\varphi'(t)>0$ обеспечивает возрастание x при изменении t от α до β).

В интеграле (8.60) проведем замену переменной, положив $x=\varphi(t)$; тогда

$$dx=\varphi'_t(t)\, dt,\ f'(x)=y'_x=\psi'_t(t)/\varphi'_t(t),\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$$

и для длины дуги в этом случае имеем формулу

$$\boxed{l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi_t'^2(t)+\psi_t'^2(t)}dt}. \qquad (8.61)$$

З а м е ч а н и е 3 . Формула (8.61) справедлива и для $\varphi'(t)<0$ на $[\alpha,\beta]$, и в случае, когда $\varphi'(t)$ не сохраняет знак на $[\alpha,\beta]$.

в) Пусть кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$. В предположении, что $\rho(\varphi)$ – непрерывно-дифференцируемая на $[\varphi_1,\varphi_2]$ функция, перейдем к параметрическому представлению кривой, используя связь полярных и декартовых координат ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$):

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

тогда φ – параметр этой кривой. После подстановки производных

$$x'_\varphi=\rho'_\varphi\cos\varphi-\rho\sin\varphi,\ y'_\varphi=\rho'_\varphi\sin\varphi+\rho\cos\varphi$$

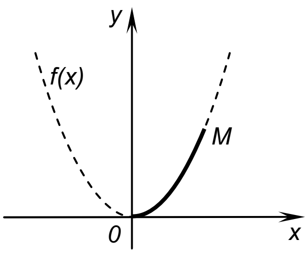


Рис. 8.16

в формулу (8.61) и преобразования получим

$$\boxed{l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho_\varphi'^2(\varphi)}d\varphi}. \qquad (8.62)$$

Пример 31. Найти длину отрезка параболы $y=x^2/2p$ ($p>0$) от точки $O(0;0)$ до точки $M(a, a^2/2p)$ (рис.8.16).

Р е ш е н и е . Так как $y'=x/p$, то по формуле (8.60) имеем

$$l=\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{x^2+p^2}\,dx\,. \qquad (8.63)$$

Интегрируя по частям, найдем интеграл $I=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx$ $=$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=\sqrt{x^2+p^2} & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+p^2}} \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]=uv-\int vdu=x\sqrt{x^2+p^2}\,-$$

$-\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$ =[под интегралом в числителе прибавим и отнимем

p^2]$=x\sqrt{x^2+p^2}-\int\dfrac{(x^2+p^2)-p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}dx=x\sqrt{x^2+p^2}-\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx$

$+p^2\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$ =[см.таб.7.1]$=x\sqrt{x^2+p^2}-I+p^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)$.

Итак, для интеграла I имеем уравнение

$$I=x\sqrt{x^2+p^2}-I+p^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right),$$

откуда

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+p^2}+p^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)\right). \qquad (8.64)$$

Подставив (8.64) в (8.63), найдем

$$l=\frac{1}{2p}\left(x\sqrt{x^2+p^2}+p^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{a}{2p}\sqrt{a^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}\quad. \qquad \#$$

Пример 32. Найти длину части астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ от точки $A(a;\,0)$ до точки $B(0;a)$ $(a>0)$ (рис.8.17).

Р е ш е н и е . Точкам A и B астроиды соответствуют значения параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/2$; производные

$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$. (8.65)

По формуле (8.61) $l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$ = [подставляем (8.65) и преобразуем] = $= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}\, dt = 3a \int\limits_0^{\pi/2} |\sin t \cos t|\, dt$ = = [так как $\sin t \geq 0$ и $\cos t \geq 0$ для любого $t \in [0; \pi/2]$, то знак модуля можно опустить] =

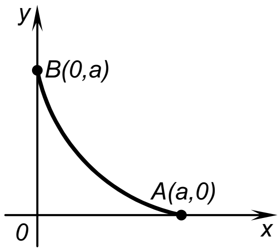


Рис. 8.17

$$= 3a \int\limits_0^{\pi/2} \sin t d \sin t = \frac{3a}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} a \ . \qquad \#$$

Пример 33. Найти длину кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$, $\varphi \in [-\pi;\pi]$ (кривую построить самостоятельно).

Р е ш е н и е . По формуле (8.62)

$$l = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \Big| \rho^2 + \rho'^2 = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2(1-\cos\varphi) =$$

$$= 4\sin^2(\varphi/2) \Big| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\sin^2(\varphi/2)}\, d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2|\sin(\varphi/2)|\, d\varphi$$ = [в силу четности подынтегральной функции используем (8.26): $\int\limits_{-\pi}^{\pi} = 2\int\limits_0^{\pi}$] =

$$= 2\int\limits_0^{\pi} \sin(\varphi/2)\, d\varphi = -4\cos(\varphi/2)\Big|_0^{\pi} = -4(0-1) = 4 \ . \qquad \#$$

Другие приложения определенного интеграла к задачам геометрии и физики можно найти в учебниках по математическому анализу.

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Дайте первое определение определенного интеграла и приведите формулу Ньютона–Лейбница.

2. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

3. Приведите основные свойства определенного интеграла и докажите их: а) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла; б) интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых; в) изменение порядка интегрирования в определенном интеграле; г) определенный интеграл по отрезку, разбитому на части: д) определенный интеграл от неотрицательной на $[a,b]$ $(a<b)$ функции; е) оценка определенного интеграла.

4. Докажите теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции. В чем ее геометрический смысл?

5. Выведите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

6. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в определенном интеграле.

7. Как можно вычислить определенный интеграл от четных и нечетных функций по симметричному относительно начала координат отрезку интегрирования?

8. Дайте определение определенного интеграла как предела интегральной суммы (определение по Риману).

9. Для каких функций существует определенный интеграл?

10. Как обобщается понятие определенного интеграла? Приведите определение несобственного интеграла первого рода (НИ – 1, интеграла, у которого один или оба предела интегрирования бесконечны). Определите понятия сходимости и расходимости НИ–1.

11. Как формулируется теорема сравнения (в предельной форме) для несобственных интегралов первого рода?

12. Дайте определение несобственного интеграла второго рода (НИ – 2, интеграла от неограниченной функции). Как определяются понятия сходимости и расходимости НИ–2?

13. Сформулируйте теорему сравнения в предельной форме для несобственного интеграла второго рода.

14. Приведите формулу для вычисления площади плоской фигуры в прямоугольных декартовых координатах.

15. Выведите формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат.

16. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения.

17. Получите формулы для вычисления длины кривой, заданной а) в явной форме в декартовой прямоугольной системе координат; б) в параметрической форме; в) в полярной системе координат.

ГЛАВА 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Введение

Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении и его решении

1^0. Постановка задачи. Математическое описание процессов (физических явлений), происходящих в природе, нахождение законов, связывающих величины, характеризующие физическое явление, приводит часто к уравнениям, содержащим независимую переменную, неизвестную (искомую) функцию этой переменной и производные (или дифференциалы) функции независимой переменной.

Такого рода уравнения называются дифференциальными уравнениями. Если уравнение содержит неизвестную функцию одного независимого переменного, то оно называется *обыкновенным* дифференциальным уравнением. Если уравнение содержит неизвестную функцию нескольких переменных, оно называется *уравнением с частными производными*.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений принято считать нахождение всех решений данного уравнения и изучение свойств этих решений. Процесс отыскания решения называется интегрированием дифференциального уравнения, даже если решение будет найдено без интегрирования функций. Кроме того, интегрирование уравнения считается законченным, если оно сведено к интегрированию функций (принято говорить, к квадратурам), независимо от того, выражаются или нет в конечном виде те интегралы, к которым сведено решение исходного дифференциального уравнения. Здесь, как и всюду в математике, решение более сложного вопроса считается оконченным, когда оно приведено к решению менее сложного, для которого имеются свои специфические методы.

З а м е ч а н и е. Применение слова «интегрирование» в смысле процесса решения дифференциальных уравнений объясняется тем, что этот процесс является, в известном смысле, обобщением обычного интегрирования функций: например, $y' = f(x)$ можно рассматривать как основную задачу неопределенного интегрирования – восстановление функции по её производной, либо как простейшее дифференциальное уравнение – определить функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению.

Приведем примеры составления дифференциальных уравнений.

Пример I. Экспериментально установлено, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна наличному количеству его.

Найти закон распада, позволяющий определить в любой момент времени t количество нераспавшегося вещества; отсчет времени производится от некоторого начального t_0, в котором имелось Q_0 единиц вещества.

Р е ш е н и е**.** Пусть в произвольный момент времени t количество вещества равно Q, dQ/dt – скорость его распада; по условию

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ, \tag{9.1}$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Знак минус поставлен потому, что количество Q есть убывающая функция. Уравнение (9.1) – обыкновенное дифференциальное уравнение. #

Продемонстрируем «универсальность» дифференциального уравнения, используя уравнение (9.1). Пусть имеется некоторое количество, выражаемое величиной y, которая с течением времени изменяется – возрастает или убывает. Пусть скорость возрастания (убывания) этого количества пропорциональна наличному количеству; в таком случае для скорости $\dfrac{dy}{dt}$ имеет место закон вида

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky,\ k > 0\ (k < 0)} \text{ или } \boxed{y' = ky}$$

Это дифференциальное уравнение описывает, например, следующие процессы:

а) закон радиоактивного распада, $k < 0$; б) скорость роста капитала y, на который непрерывно начисляются проценты, $k > 0$; в) охлаждение тела в некоторой среде, $y(t)$ – разность температур тела и среды, $k < 0$; г) уравнение выражает в дифференциальной форме зависимость атмосферного давления от высоты (так называемая барометрическая формула высот), y – давление газа, $k < 0$; д) ход химических реакций, так называемые унимолекулярные реакции; е) явление, происходящее при замыкании и размыкании цепи постоянного электрического тока, y – величина, зависящая от силы тока, ЭДС и сопротивления; ж) поглощение света при прохождении его через воду, y – световой поток, t – глубина, $k < 0$; з) поток научной информации, y – количество публикаций, $k > 0$. Примеры можно было бы продолжить.

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно, притягиваемая к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию от точки до этого центра. Найти закон движения точки по прямой.

Р е ш е н и е**.** Примем точку O за начало координат, прямую – за ось Ox (рис. 9.1).

Пусть в момент времени t положение точки на оси определя-

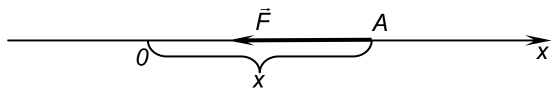


Рис. 9.1

ется координатой x и $x>0$ – для определенности. По условию на точку действует (единственная) сила $\vec{F}$ притяжения её к центру O, модуль которой $|\vec{F}| = kx$, $k>0$ – коэффициент пропорциональности. Из второго закона Ньютона в проекции на ось Ox найдем (m – масса точки)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Обозначив $\dfrac{k}{m} = \omega^2$, перепишем это уравнение в виде

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \qquad (9.2)$$

– движение материальной точки по прямой описывается дифференциальным уравнением. #

2⁰. Общие понятия и определения. Выше было сказано, что обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение (уравнение) вида

$$\boxed{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0} \qquad (9.3)$$

или

$$\boxed{F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0}$$

между независимой переменной x, искомой функцией y и её производными $y', y'', ..., y^{(n)}$ (хотя бы одна производная должна входить в уравнение (9.3)). Соотношение (9.3) называется дифференциальным уравнением общего вида.

Определение. *Дифференциальное уравнение называется уравнением n-го порядка, если порядок наивысшей входящей в него производной от искомой функции есть n.*

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной от искомой функции

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),} \qquad (9.4)$$

называется дифференциальным уравнением n-го *порядка в нормальной форме*.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* (9.3) *(или* (9.4)*) в некотором конечном или бесконечном интервале* (a, b) *изменения независимого переменного x называется функция* $y = \varphi(x)$*, определенная и непрерывно дифференцируе-*

мая (*вплоть до порядка n*) *в этом интервале и обращающая уравнение* (9.3) *(или* (9.4)*) в тождество, справедливое* $\forall x \in (a, b)$.

З а м е ч а н и е. В соотношениях (9.3), (9.4) F и f считаем однозначными непрерывными функциями всех своих аргументов.

Например, требование непрерывности функции f в уравнении $y' = f(x)$ существенно, ибо если допустить, например, что f имеет разрыв первого рода в точке x_0, то это уравнение не имеет решений.

З а м е ч а н и е. Вместо термина "решение" пользуются выражением "интеграл дифференциального уравнения": во-первых, потому, что сама задача является обобщением задачи интегрирования функций, во-вторых, потому, что решение нередко находят путем интегрирования функций (т.е. путем квадратур).

Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение дифференциального уравнения.

О п р е д е л е н и е. *Кривая, определяемая уравнением* $y = \varphi(x)$*, называется интегральной кривой дифференциального уравнения.*

Пример 3. Проверка показывает, что функция $Q = Ce^{-kt}$ обращает уравнение (9.1) в тождество по $t \in [t_0, +\infty)$ и, следовательно, по определению, она является решением этого уравнения. Входящую в неё величину C можно уточнить следующим образом.

Так как в момент t_0 имелось Q_0 единиц вещества (см. пример 1), то, подставляя в функцию $Q = Ce^{-kt}$ значения t_0 и Q_0, получим $Q_0 = Ce^{-kt_0}$ или $C = Q_0 e^{kt_0}$ и, таким образом, функция $Q = Q_0 e^{-k(t-t_0)}$.

Точно так же подстановкой можно убедиться, что функции $x = \sin \omega t$ и $x = \cos \omega t$ удовлетворяют уравнению (9.2), т.е. являются его решениями. Более того, любая функция вида

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{9.5}$$

где C_1 и C_2 – некоторые произвольные постоянные, также является решением. #

Зависимость решения дифференциального уравнения от произвольных постоянных параметров говорит о том, что ему удовлетворяет произвольное множество решений. Ниже будет показано, что это не случайно.

3^0. Общее решение, общий интеграл. В теории дифференциальных уравнений n-го порядка принято называть общим интегралом любое соотношение, содержащее x, y и n произвольных постоянных $C_1,\ldots,C_n$

$$\boxed{\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0}\ , \qquad (9.6)$$

если оно получено интегрированием уравнения (9.3), независимо от того, выражается или нет в явном виде искомая функция y из этого соотношения.

Доказывается, что дифференциальное уравнение допускает не одно, а произвольное множество решений, зависящее от некоторых произвольных постоянных. Введем определения.

О п р е д е л е н и е. *Общим решением* (*общим или полным интегралом*) *дифференциального уравнения n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных соотношение* (9.6)*, содержащее все его решения.*

О п р е д е л е н и е. *Частным решением* (*частным интегралом*) *дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего, в котором произвольным постоянным приданы некоторые конкретные числовые значения.*

Заметим также, что иногда под общим интегралом понимают зависимость

$$\boxed{\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0}\ ,$$

а под общим решением – выражение, разрешенное относительно искомой функции:

$$\boxed{y = \varphi(x, y, C_1, ..., C_n).}$$

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Как оно записывается в общем виде? Какой вид имеет дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме?

2. Что считают основной задачей теории дифференциальных уравнений? Как называется процесс отыскания решений дифференциального уравнения?

3. Что называется порядком дифференциального уравнения?

4. Что называется решением дифференциального уравнения? Что называется интегральной кривой?

5. Что такое «общий интеграл»? Как записать это в символической форме?

6. Что называется частным решением дифференциального уравнения? частным интегралом?

§ 9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

9.1.1. Общие определения и замечания об уравнениях первого порядка

О п р е д е л е н и е. *Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида*

$$\boxed{F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0} \qquad (9.7)$$

– в общем виде, или

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad (9.8)$$

– в нормальной форме.

Здесь y – неизвестная функция, $y = y(x)$; F и f – заданные непрерывные функции всех своих аргументов в некоторой области изменения этих переменных.

Наряду с уравнением (9.8) будем рассматривать «перевернутое» уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \qquad (9.9)$$

в тех случаях, когда функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность. Множество точек непрерывности функции $\frac{1}{f(x, y)}$ также присоединяем к области определения уравнения (9.8).

Таким образом, *под областью определения уравнения* (9.8) *понимается объединение областей задания функции f и* $\frac{1}{f}$.

Пример 4. Областью определения уравнения $y' = \frac{x^2+3}{x-1}$ является вся плоскость Oxy.

Действительно, функция $f(x, y) = \frac{x^2+3}{x-1}$ не существует в точках прямой $x - 1 = 0$, но функция $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{x-1}{x^2+3}$ определена в точках этой прямой, а потому вся плоскость Oxy является областью определения указанного дифференциального уравнения. #

9.1.2. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим вопрос об интегрировании дифференциального уравнения первого порядка (9.7) с геометрической точки зрения.

В уравнение (9.7) обязательно входит y', т.е. угловой коэффициент касательной к кривой (это следует из геометрического смысла производной функции y : $y' = \mathrm{tg}\alpha$, где α – угол, который касательная к кривой составляет с осью Ox) и, следовательно, задачу об интегрировании уравнения можно рассматривать как вопрос отыскания общего уравнения всех кривых линий, обладающих некоторым данным свойством относительно касательной (или нормали) в каждой точке этой кривой.

Остановимся подробнее на дифференциальном уравнении в нормальной форме (9.8)

$$y' = f(x, y).$$

Любой точке (x, y) из области определения функции $f(x, y)$ уравнение (9.8) ставит в соответствие определенное значение $y' = f(x, y)$. Следовательно, дифференциальное уравнение (9.8) определяет поле направлений. Если $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (9.8), то для определяемой им интегральной кривой в каждой точке её известно направление касательной: $\mathrm{tg}\alpha = f(x,y)$.

Таким образом, *геометрически* задача интегрирования дифференциального уравнения в нормальной форме может быть сформулирована так: *найти такую кривую, чтобы её касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.*

Пример 5. Построить интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Найдем предварительно те линии, для точек которых наклон одинаков (такие линии называются изоклинами).

Изоклинами данного уравнения являются окружности $x^2 + y^2 = C$.

Так, например, все интегральные кривые уравнения в точках пересечения с окружностью γ: $x^2 + y^2 = 1$ наклонены к оси Ox под углом 45°, ибо $y'\big|_{(x,y)\in\gamma} = (x^2 + y^2)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 1$, т.е. $tg\alpha\big|_{(x,y)\in\gamma} = 1$, отсюда $\alpha = 45^0$ (рис.9.2). Из вида правой части уравнения ясно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, касается в этой точке оси Ox. Ясно также, что всякое решение этого уравнения есть возрастающая функция.

На рис. 9.2 схематично изображено несколько интегральных кривых уравнения.

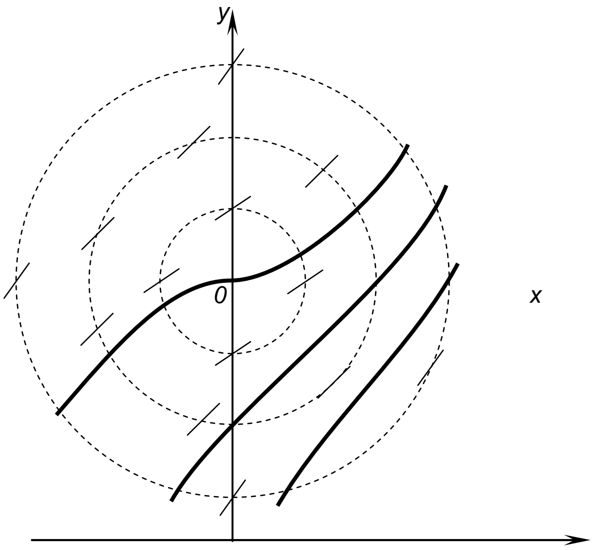


Рис. 9.2

9.1.3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Сформулируем задачу Коши: *среди всех решений уравнения* (9.8) *найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: при* $x = x_0$ $y = y_0$.

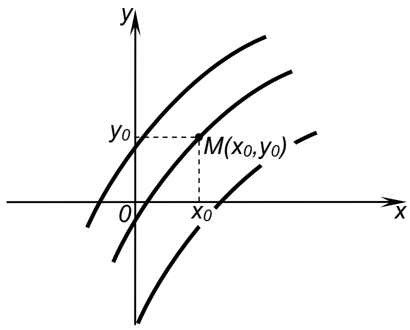


Рис. 9.3

Выше было отмечено, что при интегрировании уравнения находят общий интеграл или, геометрически, семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра.

Задача Коши, следовательно, заключается в нахождении той интегральной кривой (решения дифференциального уравнения (9.8)), которая проходит через точку с координатами (x_0, y_0) (рис. 9.3).

В случае, когда в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (9.8) обращается в бесконечность, рассматривают, как об этом было сказано выше, «перевернутое» уравнение (9.8') и ищут интегральную кривую в виде $x = x(y)$.

Возникают вопросы: при каких условиях задача Коши разрешима и сколько она имеет решений? Теорему, отвечающую на эти вопросы, приведем без доказательства.

Теорема 9.1 (существования и единственности решения задачи Коши). *Пусть в уравнении* (9.8) *функция* $f(x, y)$ *задана в некоторой области D плоскости* Oxy *и пусть функция f и её частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *являются непрерывными функциями во всей области D. Тогда:*

а) *для всякой точки* (x_0, y_0) *найдется решение* $y = y(x)$ *уравнения* (9.8)*, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$;

б) *если два решения* $y = y_1(x)$ *и* $y = y_2(x)$ *уравнения* (9.8) совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$ (т.е. если $y_1(x_0) = y_2(x_0)$), то решения эти тождественно равны для всех тех значений переменных *x*, для которых они оба определены (о частных производных см. главу 10).

З а м е ч а н и е**.** Числа x_0 и y_0 называются начальными значениями для решения $y = y(x)$, соотношение $y(x_0) = y_0$ – начальным условием для этого решения.

Геометрическое содержание теоремы заключается в том, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ *проходит* и *только одна интегральная кривая уравнения* (9.8).

Пример 6. Найти частное решение задачи Коши для уравнения

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -1$. Можно ли задать начальные условия в виде $y(2) = 1$?

Р е ш е н и е**.** В данном уравнении $f\ (x,\ y) = x\ (1 - x^2)^{-1/2}$. Эта функция определена и непрерывна в области

$$D = \{(x, y):\ -1 < x < 1; -\infty < y < +\infty\}.$$

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, то условия теоремы существования и единственности выполнены, т.е. через любую точку области D проходит интегральная кривая и притом только одна.

Точка $M_0(0;-1)$ лежит внутри указанной области, точка $M_1\ (2; 1)$ – вне её, т.е. задать начальные условия в виде $y(0) = -1$ можно, а в виде $y(2) = 1$ нельзя.

Интегрирование этого уравнения можно выполнить, считая данное дифференциальное уравнение задачей неопределенного интегрирования: найти первообразную, если задана её производная.

$$y = \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Итак, $y = -\sqrt{1 - x^2} + C$ является общим решением дифференциального уравнения.

Геометрически это есть семейство нижних половин окружностей с центрами в точках $(0, C)$, где C – произвольная постоянная, и радиусом $R = 1$. Подставляя координаты $(0, -1)$ в общее решение, найдем, C:

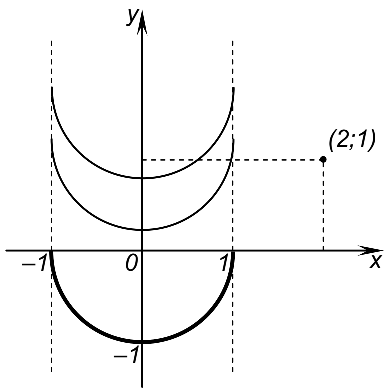


Рис. 9.4

$$-1 = -\sqrt{1 - 0^2} + C, C = 0.$$

Искомая кривая – решение задачи Коши – есть кривая $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (рис. 9.4). #

3⁰. Особые точки. Особые решения. Из п.2⁰ следует, что частное решение – это решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши (т.е. через эту точку в достаточно малой её окрестности проходит и только одна интегральная кривая).

Дадим теперь определение особого решения дифференциального уравнения (9.8).

О п р е д е л е н и е. *Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением.*

Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C = \pm\infty$. Особое решение вида

$$y = y(x) \ \ [x = x(y)]$$

может получиться из формулы общего решения лишь при

$$C = C(x) \ \ [C = C(y)].$$

Если функция f непрерывна и производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует, то точкой, подозрительной на особую, будет та, в которой производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность.

Уравнение (9.8), ниже это будет показано, можно привести к виду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 .$$

Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е. *Начальные данные* x_0, y_0 *называются особыми, если в этой точке одновременно и M и N обращаются в нуль (в этих точках начальные данные не гарантируют ни существования, ни единственности решения задачи Коши).*

Перейдем к изложению методов интегрирования дифференциальных уравнений в нормальной форме (9.8).

В пунктах 9.1.4-9.1.7 рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка, общее решение которых может быть получено с помощью квадратур. К ним относятся, например: 1) уравнения с разделяющимися переменными, 2) однородные уравнения, 3) линейные уравнения, 4) уравнения Бернулли.

9.1.4. Уравнения с разделяющимися переменными

1^0. Уравнение с разделенными переменными. Приведем дифференциальную форму записи для уравнения (9.8).

Для этого обе части его умножим на $N(x,y)dx$, где N – некоторая функция переменных x и y. Вводя обозначение $M(x,y) = -f(x,y)N(x,y)$, запишем (9.8) в дифференциальной форме

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.} \tag{9.10}$$

О п р е д е л е н и е. *Уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида*

$$\boxed{M(x)dx + N(y)dy = 0\,.} \tag{9.11}$$

Теорема 9.2. *Общий интеграл уравнения* (9.11) *дается формулой*

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}, \tag{9.12}$$

где C – произвольная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (9.11); подставим её и $dy = \varphi'(x)dx$ в левую часть равенства (9.12), получим сложную функцию от x

$$\int M(x)dx + \int N[\varphi(x)]\varphi' dx\,, \tag{9.13}$$

для которой (в силу (9.11))

$$d\left(\int M(x)dx + \int N[\varphi(x)]\varphi' dx\right) = M(x)dx + N[\varphi(x)]\varphi' dx \equiv 0$$

– величина (9.13) постоянна, т.е. выполнено равенство (9.12). Таким образом, из (9.11) следует (9.12).

Пример 7. Проинтегрировать уравнение $x + yy' = 0$. Найти частный интеграл, для которого $y\,(3) = 4$.

Р е ш е н и е. а) Запишем уравнение в виде $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$; после умножения обеих частей на dx получим $xdx + ydy = 0$ – уравнение с разделенными переменными. По формуле (9.12) получим

$$\int xdx + \int ydy = \frac{C}{2},$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения есть $x^2 + y^2 = C$.

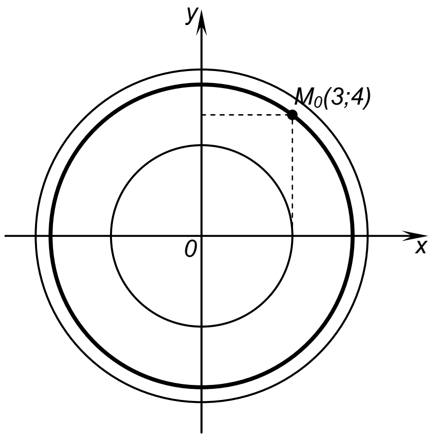


Рис. 9.5

б) Найдем частный интеграл, для которого $y(3) = 4$. Подставляя начальные данные ($x_0 = 3$, $y_0 = 4$) в общий интеграл, получим: C = 25. Частным решением является $x^2 + y^2 = 25$ – окружность радиуса 5 с центром в начале координат (рис.9.5). #

2⁰. Уравнение с разделяющимися переменными. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е**.** *Пусть в* (9.10)

$$M(x,y) = M_1(x)N_2(y); \quad N(x,y) = M_2(x)N_1(y)$$

– каждая из функций M и N есть произведение двух функций, зависящих только от одной переменной. Тогда уравнение

$$M_1(x)N_2(y)dx + M_2(x)N_1(y)dy = 0 \qquad (9.14)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Само название типа этого уравнения указывает на возможность преобразования его таким образом, что при dx множителем будет функция, зависящая только от x, а при dy – функция, зависящая только от y.

Умножением обеих частей (9.14) на $\left[M_2(x)\,N_2(y)\right]^{-1}$ сведем его к уравнению с разделенными переменными (9.11)

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = 0,$$

общим интегралом которого, как показано в п.1^0, есть равенство

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = C. \tag{9.15}$$

При делении могли потерять решение. Рассмотрим уравнения

$$M_2(x) = 0; \quad N_2(y) = 0.$$

Если они имеют вещественные решения вида $x = a$, $y = b$, то $x = a$ $(y \neq b)$ и $y = b$ $(x \neq a)$ есть решения уравнения (9.10). Эти решения (и только они) могут оказаться особыми.

Пример 8. Решить уравнение $yy' + xy^2 = x$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде $y\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = x$ или, после перенесения x в левую часть и умножения обеих частей на dx, $ydy + x(y^2 - 1)dx = 0$; полученное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными (9.14), так как коэффициенты при dx и dy есть функции $M_1(x)N_2(y)$ и $M_2(x)N_1(y)$ со-ответственно, где $M_1(x) = x, N_2(y) = y^2 - 1, M_2(x) = 1,\ N_1(y) = y.$

Интегрируя, по формуле (9.12) или (9.15)) получим

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\ln|C| \text{ или } (y^2 - 1)e^{x^2} = C.$$

Замечание. При делении на $(y^2 - 1)$ могли потерять решения $y = 1$, $y = -1$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что это решения, но они содержатся в общем решении (получаются из него при $C = 0$). #

Пример 9. Найти общее и особые решения дифференциального уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

Р е ш е н и е. Имеем уравнение с разделяющимися переменными. Деля обе части его на $(y^2 - 1)(x^2 - 1)$, получим

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0.$$

Интегрирование дает (см. (9.12))

$\ln\left|x^2 - 1\right| + \ln\left|y^2 - 1\right| = \ln|C|$ или $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$ – общий интеграл.

Общий вид семейства кривых показан на рис. 9.6. При $C = 0$ получим четыре прямые $x = \pm 1;\ \ y = \pm 1$ – эти значения обраща-

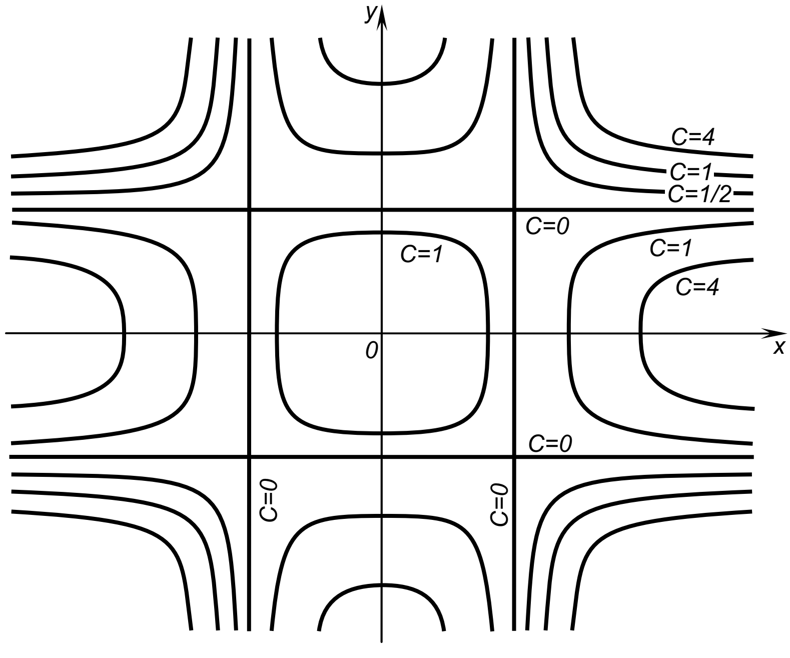


Рис. 9.6

ют $(y^2-1)(x^2-1)$ в нуль. Они не могли быть получены из квадратуры, так как постоянная интегрирования есть $\ln|C|$, так что $C \neq 0$. #

9.1.5. Однородные уравнения

В предыдущем пункте было отмечено, что основным аналитическим методом решения дифференциальных уравнений первого порядка является метод разделения переменных.

Для уравнения с разделяющимися переменными этот метод применим непосредственно. В других случаях интегрирование данного уравнения с помощью подстановки или введением переменных сводят к интегрированию другого уравнения с отделенными переменными.

Существует несколько типов уравнений первого порядка, которые можно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка относятся к такого типа уравнениям.

Дадим определение однородных уравнений.

О п р е д е л е н и е. *Уравнение первого порядка в нормальной форме* (9.8)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется однородным, если f (x, y) есть однородная функция нулевого измерения, т.е.

$$\boxed{f(tx,ty) = f(x,y).} \tag{9.16}$$

Если уравнение (9.8) *записано в дифференциальной форме* (9.10)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

то оно однородное, если функции M (x, y) и N (x, y) есть однородные функции одного измерения (например, измерения m), т.е.

$$\boxed{M(tx,ty) = t^m M(x,y); \qquad N(tx,ty) = t^m N(x,y).} \tag{9.16'}$$

Пример 10. Приведем примеры однородных функций:

а) $f(x,y)=\cos\frac{y}{x}$ – однородная функция нулевого измерения, так как

$$f(tx,ty)=\cos\frac{ty}{tx}=\cos\frac{y}{x}=f(x,y);$$

б) $ax+by$, $\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}$ – однородные первого измерения, ибо, например,

$$f(tx,ty)=atx+bty=t(ax+by)=tf(x,y);$$

в) x^2+y^2, $x^2\operatorname{tg}\frac{y}{x}$ – однородные функции второго измерения (покажите это самостоятельно). #

Покажем, что в однородном уравнении функция $f(x, y)$ или отношение $M(x, y)/N(x, y)$ есть функции одной переменной – аргумента $\frac{y}{x}$.

Для доказательства положим $t=\frac{1}{x}$; подставляя t в (9.16), получим

$$f(x,y)=f(tx,ty)=f\left(\frac{1}{x}x,\ \frac{y}{x}\right)=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Из этого следует, что однородное уравнение всегда представимо в виде

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.17}$$

Для однородного уравнения, записанного в дифференциальной форме (9.10), найдем функции M и N из выражения (9.16'), подставляя в них $t=\frac{1}{x}$: так как $M(x,y)=t^{-m}M(tx,ty)$, то

$$M(x, y) = x^m M\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^m \widetilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right); \qquad (9.17')$$

аналогично,

$$N(x,y) = x^m \widetilde{\psi}\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (9.17'')$$

Подставляя (9.17’) и (9.17”) в уравнение (9.10) и деля на x^m, придем к уравнению

$$\widetilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right)dx + \widetilde{\psi}\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

что, очевидно, совпадает с уравнением (9.17).

Интегрирование однородного уравнения (9.17) с помощью подстановки

$$\boxed{\frac{y}{x} = u(x)} \quad \text{или} \quad \boxed{y = u(x)x},$$

сводится к интегрированию уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, так как $y' = u'x + u$, то из (9.17) получим уравнение $u'x + u = \varphi(u)$, или $\frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u$, в котором переменные разделяются

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

и, следовательно, общий интеграл имеет вид (см. (9.12); постоянную интегрирования берем в виде $\ln C$)

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|xC|. \qquad (9.18)$$

Переходя после интегрирования в (9.18) от функции u к $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения (9.17).

Пример 11. Решить уравнение $y' = \dfrac{x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2}{x^2 + xy}$.

Р е ш е н и е. Решая всякое дифференциальное уравнение первого порядка, проверяем сначала, не является ли оно уравнением с разделяющимися переменными. Убедитесь самостоятельно, что это не так, т.е. нельзя данное уравнение привести к виду (9.14).

Не будет ли данное уравнение однородным? Для этого надо проверить, не выполняется ли для функции в правой части уравнения условие (9.16):

$$f(tx, ty) = \frac{tx\sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + (tx)(ty) - (ty)^2}{(tx)^2 + (tx)(ty)} =$$

$=|$ после сокращения числителя и знаменателя на $t^2 | =$

$= \dfrac{x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2}{x^2 + xy} = f(x, y)$, – т.е. условие (9.16) выполняется, а потому данное уравнение – однородное.

Применим подстановку $y = u(x)x$, тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$ и исходное уравнение преобразуется:

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{x\sqrt{x^2 - u^2x^2} + x^2u + x^2u^2}{x^2 + x^2u},$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{\sqrt{1-u^2} + u + u^2}{1+u} - u, \quad \frac{du}{dx}x = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}$$

– приходим к уравнению с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим

$$\frac{(1+u)du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Выполняем квадратуры:

$$\int \frac{(1+u)du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|,$$

$$\arcsin u - \sqrt{1-u^2} = \ln|xC|$$

и, окончательно,

$$\ln|xC| = \arcsin\frac{y}{x} - x^{-1}\sqrt{x^2 - y^2}\ .\#$$

Пример 12. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Это однородное дифференциальное уравнение, так как функции

$$M(x,y) = y \ \text{ и } \ N(x,y) = 2\sqrt{xy} - x$$

есть однородные функции одного и того же (первого) измерения (проверьте).

К цели здесь легче прийти, если искомой функцией считать $x = x(y)$; перепишем уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - 2\sqrt{xy}}{y}, \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (\,*\,)$$

Вместо x введем новую переменную $v\,(y)$ по формуле:

$$v(y) = \frac{y}{x} \ \text{ или } x = v(y)\cdot y$$

Тогда $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{dv}{dy}y + v$, а уравнение (*) примет вид

$$v + y\frac{dv}{dy} = v - 2\sqrt{v}\,, \text{ или } \ y\frac{dv}{dy} + 2\sqrt{v} = 0\,.$$

Отделение переменных дает

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} + \frac{dy}{y} = 0\,,$$

откуда, интегрируя, получим $\sqrt{v}+\ln|y|=C$ и, окончательно,

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C\,. \quad \#$$

9.1.6. Линейные уравнения первого порядка

1^0. Линейные однородные и неоднородные уравнения. К уравнениям, одним из методов решения которых есть метод разделения переменных, относятся линейные уравнения первого порядка.

О п р е д е л е н и е**.** *Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейным образом зависящее от искомой функции и её производной*

$$\boxed{A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y+C(x)=0} \qquad (9.19')$$

– искомая функция и ее производная входят в (9.19’) в первой степени.

Так как это уравнение дифференциальное, то $A(x)\not\equiv 0$; разделив на $A(x)$ обе части (9.19’), запишем линейное уравнение в виде

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)}\,. \qquad (9.19)$$

Если в уравнении (9.19) функция $f(x)\equiv 0$, то оно принимает вид:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=0.} \qquad (9.20)$$

О п р е д е л е н и е**.** *Уравнение* (9.20) *называется однородным линейным дифференциальным уравнением* (*ОЛДУ*) *первого порядка* (*или линейным без правой части*)*; уравнение* (9.19) *называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением* (*НЛДУ*) *первого порядка* (*или уравнением с правой частью*).

Теорема 9.3. *Пусть в уравнении* (9.19) *функции p (x) и f (x) непрерывны в интервале (a, b). Тогда через любую точку* $(x_0, y_0) \in D = \{(x, y): a < x < b; -\infty < y < +\infty\}$ *проходит одна и только одна интегральная кривая этого уравнения, определенная* $\forall x \in (a, b)$.

З а м е ч а н и е**.** Подобная теорема доказывается при изложении теории линейных уравнений высших порядков; здесь доказательство опустим.

2⁰. Методы интегрирования уравнений (9.19). Изложим методы интегрирования линейных уравнений.

Метод подстановки. Полагаем в уравнении (9.19)

$$\boxed{y = u(x) \cdot v(x)}, \tag{9.21}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые неизвестные функции переменного *x*, которые надлежит подобрать так, чтобы удовлетворить уравнению (9.19).

Дифференцируем y: $y' = u'v + uv'$ и, подставляя y и y' в уравнение (9.19), преобразуем его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x). \tag{9.22}$$

Так как две функции связаны лишь одним условием – уравнением (9.19), то одно недостающее условие сформулируем сами: подберем u и v так, чтобы в уравнении (9.22) сумма двух слагаемых $uv' + p \cdot uv$ обратилась в нуль: $uv' + p \cdot uv = 0$. Оставшаяся часть уравнения (9.22) будет $u'v = f(x)$. Таким образом, решение одного дифференциального уравнения (9.19) для функции $y(x)$, свелось к решению *двух* дифференциальных уравнений первого порядка для функций $u(x)$ и $v(x)$: а) $uv' + p \cdot uv = 0$, б) $u'v = f(x)$.

Решаем уравнение а). Очевидно, $u \not\equiv 0$ (в этом случае $y = uv \equiv 0$, что, как нетрудно проверить, не является решением уравнения); тогда имеем

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$$

– функция v есть решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Отделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx,$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \tag{9.23}$$

В (9.23) постоянную интегрирования опускаем, так как достаточно найти лишь одну функцию v.

Подставив (9.23) в уравнение (9.21), получим условие для определения функции u:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int p(x)dx} = f(x) \tag{9.24}$$

– это уравнение с разделяющимися переменными. Отделяем в (9.24) переменные и интегрируем:

$$du = f(x)e^{-\int p(x)dx}dx, \quad u = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{9.25}$$

С учетом (9.23) и (9.25), общее решение линейного уравнения (9.19) запишется в виде

$$\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.} \tag{9.26}$$

Приведенное в (9.26) общее решение линейного уравнения носит название формулы И.Бернулли.

Особо отметим: обычно в конкретных задачах применяют не формулу (9.26), а проводят решение по изложенной методике: с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$ уравнение (9.19) «расщепляют» на систему двух уравнений а) и б), которые решают последовательно как уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 13. Решить уравнение $\left(1+x^2\right)y' + xy = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. Это линейное уравнение. Приведем его к виду

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Интегрируем уравнение методом подстановки, для чего вводим $y = uv$. Подставляя y и $y' = u'v + uv'$ в уравнение, получим

$$u'v + uv' + \frac{xuv}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}. \qquad (*)$$

Пользуясь произвольностью функции v, «расщепляем» уравнение (*) на систему уравнений:

а) $uv' + \dfrac{xuv}{1+x^2} = 0$, б) $u'v = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Уравнение а) после деления на $u = 0$ принимает вид:

$$v' + \frac{xv}{1+x^2} = 0$$

– уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Отделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1+x^2}, \text{ откуда } \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{1+x^2} + C,$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \text{ и } v = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Подстановка найденной функции v в уравнение б) дает для определения u соотношение

$$\frac{u'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^2}, \text{ или } du = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx;$$

интегрируя, получим $u = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} + C$.

Вычисление интеграла можно проделать рационально («по теории» можно было бы применить к вычислению интеграла подстановку $x = \operatorname{tg} t$):

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\int\frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=-\int\frac{\frac{1}{x}d\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Общее решение есть $(y=uv)$

$$y=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad \#$$

Метод вариации произвольной постоянной. Изложим другой метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений. По этому способу решение проводится в два этапа.

1) Найдем общее решение ОЛДУ – однородного линейного дифференциального уравнения (9.20), соответствующего неоднородному (9.19) (оно является уравнением с разделяющимися переменными): $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \frac{dy}{y}=-p(x)dx,$

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|, \qquad y=Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{9.27}$$

2) Проинтегрируем исходное неоднородное уравнение (9.19) методом вариации произвольной постоянной: *ищем общее решение уравнения* (9.19) *в виде* (9.27) *– в каком было найдено решение однородного уравнения* (9.20), *соответствующего неоднородному* (9.19), *считая* $C=C(x)$ *– некоторой неизвестной функцией, подлежащей определению*

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{9.28}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}+Ce^{-\int p(x)dx}\cdot(-p). \tag{9.28'}$$

Подставим (9.28) и (9.28′) в (9.19):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int pdx} - Cpe^{-\int pdx} + Cpe^{-\int pdx} = f(x), \quad \frac{dC(x)}{dx} = f(x)e^{\int pdx},$$

$dC9x) = f(x)e^{\int pdx}dx$, откуда интегрированием находим

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C, \tag{9.29}$$

где C – произвольная постоянная.

Подстановка (9.29) в (9.28) дает общее решение (9.26) НЛДУ

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

– знакомую уже формулу, впервые полученную И.Бернулли.

Пример 14. Решить уравнение $y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}$.

Р е ш е н и е. а) Запишем соответствующее ему однородное уравнение $y' + \frac{x}{1-x^2}y = 0$. По разделении переменных получим уравнение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1-x^2},$$

интегрируя которое, находим:

$$\ln|y| = \ln\sqrt{1-x^2} + \ln|C|, \text{ или } y = C\sqrt{1-x^2}.$$

б) Пусть решение неоднородного уравнения есть $y = C(x)\sqrt{1-x^2}$, тогда $y' = C'\sqrt{1-x^2} - C\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; подставляя y и y' в исходное неоднородное уравнение, получим после преобразований уравнение $\frac{dC}{dx} = \frac{ax}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.Интегрируя его, найдем

$$C(x) = a\int\frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} + C = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = a + C\sqrt{1-x^2}$.   #

3^0. Структура общего решения НЛДУ. Из представления общего решения – формулы (9.26) – следует, что оно складывается из двух слагаемых

$$y_0 = Ce^{-\int p(x)dx}; \qquad y_1 = e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx . \quad (9.30)$$

Здесь y_0 есть общее решение однородного уравнения (9.20), соответствующего неоднородному (9.19), y_1 есть частное решение неоднородного уравнения (оно получается из общего (9.26), если положить в нем $C = 0$).

Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 9.4 (теорема о структуре общего решения НЛДУ). *Общее решение неоднородного линейного уравнения складывается из общего решения соответствующего ему однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения*

$$\boxed{y = y_0 + y_1 .} \qquad (9.31)$$

9.1.7. Уравнение Бернулли

О п р е д е л е н и е**.** *Уравнением Бернулли называется уравнение вида*

$$\boxed{y' + p(x)y = y^n f(x) .} \qquad (9.32)$$

При $n = 1$ и $n = 0$ получим уже рассмотренные типы уравнений (с разделяющимися переменными и линейное); считаем поэтому, что $n \neq 0; 1$.

З а м е ч а н и е. Можно убедиться (мы делать этого здесь не будем), что подстановкой

$$\boxed{z = y^{-n+1}}$$

уравнение (9.32) сводится к линейному (относительно искомой функции z) уравнению и, следовательно, его можно интегрировать методами, изложенными в п.9.1.6 для линейного уравнения.

На практике методы интегрирования линейного уравнения к уравнению (9.32) применяются непосредственно (минуя преобразование его в линейное), в связи с чем ограничимся лишь решением примера.

Пример 15. Решить уравнение $y' + \frac{2}{x} y = y^3$.

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y \equiv 0$ есть решение данного уравнения.

Найдем отличные от нуля решения. Применяем подстановку $y = uv$; получим

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = (uv)^3.$$

«Расщепляем» последнее уравнение на два: а) $uv' + \frac{2uv}{x} = 0$, б) $u'v = (uv)^3$.

Для определения v имеем уравнение $v' = -\frac{2v}{x}$, или $\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}$, откуда $\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -2\ln|x|$ и $v = \frac{1}{x^2}$.

Далее, подставляя найденную функцию v в уравнение б), получим $u' = \frac{u^3}{x^4}$, $\frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x^4}$. Интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{3x^3} + \frac{C}{6}, \text{ откуда } u^2 = \frac{3x^3}{2 + Cx^3}.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x\left(2 + Cx^3\right)}}$. #

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка. Какие формы записи для него возможны? Что называется областью определения дифференциального уравнения?

Приведите примеры. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

2. Что называется общим и частным решением (интегралом) дифференциального уравнения первого порядка?

3. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка, записанного в нормальной форме $y' = f(x, y)$. В чем заключается геометрический смысл общего и частного решений?

4. Сформулируйте задачу Коши для уравнения первого порядка. Что такое начальные данные? начальные условия? Приведите теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ и укажите, где условия этой теоремы не выполняются.

5. Что называется особым решением (в смысле решения задачи Коши)? Какие начальные данные называются особыми?

6. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения. Как записывается общее решение этого уравнения? Приведите примеры.

7. Что означают понятия: однородная функция нулевого; первого;…; *n*-го измерений? Какое уравнение в нормальной форме называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите пример.

8. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Какое линейное уравнение называется однородным уравнением? неоднородным?

9. Сформулируйте достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка.

10. Изложите методы нахождения общего решения линейного уравнения: а) «метод подстановки»; б) метод Лагранжа – метод вариации произвольной постоянной интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Приведите примеры.

11. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите пример.

§ 9.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

9.2.1. Введение. Задача Коши

1^0. Основные понятия и определения. Во введении к курсу (см. Введение, пп. 2^0 и 3^0) определены понятия *дифференциального уравнения n-го порядка (в общем виде и в нормальной форме), решения уравнения* и другие понятия.

Прежде, чем переходить к изучению дифференциальных уравнений порядка выше первого, следует повторить чтение пп. 2^0 и 3^0 Введения.

Пример 16. Показать, что функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ есть общий интеграл уравнения $y'' - y = 0$.

Р е ш е н и е. а) Это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению, так как здесь вторая производная $y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ и при подстановке $y = y(x)$ и $y'' = y''(x)$ в уравнение оно превращается в тождество:

$$(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) - (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) \equiv 0;$$

это и означает, что $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ есть *решение* уравнения.

б) покажем, что постоянные C_1 и C_2 можно определить так, чтобы при $x = x_0$ было $y = y_0$, $y' = y_0'$, где y_0 и y_0' – произвольные заданные числа.

Подставляя x_0, y_0, y_0' в функцию $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ и ее производную $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$, найдем, что

$$y_0 = C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0}; \; y_0' = C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0}.$$

Решая эту систему относительно неизвестных C_1 и C_2, получим:

$$C_1 = e^{-x_0} \frac{y_0 + y_0'}{2}; \; C_2 = e^{x_0} \frac{y_0 - y_0'}{2}$$

– это означает, что $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ есть *общее решение* и функция

$$y = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^{x - x_0} + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-(x - x_0)}$$

удовлетворяет всем поставленным (выше) условиям. #

2^0. Существование и единственность решения задачи Коши. Сформулируем задачу Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка, учитывая структуру (9.6) его общего интеграла.

Задача Коши. *Найти решение* $y = y(x)$ *дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме* (9.4), *удовлетворяющее начальным условиям:*

$$\boxed{y = y_0; \quad y' = y_0'; \quad y'' = y_0''; \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0.} \tag{9.33}$$

Например, для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{9.34}$$

задача Коши заключается в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0; \quad y' = y_0' \text{ при } x = x_0. \tag{9.34′}$$

Геометрически это означает, что нужно найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, имеющую в этой точке касательную, для которой задан $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Приведем одну из теорем (достаточные условия) существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства).

Теорема 9.5. *Пусть функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна и имеет непрерывные производные по переменным* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *всюду в открытой области D* $(n+1)$*–мерного пространства* $Oxy\,y' \ldots y^{(n-1)}$.

Тогда, если точка $(x_0,\ y_0,\ y'_0,...,\ y_0^{(n-1)})$ *принадлежит этой области, то существует и притом единственное решение* $y = y(x)$ *уравнения* (9.4), *удовлетворяющее начальным условиям* (9.33).

З а м е ч а н и е. Существование решения гарантируется для некоторого интервала (a, b), содержащего значение x_0; это решение – единственное в пределах области D.

Теперь мы можем уточнить понятие общего решения дифференциального уравнения n-го порядка.

О п р е д е л е н и е. *Функция* $y = f(x, C_1,...,C_n)$, *определенная в некоторой области изменения переменных* $x, C_1,...,C_n$ *и имеющая непрерывные частные производные по x до порядка n включительно, называется общим решением уравнения* (9.4) *в области D изменения переменных* $x, y, y',..., y^{(n-1)}$, *в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если*

а) *система уравнений*

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1,...,C_n); \\ y' = \varphi'(x, C_1,...,C_n); \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1,...,C_n) \end{cases} \tag{9.35}$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1,...,C_n$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1(x, y, y',..., y^{(n-1)}); \\ C_2 = \varphi_2(x, y, y',..., y^{(n-1)}); \\ \text{............ ....} \\ C_n = \varphi_n(x, y, y',..., y^{(n-1)}); \end{cases} \tag{9.36}$$

б) *функция* $y = \varphi(x, C_1,..., C_n)$ *является решением уравнения* (9.4) $\forall C_i$, *определяемых выражениями* (9.36) $\forall (x,\ y,\ y',...,\ y^{(n-1)}) \in D$.

З а м е ч а н и е. Общее решение, записанное в виде

$$\boxed{y = y\left(x, x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}\right),} \tag{9.37}$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальные значения этой функции, называется *общим решением в форме Коши*.

Уточним понятие частного решения.

О п р е д е л е н и е. *Решение уравнения* (9.4) *называется частным решением, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши.*

Если $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ есть общее решение уравнения (9.4), то любое решение, содержащееся в этом выражении при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных C_i, является частным решением.

О п р е д е л е н и е. *Особым решением уравнения* (9.4) *называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.*

9.2.2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах, и уравнения, допускающие понижение порядка

Из того, что уравнение n-го порядка (9.4) имеет решение, разумеется, не следует, что это решение выражается в квадратурах (даже для уравнения первого порядка такая возможность представляется далеко не всегда).

Рассмотрим в этом пункте некоторые, наиболее важные, типы уравнений, интегрируемые в квадратурах, либо допускающие понижение порядка.

Интегрирование таких уравнений проводится путем сведения их к уравнениям низших порядков – промежуточным интегралам.

Понижая порядки, мы придем к выражению (9.6), не содержащему производных, т.е. к общему интегралу уравнения (9.3).

Рассмотрим подобные типы уравнений высших порядков.

1) У р а в н е н и я, и н т е г р и р у е м ы е в к в а д р а т у р а х. Рассмотрим несколько подобных случаев.

Уравнение, разрешенное относительно производной n-го порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = f(x),} \tag{9.38}$$

правая часть которого зависит только от переменной x.

Так как $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,\quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx, \ldots,$ то

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$$

и

$$y = \int \varphi_{n-1}(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n \tag{9.38'}$$

есть общее решение, полученное с помощью n последовательных квадратур.

Решение задачи Коши с начальными данными (9.33)

$$y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0$$

можно записать сразу, не находя предварительно общего решения (9.38'), если перейти к интегралам с переменным верхним пределом и записать общее решение в форме Коши

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 + y_0' \frac{(x - x_0)}{1!} +$$

$$+ y_0'' \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.39}$$

Пример 17. Решить уравнение $y''' = \sin x$.

Р е ш е н и е**.** Запишем уравнение в виде ($y''' = \dfrac{dy''}{dx}$)

$$dy'' = \sin x \cdot dx,$$

откуда интегрированием находим $y'' = -\cos x + \overline{C}_1$.

Последнее запишем в аналогичной форме ($y'' = \dfrac{dy'}{dx}$):

$$dy' = (-\cos x + \overline{C}_1)dx,$$

откуда $y' = \int\left(-\cos x + \overline{C}_1\right)dx = -\sin x + \overline{C}_1 x + C_2$, так что окончательно, общее решение

$$y = \int\left(-\sin x + \overline{C}_1 x + C_2\right)dx = \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 .\#$$

З а м е ч а н и е**.** Уравнение

$$\boxed{F(x, y^{(n)}) = 0} \qquad (9.40)$$

сводится к рассмотренному случаю, если оно разрешимо относительно производной $y^{(n)}$.

Если это невозможно, но уравнение допускает параметризацию

$$\boxed{x = \varphi(t); \quad y^{(n)} = \psi(t),} \qquad (9.40')$$

то в данном случае также решение находится квадратурами (опустим процедуру интегрирования в общем виде подобных уравнений в этом случае).

Иначе это уравнение не разрешимо в квадратурах.

Пример 18. Решить уравнение $e^{y''} + y'' = x$.

Р е ш е н и е. Это уравнение не разрешимо относительно производной y'', но допускает параметризацию.

Положим $y'' = t$; из уравнения получим, что $x = t + e^t$. Далее,

$$dx = \left(1 + e^t\right)dt, \; dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt,$$

откуда

$$\int dy' = \int t\left(e^t + 1\right)dt, \; y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Подставляя в $dy = y' \cdot dx$ найденное значение производной $y' = y'(t)$ и dx, после вычисления интегралов придем к зависимости

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} - 1 + C_1\right)e^t + \dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2; \\ x = e^t + t, \end{cases}$$

что представляет записанный в параметрической форме общий интеграл данного уравнения. #

2) Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Существует несколько типов уравнений n-го порядка, допускающие понижение порядка. Здесь рассмотрим два типа подобных уравнений; относительно других ограничимся общими замечаниями.

Уравнение вида

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0} \tag{9.41}$$

есть уравнение n-го порядка, не содержащее в явном виде искомой функции и (для общности изложения) также ($k-1$) её первых производных.

Введем новую функцию $z(x)$ соотношением

$$\boxed{y^{(k)} = z(x)} \tag{9.42}$$

Тогда

$$y^{(k+1)} = z', \ y^{(k+2)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)} \tag{9.43}$$

Заменим (9.41) уравнением

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 \tag{9.44}$$

порядка ($n-k$).

Конечно, здесь нельзя утверждать, что это уравнение всегда разрешается в квадратурах. Пусть найден общий интеграл уравнения (9.44') (в нем заменим z на $y^{(k)}$)

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0. \tag{9.45}$$

Уравнение (9.45) принадлежит к типу (как дифференциальное уравнение), интегрируемому в квадратурах (см. п.1, замечание).

Пример 19. Решить уравнение $(1 + y'^2)^{3/2} = x^2 y''$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение (второго порядка) не содержит искомой функции, то есть оно допускает понижение порядка.

Полагая $z = y'$, $z' = y''$, получим

$$x^2 z' = (1 + z^2)^{3/2} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}},$$

интегрируя которое, найдем (вычисление $\int (1 + z^2)^{-3/2} dz$ см. пример 13, п. 9.1.6):

$$C_1 - \frac{1}{x} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}};$$

Из этого уравнения выразим z; заменяя z на производную y', придем к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y' = \pm \frac{C_1 x - 1}{\sqrt{x^2 - (C_1 x - 1)^2}} \quad \text{и} \quad y + C_2 = \pm \int \frac{(C_1 x - 1) dx}{\sqrt{x^2 - (C_1 x - 1)^2}}.$$

З а м е ч а н и е**.** Значение интеграла зависит от C: если $C < 1$, то первообразная (кроме радикала) содержит также логарифм, если $C > 1$ – арксинус; при $C = 1$ интеграл выражается алгебраически.

В. Рассмотрим уравнение вида

$$\boxed{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,} \tag{9.46}$$

в которое не входит (явно) независимая переменная x. Покажем, что порядок такого уравнения можно понизить на единицу.

Введем новую неизвестную, зависящую от y, функцию $p(y)$ соотношением

$$y' = p(y) \tag{9.46'}$$

и выразим все производные $\dfrac{d^k y}{dx^k}$, входящие в уравнение (9.46), через производные от функции $p(y)$ по y (по формуле производной сложной функции):

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dx} = p\frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dy} = p^2\frac{d^2 p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \tag{9.46''}$$

и т.д. Вообще производная k-го порядка от y по x выразится через производные $p', p'', ..., p^{(k-1)}$ от функции p по y (обосновать это можно по методу полной индукции) и данное уравнение приводится к уравнению $(n-1)$-го порядка с двумя переменными p и y, что и приводит к понижению порядка на единицу.

Если полученное уравнение $(n-1)$-го порядка возможно проинтегрировать в виде

$$p = \psi(y, C_1, ..., C_{n-1}),$$

то

$$dx = \int \frac{dy}{\psi(y, C_1, ..., C_{n-1})} \quad \text{и} \quad x + C_n = \int \frac{dy}{\psi(y, C_1, ..., C_{n-1})}$$

представляет собой общий интеграл данного уравнения.

Пример 20. Решить уравнение $2yy'' + {y'}^2 + {y'}^4 = 0$.

Р е ш е н и е. Это уравнение второго порядка, не содержащее переменной x, допускает понижение порядка.

Обозначим $y'=p(y)$; тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ и уравнение преобразуется в

$$2yp\frac{dp}{dy}+p^2+p^4=0,$$

которое, в свою очередь, распадается на два уравнения:

$$p=0 \quad \text{и} \quad 2y\frac{dp}{dy}+p+p^3=0.$$

Интегрирование первого дает $y=C$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что оно является решением исходного уравнения.

Второе уравнение – с разделяющимися переменными:

$$-\frac{2dp}{p(p^2+1)}=\frac{dy}{y},$$

интегрируя которое (дробь $\dfrac{1}{p^3+p}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+1}$), найдем

$$\ln\frac{p^2+1}{p^2}=\ln|C_1y|, \quad \text{или} \quad p^2+1=C_1yp^2,$$

откуда

$$p=\pm(C_1y-1)^{-1/2} \text{ или } y'=\pm(C_1y-1)^{-1/2},$$

что представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; разделяем переменные: $(C_1y-1)^{-1/2}\cdot dy=\pm dx$. Общий интеграл представим в виде

$$(C_1y-1)^{3/2}=\pm\frac{3C_1}{2}x+C_2.$$

З а м е ч а н и е. Кроме рассмотренных, существуют и другие типы дифференциальных уравнений высших порядков (опустим это).

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Сформулируйте задачу Коши для уравнения $n -$го порядка. Приведите достаточные условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n -$го порядка.

2. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Приведите пример.

3. Покажите, что уравнения вида $F\left(x, y^{(k)},\ y^{(k+1)},...,\ y^{(n)}\right) = 0$ и $F\left(y, y',\ y'',...,\ y^{(n)}\right) = 0$ допускают понижение порядка. Разберите для каждого из них случаи интегрируемости «до конца».

§ 9.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Из дифференциальных уравнений до настоящего времени лучше всего исследованы линейные уравнения. Они обладают целым рядом характеристических свойств, которые резко выделяют их из других уравнений и облегчают их изучение. Помимо этого они встречаются в очень многих важных приложениях математического анализа.

Замечательным свойством линейных уравнений можно считать то, что их общее решение можно найти по некоторому числу частных решений, что и лежит в основе всех их теорем.

9.3.1. Определения и общие свойства линейных уравнений

1⁰. Определение ОЛДУ и НЛДУ. Введем определения.

О п р е д е л е н и е. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, линейное относительно совокупности искомой функции y и ее производных* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),} \qquad (9.47)$$

где $p_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, $f(x)$ *– заданные непрерывные функции от* $x \in (a, b)$.

Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}$, очевидно, всегда можно считать равным единице. Функции $p_i(x)$ называются *коэффициентами уравнения* (9.47), $f(x)$ *– правой частью* (уравнения).

О п р е д е л е н и е. *Линейное уравнение* (9.47) *называется однородным линейным дифференциальным уравнением* (ОЛДУ; также *уравнением без правой части*), *если* $f(x) \equiv 0$ $(a < x < b)$:

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0.} \qquad (9.48)$$

Если функция $f(x)$ тождественно в нуль не обращается, то уравнение (9.47) *называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением* (НЛДУ; также *уравнением с правой частью*).

При совпадении левых частей уравнений (9.47) *и* (9.48) *однородное уравнение* (9.48) *называется соответствующим неоднородному* (9.47).

2^0. Общие свойства линейных уравнений. *Линейные уравнения инвариантны* (*сохраняют тип*) *относительно любого преобразования независимой переменной*

$$x = \varphi(t)$$

и относительно линейного преобразования искомой функции

$$y = a(x)u + b(x)$$

(функции $\varphi(t)$, $a(x)$, $b(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции до порядка *n* включительно).

З а м е ч а н и е. Доказательство этих утверждений основано на свойстве линейности операций дифференцирования – опустим это.

3^0. Существование и единственность решения задачи Коши. Перенесем все члены уравнения (9.47), кроме старшей производной, в правую часть и обозначим ее $F\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$. Дифференцированием по переменным $y, y', ..., y^{(n-1)}$ получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -p_n(x),\ \frac{\partial F}{\partial y'} = -p_{n-1}(x), ..., \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x),$$

и так как по предположению (п.1^0) функции $p_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции от $x \in (a,b)$, то тем самым выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см. п.9.2.1).

Таким образом, *для линейного уравнения существует одно и только одно решение $y = y(x)$, принимающее при $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ заданное значение y_0, в то время как значе-*

ния производных $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, *где* $y_0^{(i)}$ *– произвольные (заданные) числа.*

4^0. Линейный оператор. Линейная зависимость и независимость функций. а). Левую часть уравнения (9.65) можно рассматривать как результат действия дифференциального оператора

$$\boxed{L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y} \tag{9.49}$$

на функцию y.

Оператор L есть линейный оператор; для доказательства этого утверждения нужно проверить два свойства линейности:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]; \tag{9.49'}$$

$$L[Cy] = CL[y] \quad (C = \mathrm{const}). \tag{9.49''}$$

Оба свойства, очевидно, выполняются, то есть L – линейный оператор.

З а м е ч а н и е. Доказательство (9.49') и (9.49'') основано на свойствах производных любого порядка от произведения константы на функцию и от суммы функций.

Как следствие, из (9.49') и (9.49'') получим:

$$L\left[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} C_k L[y_k], \quad C_k = \mathrm{const}. \tag{9.49'''}$$

З а м е ч а н и е. НЛДУ (9.47) в операторной форме записи имеет следующий вид:

$$\boxed{L[y] = f(x),} \tag{9.47'}$$

а ОЛДУ (9.48) –

$$\boxed{L[y] = 0.} \tag{9.48'}$$

б) В теории линейных уравнений (и не только дифференциальных) большую роль играет понятие линейной зависимости и независимости функций. Напомним здесь эти определения.

Из курса линейной алгебры известно, что *сумма произведений скалярных величин на функции, определенные на одном и том же промежутке* $a < x < b$

$$\boxed{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),} \qquad (9.50)$$

называется линейной комбинацией функций.

О п р е д е л е н и е. *Функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *называются линейно зависимыми на данном интервале, если существует n таких постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *(среди которых по крайней мере одна отлична от нуля), что линейная комбинация их* (9.50) *тождественно обращается в нуль на этом интервале.*

Если же линейная комбинация (9.50) *тождественно обращается в нуль лишь в случае равенства нулю всех коэффициентов* C_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, *то функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *называются линейно независимыми на данном интервале.*

Отметим два факта:

а) *если одна из функций равна тождественно нулю, то все функции* $y_i(x)$ *линейно зависимы*;

б) *если (n-1) функций линейно зависимы, то добавление к ним новой функции не нарушает их линейной зависимости.*

Доказательства этих фактов очевидны. Приведем примеры.

1. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на любом интервале. Действительно, равенство

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{n+1} x^n = 0$$

может выполняться при всех значениях x из рассматриваемого интервала лишь в том случае, если все коэффициенты C_i многочлена n-го порядка равны нулю (опираемся на основную теорему алгебры: многочлен может иметь лишь определенное его порядком число корней).

2. Функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы (в любом интервале), если все числа λ_i различны.

Ограничимся лишь идеей доказательства. Предположим, что две функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, линейно зависимы, то есть линейная комбинация

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \equiv 0$$

и при этом, например, $C_2 \neq 0$. В таком случае из тождества следовало бы, что

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = -\frac{C_2}{C_1} = \text{const}$$

– функция, зависящая от x, равна постоянной, что невозможно.

По методу полной индукции этот результат распространяется на любое число n таких функций.

3. Функции

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{n_2} e^{\lambda_2 x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \dots, x^{n_k} e^{\lambda_k x}, \end{gathered}$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ – целые неотрицательные числа, линейно независимы в любом интервале (доказательство можно провести методом от противного; здесь его не приводим).

4. Функции e^{4x}, $\sin^2 x$, 1, $\cos^2 x$, $x^5 - 10$ линейно зависимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо линейная комбинация

$$C_1 e^{4x} + C_2 \sin^2 x + C_3 \cdot 1) + C_4 \cos^2 x + C_5 \left(x^5 - 10\right) =$$

$$= \left| \text{при } C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1, C_4 = 1, C_5 = 0 \right| =$$

$$= 0e^{4x} + \sin^2 x - 1 + \cos^2 x + 0(x^5 - 10) \equiv 0$$

и при этом существует отличный от нуля коэффициент (например, при функции $\sin^2 x$).

5^0. Определитель Вронского. Свойства, применение. В теории и практике линейных дифференциальных уравнений большую роль играет определитель Вронского (вронскиан).

О п р е д е л е н и е. *Определителем Вронского системы из n определенных и непрерывных на* (a,b) *функций* $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$, *имеющих на этом интервале* (*n-1*) *непрерывные производные, называется определитель n-го порядка*

$$\boxed{W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.} \quad (9.51)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.6. *Определитель Вронского системы из n линейно зависимых на интервале* (a,b) *функций* $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *в любой точке* $x_0\in(a,b)$ *обращается в нуль (и, следовательно, тождественно на* (a,b) *равен нулю).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,$ $y_n(x)$, линейно зависимы, то линейная комбинация их равна нулю тождественно

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)\equiv 0$$

$\forall x\in(a,b)$; при этом также $\exists C_i\neq 0$.

Дифференцируя тождество (*n*-1) раз по *x*, придем к системе уравнений

$$C_1y_1^{(k)}+C_2y_2^{(k)}+\ldots+C_ny_n^{(k)}\equiv 0, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Эта однородная система из *n* линейных алгебраических уравнений имеет по условию решение, отличное от нулевого (не все C_i равны нулю). Отсюда следует, что определитель системы – определитель Вронского – равен нулю в каждой точке интервала (a,b).

З а м е ч а н и е. Невыполнение необходимого условия линейной зависимости *n* функций является достаточным условием их линейной независимости.

Имеет место теорема.

Теорема 9.7. *Если определитель Вронского $W(x)$ системы n функций не равен тождественно нулю в некотором интервале, то эти функции линейно независимы в этом интервале.*

З а м е ч а н и е. Теоремы, обратные приведенным выше, не верны: линейная независимость системы функций в некотором интервале может сопровождаться тождественным обращением в нуль ее определителя Вронского в том же интервале– можно было бы привести соответствующие примеры.

9.3.2. Общая теория ОЛДУ *n*-го порядка

1^0. Свойства ОЛДУ *n*-го порядка. Перечислим свойства решений однородных линейных уравнений *n*-го порядка.

С в о й с т в о 1. *Если* y_1 *– решение уравнения* (9.48), *то* Cy_1 *также решение*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве следует воспользоваться операторной (9.48’) записью ОЛДУ и свойством (9.49”) оператора L.

С в о й с т в о 2**.** *Если* y_1 *и* y_2 *– решения уравнения* (9.48), *то и алгебраическая сумма* $y = y_1 \pm y_2$ *также решение этого уравнения.*

Доказательство утверждения основано на свойстве (9.49’) оператора L.

С л е д с т в и е. *Линейная комбинация* (9.50) *k* решений y_1, y_2,…, y_k ОЛДУ (9.48) – также решение этого уравнения.

С в о й с т в о 3**.** *Если* ОЛДУ (9.48) *с действительными коэффициентами* $p_i(x)$ *имеет комплексное решение* $y = u(x) + iv(x)$*, то и действительная* $u(x)$ *и мнимая* $v(x)$ *части его также являются решениями* (9.48).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $L[u + iv] = 0$. По свойствам (9.49’) и (9.49”) линейного оператора имеем

$$L[u + iv] = L[u] + iL[v] = 0 \ (= 0 + 0i),$$

откуда на основании определения равенства комплексных чисел заключаем, что

$$L[u]=0,\ L[v]=0$$

– u и v – решения ОЛДУ.

С в о й с т в о 4. *Определитель Вронского* $W(x)$ *n линейно независимых в интервале* (a,b) *решений* $y_1,\ y_2,...,y_n$ *уравнения* (9.48) *не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию из свойств 1 и 2 функция

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x) \tag{9.52}$$

является решением ОЛДУ (9.48) при любых значениях C_i.

Для произвольного значения $x_0\in(a,b)$ зададим нулевые начальные условия

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,...,y^{(n-1)}(x_0)=0\ . \tag{9.53}$$

Согласно теореме существования (см. п.9.1.3) решением, удовлетворяющим условиям (9.53), может быть тривиальное $y\equiv 0$ – и, следовательно, только оно в силу единственности решения.

Так как по условию $y_1,\ y_2,...,y_n$ – n линейно независимых в интервале (a,b) функций–решений уравнения (9.48), то тривиальное решение получается из (9.52) лишь при значениях $C_1=C_2=...=C_n=0$.

Выделим эти же значения $C_1,\ C_2,....,C_n$, составив для них систему алгебраических уравнений. Для этого продифференцируем (9.52) (n-1) раз по x, подставим в полученные соотношения и (9.52) значение $x=x_0$. Тогда (нулевые) начальные условия (9.53) дадут для определения коэффициентов C_i систему n линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+...+C_ny_n(x_0)=0; \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+...+C_ny_n'(x_0)=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0. \end{cases} \tag{9.53'}$$

Определитель системы (9.53’) есть значение определителя Вронского $W(x)$ в точке $x = x_0$.

Вследствие того, что система (9.53’) должна иметь единственное (тривиальное) решение: $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$, определитель $W(x_0) \neq 0$. Так как x_0 – произвольная точка интервала (a, b), то определитель Вронского $W(x) \neq 0$ ни в одной точке этого интервала.

2^0. Фундаментальные системы решений ОЛДУ. Структура его общего решения. Введем определение, играющее важную роль в теории линейных дифференциальных уравнений.

О п р е д е л е н и е. *Всякая система из n линейно независимых частных решений* ОЛДУ (9.48) *называется фундаментальной системой решений* (этого уравнения).

Теорема 9.7. *Любое* ОЛДУ *n-го порядка имеет фундаментальную систему решений* (опустим доказательство).

З а м е ч а н и е. Для данного ОЛДУ существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений, что следует из теоремы: *всякое линейное неособенное преобразование фундаментальной системы также является фундаментальной системой*.

Знание какой-либо фундаментальной системы решений данного ОЛДУ позволяет построить его общее решение. Приведем основную в теории ОЛДУ теорему – *теорему о структуре общего решения ОЛДУ*.

Теорема 9.8. *Общее решение* ОЛДУ *n-го порядка есть линейная комбинация* (9.50)

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)} \tag{9.54}$$

всех частных решений какой-либо его фундаментальной системы $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) функция *y*, определяемая (9.50), очевидно, решение (9.48) (см. свойства 1,2 решений ОЛДУ, следствие);

2) покажем, что решение (9.50) – общее, то есть что любое решение *y* уравнения (9.48) получается из формулы (9.50) при некоторых значениях постоянных C_i.

Пусть $x = x_0$ произвольная точка интервала (a,b), где коэффициенты уравнения (9.48) непрерывны.

Зададим произвольные начальные условия (9.33) и потребуем, чтобы решение (9.50) удовлетворяло им. Тогда получим систему из *n* линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_i:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0'; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{9.54'}$$

Определителем системы (9.54’)является определитель Вронского $W(x_0)$ фундаментальной системы решений ОЛДУ, не обращающийся в нуль ни в одной точке интервала (a,b), в частности, в точке $x = x_0$.

Таким образом, система (9.54’) имеет решение, то есть для любых начальных условий постоянные C_i можно подобрать; из этого следует, что (9.54) – общее решение ОЛДУ (9.48).

С л е д с т в и е. *Максимальное число линейно независимых решений* ОЛДУ *равно его порядку*.

Для доказательства нужно перенести все члены (9.50) в одну часть. Отсюда следует, что $(n+1)$ решений ОЛДУ *n*-го порядка всегда линейно зависимы.

Теорема 9.9. *Два различные* ОЛДУ *n-го порядка не могут иметь общие фундаментальные системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть это не так и $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ – общая фундаментальная система решений уравнений

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

и

$$y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + q_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + q_n(x) y = 0.$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим, что эти же функции являются *n* линейно независимыми решениями уравнения (*n*-1)-го порядка:

$$[p_1(x)-q_1(x)]y^{(n-1)}+[p_2(x)-q_2(x)]y^{(n-2)}+\ldots+[p_n(x)-q_n(x)]y=0$$

,

что противоречит следствию из основной теоремы о структуре общего решения ОЛДУ.

9.3.3. Неоднородные линейные уравнения *n*-го порядка

Обратимся к неоднородному линейному уравнению (9.47)

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x),$$

где $p_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции от $x\in(a,b)$.

1⁰. Свойства решений НЛДУ. Приведем свойства решений неоднородных линейных уравнений *n*-го порядка.

С в о й с т в о 1. *Сумма* $\tilde{y}_н+\tilde{y}_о$ *решения* $\tilde{y}_н$ НЛДУ $\left(L[\tilde{y}_н]\equiv f(x)\right)$ *и решения* $\tilde{y}_о$ *соответствующего ему* ОЛДУ $\left(L[\tilde{y}_0]\equiv 0\right)$ *является решением* НЛДУ (9.47).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя операторную запись (9.47’), получим

$$L[\tilde{y}_н+\tilde{y}_о]=L[\tilde{y}_н]+L[\tilde{y}_о]\equiv f(x).$$

С в о й с т в о 2. *Если функции* y_1 *и* y_2 *являются соответственно решениями уравнений* $L[y]=f_1(x)$ *и* $L[y]=f_2(x)$, *то функция*

$$y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$$

является решением НЛДУ *вида*

$$L[y]=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем по свойству линейности оператора L:

$$L[\alpha_1y_1+\alpha_2y_2]=L[\alpha_1y_1]+L[\alpha_2y_2]=\alpha_1L[y_1]+\alpha_2L[y_2]=$$

$$=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\,.$$

З а м е ч а н и е. Это свойство носит название *принципа суперпозиции решений* НЛДУ; оно справедливо для любой конечной комбинации правых частей.

С л е д с т в и е. *Если* $p_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *– действительные функции,* $y=u(x)+iv(x)$ *является* (*комплексным*) *решением уравнения* $L[y]=f_1(x)+if_2(x)$, *то и действительная* $u(x)$ *и мнимая* $v(x)$ *части его являются решениями уравнений* $L[y]=f_1(x)$ *и* $L[y]=f_2(x)$ *соответственно.*

Центральное свойство в теории НЛДУ – теорему о структуре его общего решения – выделим в отдельный пункт.

2^0. Структура общего решения НЛДУ. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 9.10. *Общее решение* НЛДУ *n-го порядка есть сумма общего решения* $y_{\text{о.о}}$ *соответствующего ему* ОЛДУ (9.48) *и какого-либо частного решения* $y_{\text{ч}}$ НЛДУ (9.47):

$$\boxed{y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+y_{\text{ч}}\,.} \tag{9.55}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) по свойству 1 (см.п.1^0) определяемая формулой (9.55) функция – решение НЛДУ (9.47);

б) покажем, что это решение – общее (то есть формула (9.55) содержит все решения).

В соотношение (9.55) входит *n* произвольных постоянных. Покажем, что из него при надлежащем выборе постоянных $C_1, C_2,\ldots,C_n$ можно получить решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям (9.33).

Для этого функцию *y*, определяемую выражением (9.55), дифференцируем (*n*-1) раз по *x*; подставляя в (9.55) и соотношения, полученные из него дифференцированием, $x=x_0$, придем к системе из *n* линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения постоянных C_1, $C_2,\ldots,C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_ч(x_0); \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_ч'(x_0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_ч^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \quad (9.56$$

определитель которой $W(x_0)$ есть определитель Вронского в точке $x_0 \in (a,b)$.

Так как система частных решений ОЛДУ $y_1, y_2, ..., y_n$ фундаментальна, то $W(x_0) \neq 0$ и, следовательно, система (9.56) определенна, имеет единственное решение $C_1, C_2, ..., C_n$.

На основании этого заключаем, что (9.56) – общее решение НЛДУ (9.47).

Пример 21. «Построить» общее решение уравнения $y'' + 4y = 4x$. Найти частное решение, если при x=0 дано, что y=3, y'=4.

Р е ш е н и е. 1) Проверим, что уравнение имеет частное решение $y_ч = x$:

$$y_ч' = 1,\ y_ч'' = 0;\ y_ч'' + 4\ y_ч = 0 + 4x \equiv 4x.$$

Аналогично убеждаемся, что соответствующее ему ОЛДУ имеет два частных решения

$$y_1 = \cos 2x \text{ и } y_2 = \sin 2x$$

(которые, очевидно, линейно независимы) и, следовательно, общее решение НЛДУ может быть записано по формуле (9.55):

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x. \qquad (*)$$

2) Пусть при x=0 дано, что y=3, y'=4. Подставляя эти данные в общее решение (*) и его производную

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + 1,$$

для определения постоянных C_1 и C_2 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 0 \\ 4 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 + 1 \end{cases}$$

откуда C_1=3; C_2=2

и частное решение задачи Коши есть функция

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x + x.$$

3⁰. Метод вариации произвольных постоянных. Как следует из п.2^0, для решения НЛДУ достаточно знать фундаментальную систему решений соответствующего ему ОЛДУ и одно частное решение НЛДУ.

Излагаемый здесь *метод вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*) позволяет находить общее решение уравнения (9.47) в случаях, когда известно общее решение однородного уравнения (9.48).

Теорема 9.11. *По известной фундаментальной системе решений* ОЛДУ *общее решение* НЛДУ *может быть найдено квадратурами (интегрированием функций).*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальная система решений ОЛДУ (9.48); тогда (формула (9.54))

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

есть его общее решение.

Рассматривая в (9.54) постоянные C_i как функции от x (это называется *варьированием произвольных постоянных*):

$$C_i = C_i(x),$$

определим их так, чтобы выражение

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n \qquad (9.54')$$

удовлетворяло НЛДУ (9.47).

Таким образом, имеем n подлежащих определению функций $C_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ и лишь одно условие – уравнение (9.47), которому они должны удовлетворять. Еще (n-1) условие необходимо сформулировать.

Подчиним эти функции (n-1) условию, при выполнении которых производные $y', y'', ..., y^{(n-1)}$ при искомых функциях $C_1(x)$, $C_2(x), ..., C_n(x)$ будут иметь такой же вид, какой они имели бы при постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, то есть

$$\begin{cases} y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'; \\ y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{9.57}$$

– производные имеют такой вид – как в (9.57), – если

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0. \end{cases} \tag{9.58}$$

Вычислим производную n-го порядка:

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} \tag{9.57'}$$

Подставляя выражения (9.57) и (9.57’) производных в уравнение (9.47) и учитывая, что $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений ОЛДУ (9.48), найдем последнее n-ое условие, которому должны удовлетворять производные неизвестных функций $C_1(x),\ C_2(x), \ldots,\ C_n(x)$:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \tag{9.58'}$$

Из системы уравнений (9.58), (9.58’), определитель которой при независимости решений $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$ не равен нулю, алгебраически выражаем производные искомых функций:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x), \ldots,\ C_n' = \varphi_n(x),$$

откуда квадратурами находим:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + C_1, \qquad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + C_2\ , \ldots,$$

$$C_n(x) = \int \varphi_n(x) dx + C_n\,,$$

где $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n$ – («настоящие») произвольные постоянные.

Подставляя полученные выражения $C_1(x),\ C_2(x),\dots,\ C_n(x)$ в (9.54), найдем решение уравнения (9.47) – *интегрирование НЛДУ n-го порядка может быть сведено к разысканию n независимых частных решений соответствующего ему ОЛДУ и к квадратурам.*

З а м е ч а н и е . Если в формулах (*) произвольные постоянные принять равными нулю и затем подставить найденные $C_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ в (9.54), то получим $y_{\text{ч}}$ НЛДУ, а тогда, по теореме общее решение НЛДУ имеет структуру (9.55).

Пример 22. Решить уравнение $xy'' - y' = 2x^2$.

Р е ш е н и е. Соответствующее заданному НЛДУ однородное уравнение

$$xy'' - y' = 0$$

может быть проинтегрировано как уравнение (9.44), допускающее понижение порядка.

Заменяя здесь $y' = z,\quad y'' = z'$, приходим к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$xz' - z = 0 .$$

Далее, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем

$$z = C_1 x \quad \text{или} \quad y' = \overline{C_1} x ,$$

откуда интегрированием находим общее решение ОЛДУ:

$$y = C_1 + C_2 x^2 .$$

В качестве фундаментальной системы решений ОЛДУ возьмем функции $y_1 = 1$ и $y_2 = x^2$.

Для отыскания общего решения НЛДУ методом вариации произвольных постоянных полагаем

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$$

или

$$y = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)\cdot x^2 .$$

Обратим внимание на то, что *система* (9.58), (9.58’) *выведена в предположении, что коэффициент при старшей производной равен единице.* Учитывая это, запишем уравнение в виде

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 2x,$$

откуда $f(x) = 2x$. Составляем систему (9.58), (9.58’) для определения искомых функций $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1' + C_2' x^2 = 0, \quad 2C_2' x = 2x.$$

Из нее находим:

$$C_2' = 1, \quad C_2(x) = x + C_2; \quad C_1' = -x^2, \quad C_1(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1.$$

Общее решение исходного уравнения есть

$$y = \left(-\frac{x^3}{3} + C_1 \right) \cdot 1 + (x + C_2) x^2$$

или

$$y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{2x^3}{3}.$$

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n – го порядка (однородного и неоднородного). Какое ОЛДУ называется соответствующим НЛДУ?

2. Какие преобразования независимой и зависимой переменных сохраняют тип уравнения n – го порядка – его линейность?

3. Как формулируются достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n – го порядка?

4. Докажите, что дифференциальный оператор, действующий на левую часть линейного дифференциального уравнения, есть линейный оператор. Запишите в операторной форме ОЛДУ и НЛДУ.

5. Что называется линейной комбинацией функций? Как определяются линейно зависимые и линейно независимые системы функций? Сформулируйте свойства линейно зависимых и независимых систем функций. Приведите примеры линейно независимых систем функций.

6. Что называется «определителем Вронского» системы функций $y_1, y_2, ..., y_n$? Чему равен определитель Вронского линейно зависимой (на некотором интервале (a,b)) системы функций? Сформулируйте теорему о связи определителя Вронского с системой линейно независимых на интервале функций.

7. Перечислите свойства решений ОЛДУ. Какова связь определителя Вронского с линейно независимой системой решений $y_1, y_2, ..., y_n$ ОЛДУ $n-$го порядка?

8. Как определяется для ОЛДУ фундаментальная система решений (ФСР) его? Сформулируйте теорему существования ФСР для ОЛДУ $n-$го порядка. Может ли линейное неособенное преобразование ФСР нарушить ее фундаментальность?

9. Приведите теорему о структуре общего решения ОЛДУ.

10. Чем определяется максимальное число линейно независимых решений ОЛДУ $n-$го порядка? Могут ли два различных ОЛДУ иметь общие фундаментальные системы? Может ли фундаментальная система решений определить дифференциальное уравнение. Если да, то как это делается?

11. Приведите свойства решений НЛДУ. В чем заключается принцип суперпозиции решений?

12. Сформулируйте теорему о структуре общего решения НЛДУ $n-$го порядка.

13. В чем заключается метод вариации произвольных постоянных интегрирования НЛДУ $n-$го порядка? Приведите пример.

§ 9.4. Линейные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Из теории ОЛДУ следует, что для определения *общего решения* подобного уравнения достаточно построить его *фундаментальную систему решений*.

В общем случае уравнений с переменными коэффициентами эта задача не решена; задача оказывается выполнимой и притом в элементарных функциях без квадратур (!), если коэффициенты уравнения суть постоянные величины.

9.4.1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (p_i = \text{const}).} \quad (9.59)$$

Покажем, что это уравнение всегда может быть проинтегрировано в элементарных функциях.

Метод Эйлера. Построим фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций

$$\boxed{y = e^{\lambda x},} \qquad (9.60)$$

где $\lambda = \text{const}$ – некоторое число, которое нужно подобрать так, чтобы (9.60) было решением (9.59).

Подставляя (9.60) в левую часть уравнения (9.59), получим

$$\boxed{L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n\right) = P(\lambda) e^{\lambda x},} \qquad (9.61)$$

где через $P(\lambda)$ обозначен стоящий в скобках многочлен от λ.

Из (9.61) видно, что функция (9.60) – решение уравнения (9.59), если

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0} \qquad (9.62)$$

– λ должно быть корнем уравнения (9.62).

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни – *характеристическими числами уравнения* (9.62).

Иначе, *алгебраическое уравнение n-й степени определяет те значения* λ, *при которых* (9.60) *является решением уравнения* (9.59).

Возможны следующие случаи.

1) **уравнение (9.62) имеет *n* различных действительных корней** $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. В соответствии с этим имеем *n* частных решений уравнения (9.59)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{\lambda_n x}. \qquad (9.63)$$

Функции (9.63) линейно независимы (см. п. 9.3.1, 4^0, пример 2) и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений ОЛДУ (9.59).

Общее решение запишется в виде (C_i – произвольные постоянные)

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad (9.64)$$

Пример 23. Решить уравнение $y''' - 4y' = 0$.

Р е ш е н и е. Заданное уравнение есть дифференциальное уравнение третьего порядка, линейное, однородное, с постоянными коэффициентами.

По методу Эйлера решение ищем в виде $y = e^{\lambda x}$; характеристическое уравнение (9.62) имеет вид:

$$\lambda^3 - 4\lambda = 0.$$

Уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -2, \; \lambda_3 = 2;$$

им соответствуют частные решения

$$y_1 = 1, \; y_2 = e^{-2x}, \; y_3 = e^{2x}.$$

Общее решение (9.64)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

или

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}. \quad \#$$

2) **корни уравнения (9.62) различны, но среди них есть комплексные, например,** $\lambda = a + ib$.

При вещественных коэффициентах p_i уравнение (9.62) имеет и сопряженный с ним корень $\overline{\lambda} = a - ib$. Этим корням соответствуют два комплексных решения

$$\widetilde{y}_1 = e^{(a+ib)x}, \ \widetilde{y}_2 = e^{(a-ib)x}.$$

Пользуясь свойствами решений ОЛДУ (см. п. 9.3.2) вместо этих решений введем два других (вещественных), используя формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$y_1 = \frac{1}{2}(\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2) = e^{ax}\,\frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx}) = e^{ax}\cos bx;$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(\widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2) = e^{ax}\,\frac{1}{2i}(e^{ibx} - e^{-ibx}) = e^{ax}\sin bx.$$

Таким образом, комплексно сопряженным корням $\lambda = a \pm ib$ характеристического уравнения соответствуют два действительных решения

$$y_1 = e^{ax}\cos bx; \quad y_2 = e^{ax}\sin bx, \tag{9.65}$$

очевидно, линейно независимых.

Пример 24. Решить уравнение $y''' - 8y = 0$.

Р е ш е н и е. Полагаем $y = e^{\lambda x}$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^3 - 8 = 0$ или $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$. Корни его

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3} \ (a = -1, b = \sqrt{3}),$$

им соответствуют частные решения

$$y_1 = e^{2x}, \ y_2 = e^{-x}\cos\sqrt{3}x, \ y_3 = e^{-x}\sin\sqrt{3}x \ .$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x).$$

3) **среди корней характеристического уравнения (9.67) имеются кратные корни.** Количество различных чисел λ_1, $\lambda_2,\ldots$ в таком случае будет меньше n; соответственно число линейно независимых частных решений (9.60) также меньше n.

Чтобы найти недостающие решения, соответствующие кратным корням, поступим следующим образом.

Пусть λ_1 есть k кратный корень уравнения (9.62) – вещественный или комплексный. В этом случае, как известно из алгебры

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = P''(\lambda_1) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{9.66}$$

Продифференцируем тождество (9.61) по λ:

$$L[xe^{\lambda x}] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)e^{\lambda x}x. \tag{9.67}$$

Подставляя в соотношение (9.67) $\lambda = \lambda_1$, с учетом (9.66) будем иметь

$$L[xe^{\lambda_1 x}] = 0,$$

что означает, что функция $y = xe^{\lambda_1 x}$ является решением уравнения (9.59).

Дифференцируем тождество (9.67) по λ; в результате получим

$$L[x^2 e^{\lambda x}] = P''(\lambda)e^{\lambda x} + 2P'(\lambda)xe^{\lambda x} + P(\lambda)e^{\lambda x}x^2. \tag{9.68}$$

Подстановка в (9.68) $\lambda = \lambda_1$ с учетом (9.66) дает

$$L[x^2 e^{\lambda_1 x}] = 0$$

и, следовательно, функция $y = x^2 e^{\lambda_1 x}$ является решением ОЛДУ (9.59).

Продолжая процесс, после $(k-1)$-кратного дифференцирования по λ получим, что $y=x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ является решением (9.59)

Решения

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=xe^{\lambda_1 x},\ldots,\quad y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{9.69}$$

линейно независимы (см.п.9.3.1, пример 3) в интервале $(-\infty,+\infty)$.

а) Если $\lambda=\lambda_1$ – вещественный корень, то решения (9.69) также вещественны. Таким образом, всякому вещественному корню λ_1 кратности k соответствует k вещественных линейно независимых решений вида (9.69).

б) Комплексно сопряженным корням $a+ib$ кратности k соответствует k решений (комплексных)

$$e^{(a+ib)x},\quad xe^{(a+ib)x},\ldots,\quad x^{k-1}e^{(a+ib)x}.$$

Отделяя в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ вещественных решений

$$e^{ax}\cos bx,\quad xe^{ax}\cos bx,\ldots,\quad x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\quad xe^{ax}\sin bx,\ldots,\quad x^{k-1}e^{ax}\sin bx, \tag{9.69'}$$

очевидно, линейно независимых.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что сопряженный к корню $a+ib$ корень $a-ib$ не порождает новых линейно независимых решений.

Таким образом, каждой паре сопряженных комплексных корней $\lambda=a\pm ib$ кратности k соответствует $2k$ вещественных линейно независимых решения вида (9.69').

Пример 25. Решить уравнение

$$y^{(5)}-y^{(4)}+8y'''-8y''+16y'-16y=0\,.$$

Р е ш е н и е. Полагаем $y=e^{\lambda x}$. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5-\lambda^4+8\lambda^3-8\lambda^2+16\lambda-16=0$$

можно преобразовать в $(\lambda-1)(\lambda^2+4)^2=0$ и, следовательно, оно имеет один простой корень $\lambda_1=1$ и два двукратных комплексно сопряженных корня $\lambda_2=\lambda_3=2i,\ \lambda_4=\lambda_5=-2i\quad (a=0,\ b=2)$.

Следовательно, система функций

$$e^x,\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x$$

образует фундаментальную систему решений; поэтому

$$y=C_1e^x+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$$

есть общее решение задачи. #

Приведем сводную таблицу частных решений для соответствующих корней характеристического уравнения (9.62).

Таблица 9.1.

Корни характеристического уравнения	Частные решения (действительные)
λ_I – простой действительный корень	$y_i=e^{\lambda_i x}$ (одно решение)
λ_I –действительный корень кратности k	$y_1=e^{\lambda_i x}$, $y_2=xe^{\lambda_i x},\ldots,$ $y_k=x^{k-1}e^{\lambda_i x}$ (k решений)
$\lambda=a\pm ib$ – простые комплексные корни	$y_1=e^{ax}\cos bx,\ y_2=e^{ax}\sin bx$ (два решения)
$\lambda=a\pm ib$ – комплексные корни кратности k	$y_1=e^{ax}\cos bx,\ y_2=e^{ax}\sin bx$, $y_3=xe^{ax}\cos bx,\ y_4=xe^{ax}\sin bx$ … … … … … … … … … … … $y_{2k-1}=x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$ $y_{2k}=x^{k-1}e^{ax}\sin bx$ (2 k решений)

9.4.2. Неоднородные линейные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение (9.47) с постоянными коэффициентами ($p_i = \text{const}$):

$$\boxed{L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad (p_i = \text{const})} \quad (9.70$$

О п р е д е л е н и е. *Правой частью специального вида называется функция*

$$\boxed{f(x) = e^{ax}[Q_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_l(x)\sin bx],} \qquad (9.71)$$

где $Q_k(x)$, $\widetilde{Q}_l(x)$ *– некоторые (заданные) многочлены степени k и l.*

Решение НЛДУ (9.70) находят в два этапа (следуя теореме 9.10 о структуре общего решения НЛДУ):

1) Ищется решение $y_{\text{о.о}}$ соответствующего однородного уравнения (при $f(x) = 0$) (отыскание $y_{\text{о.о}}$ изложено в п. 9.4.1);

2) Ищется какое-нибудь частное решение $y_{\text{ч}}$ неоднородного уравнения.

Общее решение уравнения (9.75) получается в виде суммы: $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч}}$.

На втором этапе можно воспользоваться изложенным в п. 9.3.3 методом вариации произвольных постоянных.

Здесь для нахождения частного решения $y_{\text{ч}}$ рассмотрим **метод неопределенных коэффициентов**.

1^0. Изложение метода начнем с правой части

$$\boxed{f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,} \qquad (9.72)$$

т.е. с многочлена *m*-го порядка.

а) Предположим, что коэффициент p_n уравнения (9.70) отличен от нуля: $p_n \neq 0$.

Тогда этому уравнению удовлетворяет многочлен той же степени, что и функция (9.72): положим

$$\boxed{y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m.} \qquad (9.72')$$

Вычисляя производные y', y'',..., $y^{(n)}$ и подставляя их и функцию y (9.72') в уравнение (9.70) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, начиная с x^m, получим

$$a_0 = p_n \cdot b_0,$$
$$a_1 = p_n \cdot b_1 + mp_{n-1} \cdot b_0,$$
$$a_2 = p_n \cdot b_2 + (m-1)p_{n-1} \cdot b_1 + m(m-1)p_{n-2} \cdot b_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В предположении, что $p_n \neq 0$, из первого уравнения найдем b_0, из второго b_1, из третьего b_2 и т.д.

б) Пусть теперь $p_n = 0$, причем и еще несколько коэффициентов подряд могут обратиться в нуль, например,

$$p_{n-1} = 0, p_{n-2} = 0, ..., p_{n-s+1} = 0,$$

так что уравнение (9.70) имеет вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-s} y^{(s)} = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m, \quad (9.73)$$

где $p_{n-s} \neq 0$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\lambda^n + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-s}\lambda^s = 0$$
$$\text{или } \lambda^s(\lambda^{n-s} + p_1\lambda^{n-s-1} + ... + p_{n-s} = 0$$

т.е. $\lambda = 0$ – корень кратности s.

Полагая $z = y^{(s)}$, придем к уравнению:

$$z^{(n-s)} + p_1 z^{(n-s-1)} + ... + p_{n-s} \cdot z = a_0 x^m + ... + a_m,$$

которому, на основании вышеизложенного, удовлетворяет многочлен (9.72') степени m (коэффициент при z не равен нулю); из уравнения $y^{(s)} = z$ следует, что y есть многочлен степени $m+s$, который можно взять в виде

$$\boxed{y = b_0 x^{m+s} + b_1 x^{m+s-1} + \ldots + b_m x^s = x^s P_m(x),} \qquad (9.79)$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, потому что при определении y по данному z из уравнения $y^{(s)} = z$ коэффициенты при x^{s-1}, x^{s-2},..., x^0, очевидно, остаются произвольными, и при разыскании частного решения y все эти коэффициенты можно взять равными нулю.

Пример 26. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = x + 4.$$

Р е ш е н и е. Ищем решение в виде $y = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч}}$.

а) $y_{\text{о.о}}$ – общее решение ОЛДУ $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0$ ищем методом Эйлера, положив $y = e^{\lambda x}$; соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ или $\lambda^2(\lambda+1)^2 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = 0$ – двукратный корень, $\lambda_2 = -1$ – двукратный корень.

Тогда, следуя (9.69), имеем фундаментальную систему решений: $y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x} = x$, $y_3 = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$, $y_4 = xe^{\lambda_2 x} = xe^{-x}$ и

$$y_{\text{о.о}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}.$$

б) Так как $f(x) = x + 1 = Q_1(x)$ ($m = 1$) и число 0 – двукратный корень характеристического уравнения, то, следуя (9.74), частное решение $y_{\text{ч}}$ нужно искать в виде ($s = 2$):

$$y_{\text{ч}} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Далее имеем:

$$y'_{\text{ч}} = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_{\text{ч}} = 6Ax + 2B; \quad y'''_{\text{ч}} = 6A; \quad y^{\mathrm{IV}}_{\text{ч}} = 0$$

и после подстановки $y_{\text{ч}}$ и его производных в исходное уравнение, получаем

$$12A + 2B + 6Ax = x + 4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях предыдущего уравнения, имеем:

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 6A=1, \\ x^0 & 12A+2B=4, \end{array}$$

откуда $A=1/6$; $B=1$.

Искомое частное решение: $y_ч = \dfrac{x^3}{6} + x^2$.

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + \dfrac{x^3}{6} + x^2$. #

2^0. Рассмотрим случай правой части вида

$$\boxed{f(x) = e^{ax}(a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m)\,.} \qquad (9.75)$$

Уравнение (9.70) преобразуем подстановкой $y = ze^{ax}$; имеем

$y' = e^{ax}(az + z')$; $y'' = e^{ax}(a^2z + 2az' + z'')$;

$y''' = e^{ax}(a^3z + 3a^2z' + 3az'' + z''')$;

…………………………………………………………………………

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[a^nz + na^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}z'' + ... + naz^{(n-1)} + z^{(n)}\right].$$

Подставляя полученные производные в данное уравнение, сокращая на e^{ax}, найдем, что коэффициент при z равен

$$a^n + p_1a^{n-1} + ... + p_{n-2}a^2 + p_{n-1}a + p_n = P(a),$$

т.е. левой части характеристического уравнения; коэффициент при z' равен

$$na^{n-1} + p_1(n-1)a^{n-2} + ... + 2p_{n-2}a + p_{n-1} = P'(a),$$

коэффициент при z'' равен $\dfrac{P''(a)}{2!}$ и т.д.; при $z^{(n)}$ коэффициент равен 1.

Преобразованное уравнение имеет вид

$$z^{(n)} + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}z^{(n-1)} + ... + P'(a)z' + P(a)z = a_0x^m + ... + a_m\,. \quad (9.76)$$

На основании вышеизложенного заключаем, что этому уравнению удовлетворяет многочлен степени m (если $P(a) \neq 0$)

$$z = b_0 x^m + ... + b_m,$$

а, следовательно, уравнению (9.70) удовлетворяет функция

$$\boxed{y = e^{ax}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m).} \qquad (9.77)$$

Если же a есть *корень кратности* s характеристического уравнения, т.е. если

$$P(a) = 0,\ \ P'(a) = 0, ...,\ \ P^{(s-1)}(a) = 0, \text{ но } P^{(s)}(a) \neq 0,$$

то

$$z = x^s (b_0 x^m + ... + b_m),$$

и уравнению (9.70) удовлетворяет решение вида

$$\boxed{y = x^s e^{ax} \cdot P_m(x),} \qquad (9.77')$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m с неизвестными коэффициентами b_i, подлежащими определению.

Практически выражение (9.77) непосредственно подставляют в уравнение (9.70), не переходя к уравнению (9.76).

3⁰. Случай правой части специального (общего) вида (см. определение (9.71)), может быть сведен к предыдущему заменой функции $\cos bx$, $\sin bx$ показательными по формулам Эйлера. Проделаем это.

Пусть НЛДУ имеет вид

$$L[y] = e^{ax}[Q_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_l(x)\sin bx], \qquad (9.78)$$

где многочлены $Q_k(x)$, $\widetilde{Q}_l(x)$ имеют, вообще говоря, различные степени. Используя формулы Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi;\quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};\ \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

правую часть уравнения (9.78) преобразуем к виду

$$f(x) = e^{(a+ib)x} Q_r(x) + e^{(a-ib)x} \widetilde{Q}_r(x), \qquad (9.79)$$

где $Q_r(x)$, $\widetilde{Q}_r(x)$ – полиномы степени $r = \sup\{k;l\}$.

Используя принцип суперпозиции (см. свойство 2 решений НЛДУ, п. 9.3.3), для каждого из слагаемых (9.79) применим вышеизложенное правило. Возвращаясь к прежнему представлению правой части НЛДУ (уравнение (9.78)), на основании полученных в пп. 1^0 и 2^0 выводов, сформулируем следующее правило:

если $a \pm ib$ *не являются корнями характеристического уравнения* (9.62), *то частное решение* (9.78) *следует искать в виде*

$$y = e^{ax}[R_r(x)\cos bx + \widetilde{R}_r(x)\sin bx],$$

где $R_r(x)$, $\widetilde{R}_r(x)$ *– многочлены с неопределенными коэффициентами степени r, равной наибольшей из степеней k, l;*

если $a \pm ib$ *являются s-кратными корнями характеристического уравнения* (9.62), *частное решение надлежит искать в виде*

$$y = x^s \cdot e^{ax}[R_r(x)\cos bx + \widetilde{R}_r(x)\sin bx].$$

Приведем сводную таблицу видов частных решений для различных видов правых частей НЛДУ с постоянными коэффициентами.

Таблица 9.2.

Вид правой части		Сравнение с корнями характеристического уравнения	Вид частного решения
I	$Q_m(x) = a_0x^m +$ $+ a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$	1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$P_m(x) = b_0x_m +$ $+ b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$
		2. Число 0 – корень характеристического уравнения кратности s	$x^s P_m(x)$
		1. Число a не яв-	$e^{ax}P_m(x)$

II	$e^{ax}Q_m(x)$ (a – действительное)	ляется корнем характеристического уравнения	
		2. Число a – корень характеристического уравнения кратности s	$x^s e^{ax} P_m(x)$
III	$Q_k(x)\cos bx +$ $+\widetilde{Q}_l(x)\sin bx$	1. Числа $\pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения	$R_r(x)\cos bx +$ $+\widetilde{R}_r(x)\sin bx$ $r=\sup\{k;l\}$
		2. Числа $\pm ib$ – корни характеристического уравнения кратности s	$x^s\left[R_r(x)\cos bx +\right.$ $\left.+\widetilde{R}_r(x)\sin bx\right]$
IV	$e^{ax}\left[Q_k(x)\cos bx +\right.$ $\left.+\widetilde{Q}_l(x)\sin bx\right]$	1. Числа $a\pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения	$e^{ax}\left[R_r(x)\cos bx +\right.$ $\left.+\widetilde{R}_r(x)\sin bx\right]$
		2. Числа $a\pm ib$ – корни характеристического уравнения кратности s	$x^s e^{ax}\left[R_r(x)\cos bx +\right.$ $\left.+\widetilde{R}_r(x)\sin bx\right]$

В заключение рассмотрим примеры на определение вида частного решения НЛДУ с правой частью специального вида.

Пример 27. Указать, в каком виде нужно искать частное решение заданного НЛДУ с правой частью специального вида :

1. $y'' - 7y' + 12y = x$. Здесь $f(x) = x = P_1(x)$, число 0 не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$.

Следовательно (см. случай I.1 таблицы 9.2) , частное решение следует искать в виде

$$y = Ax + B \ .$$

2. $y^{\text{IV}} + y''' + y'' = x + 1$. В этом примере $f(x) = x + 1 = P_1(x)$. Нуль является корнем второй кратности характеристического уравнения $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0$.

Частное решение ищем в виде (см. случай I.2 таблицы 9.2)

$$y = x^2 (Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

3. $y''' + y'' = 3xe^x$. Здесь $f(x) = 3xe^x = e^{ax}Q_1(x), a = 1$ – это не корень характеристического уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ (см. случай II.1 таблицы 9.2).

Частное решение ищется в виде:

$$y = (Ax + B)e^x .$$

4. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$. Здесь $f(x) = x^2 e^x = e^{ax}Q_2(x), a = 2$ – корень характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ (или $(\lambda - 2)^2 = 0$) кратности $s = 2$ (см. случай II.1 таблицы 9.2).

Частное решение надлежит искать в виде

$$y = x^2 (Ax^2 + Bx + C)e^{2x} .$$

5. $y''' + y'' = 2x\cos 3x$.Здесь $f(x) = 2x\cos 3x = Q_1(x)\cos 3x, a=0$

,

b =3; Числа $a \pm ib = \pm 3i$ что не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 (\lambda - 1) = 0$ (см. случай III.1 таблицы 9.2).

Частное решение ищется в виде

$$y = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x .$$

6. $y'' + 4y' + 13y = 10xe^{-2x} \cdot \sin 3x$.Здесь $f(x) = e^{ax}\widetilde{Q}_1(x)\sin bx$, $a = -2$, b =3; $a \pm ib = -2 \pm 3i$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ имеет корни $\lambda = -2 \pm 3i$ и, таким образом, частное решение (см. случай IV.2 таблицы 9.2).

$$y = xe^{-2x}\left[(Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x\right].$$

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Запишите ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Как строится его ФСР по методу Эйлера? Какое уравнение называется характеристическим уравнением? Что такое характеристическое число? Как записывается ФСР ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами при а) различных действительных корнях характеристического уравнения? б) наличии кратных корней характеристического уравнения? в) простых комплексно–сопряженных корнях характеристического уравнения?

2. Какая функция называется «правой частью специального вида» НЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами? Запишите ее частные случаи. Сформулируйте общее правило отыскания частного решения НЛДУ с правой частью специального вида.

§ 9.5. Системы линейных дифференциальных уравнений

9.5.1. Введение. Основные понятия. Задача Коши

В нашем курсе мы не занимаемся построением (общей) теории систем дифференциальных уравнений; рассмотрим лишь один (важный) специальный класс *нормальных систем дифференциальных уравнений – систем линейных дифференциальных уравнений.*

О п р е д е л е н и е**.** *Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений* n*–го порядка называется система, состоящая из таких* n *уравнений, в которые неизвестные функции и их производные входят линейно*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{array}} \tag{9.80}$$

З а м е ч а н и е. а) обратим внимание на то, что в каждое уравнение входит лишь одна «своя производная»: б) порядок системы определяется числом входящих в систему уравнений.

Систему (9.80) можно записать в матричной форме; для этого введем обозначения

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \; F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}; \; \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.81}$$

В обозначениях (9.81) система (9.80) примет вид

$$\boxed{\frac{dY}{dx} = PY + F} \qquad (9.82)$$

– одно матричное уравнение (9.82) эквивалентно системе (9.80).

О п р е д е л е н и е. *Решением системы* (9.80) *называется любое множество из* n *функций*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ \ y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), \qquad (9.83)$$

обращающее каждое из уравнений (9.80) *в тождество.*

Сформулируем *задачу Коши* для системы (9.80): *найти решение системы* (9.80), *удовлетворяющее заданным начальным условиям*

$$\text{при } x = x_0 \quad y_1 = y_{10},\ \ y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0}. \qquad (9.84)$$

(здесь y_{10} – постоянные; $i = \overline{1,n}$).

Пусть коэффициенты $p_{ij}(x)$ и функции $f_i(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ непрерывны в интервале (a, b). При таких предположениях доказывается теорема существования и единственности: *система* (9.80) *имеет единственное решение* (9.83), *определенное во всем интервале* (a, b) *и удовлетворяющее начальным условиям* (9.84).

9.5.2. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений (СОЛДУ)

1⁰. Определение, свойства решений СОЛДУ. Определим означенную в заголовке систему.

О п р е д е л е н и е. *Система* (9.80) *называется системой однородных линейных уравнений (СОЛДУ), если все функции* $f_i \equiv 0$.

Запишем это в обычной и матричной формах

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j \quad \left(\frac{dY}{dx} = PY\right).} \qquad (9.85)$$

Коэффициенты $p_{ij}(x)$ предполагаются непрерывными в (a, b).

Изложим свойства линейных систем (9.85). Введем оператор L равенством:

$$\boxed{L[Y] = \frac{dY}{dx} - PY .} \tag{9.86}$$

Оператор L – линейный оператор, ибо, как нетрудно проверить непосредственно, здесь выполняются свойства:

$$\begin{aligned} &\text{а) } L[CY] = CL[Y] \quad (C = \text{const}); \\ &\text{б) } L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2] . \end{aligned} \tag{9.87}$$

Следствием (9.92) является свойство

$$L\left[\sum_{k=1}^{l} C_k Y_k\right] = \sum_{k=1}^{l} C_k L[Y_k], \tag{9.87'}$$

где C_k – произвольные постоянные.

Изложим свойства решений СОЛДУ (9.85). Пусть имеется k решений системы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}; \ldots, \quad Y_k = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ \vdots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix} \tag{9.88}$$

и C_1, C_2,..., C_k – «k» произвольных постоянных.

О п р е д е л е н и е. *Линейной комбинацией системы векторов* $\{Y_i\}$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$ *называется вектор-функция*

$$\boxed{Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_k Y_k .} \tag{9.89}$$

С в о й с т в о 1. *Линейная комбинация* (9.89) *решений однородной системы* (9.85) *также является решением этой системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{Y_i\}(i = \overline{1,k})$ есть k решений системы (9.85):

$$\frac{dY_i}{dx} \equiv PY_i \quad (i=\overline{1,k}) \quad (L[Y_i] \equiv 0). \qquad (9.90)$$

Вследствие (9.87’) и (9.90) получим:

$$L[Y] = L[C_1 Y_1 + \ldots + C_k Y_k] = C_1 L[Y_1] + \ldots + C_k L[Y_k] \equiv 0.$$

Приведем частные случаи этой теоремы:

а) *если* Y – *решение* (9.85), *то и* CY – *решение*;

б) *если* Y_1 *и* Y_2 – *решения* (9.85), *то и* $Y_1 \pm Y_2$ – *решение*.

С в о й с т в о 2. *Если система* (9.85) *с вещественными коэффициентами* $p_{ij}(x)$ *имеет комплексное решение* $Y = Y_1 + iY_2$, *то и действительная* Y_1 *и мнимая* Y_2 *части его также являются решениями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $L[Y_1 + iY_2] \equiv 0$. Из (9.87) линейности оператора L следует, что $L[Y_1] + iL[Y_2] \equiv 0 = 0 + i0$.

По определению равенства матриц заключаем, что

$$L[Y_1] \equiv 0 \text{ и } L[Y_2] \equiv 0,$$

то есть Y_1 и Y_2 – решения.

Изложение других свойств решений СОЛДУ проводится (как и в теории линейных однородных уравнений *n*-го порядка) с использованием понятий линейной зависимости и независимости системы «векторов» («вектор-функций») и др. понятий.

2^0. Определитель Вронского. Структура общего решения СОЛДУ. Понятиям линейной зависимости и независимости системы функций введем аналогичные понятия линейной зависимости и независимости системы вектор-функций.

О п р е д е л е н и е. *Система векторов* Y_1, Y_2,..., Y_k *называется линейно независимой* (*на интервале* (a,b)), *если её линейная комбинация* (9.87) *обращается тождественно в ноль (на этом интервале) лишь при всех* $C_i = 0 \quad (i=\overline{1,k})$.

Иначе она называется линейно зависимой системой.

О п р е д е л е н и е. *Определителем Вронского системы функций* $\{y_{ij}(x),\ i,j=\overline{1,n}\}$, *определенных на* (a,b), *называется определитель*

$$\boxed{W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}}. \qquad (9.91)$$

Приведем свойства определителя Вронского (9.91) и другие свойства решений СОЛДУ (9.85).

1) *Определитель Вронского линейно зависимой системы функций* (9.88) *тождественно равен нулю*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определитель, имеющий линейно зависимые строчки, равен нулю, что и доказывает теорему.

2) *Функции* $Y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, *являющиеся решениями системы* (9.64), *линейно зависимы, если определитель Вронского* $W(x)$ *обращается в нуль хотя бы в одной точке* $x=x_0$ (опустим доказательство свойства).

С л е д с т в и е. *Если определитель Вронского* $W(x)$, *составленный для решений* $Y_i(x)$ *системы* (9.85) *равен нулю в некоторой точке* x_0, *то он тождественно равен нулю.*

Иначе, определитель $W(x)$, *составленный для n линейно независимых частных решений системы* (9.85), *ни в одной точке интервала* (a,b) *не обращается в нуль.*

Определим фундаментальную систему решений для (9.85).

О п р е д е л е н и е. *Любая совокупность* $\{Y_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ *из n линейно независимых частных решений системы уравнений* (9.85) *называется её фундаментальной системой решений* (ФСР).

Примем без доказательства утверждение, что *для любой системы* (9.85) *существуют фундаментальные системы решений.*

Теорема 9.12 (о структуре общего решения СОЛДУ). *Общее решение СОЛДУ* (9.85) *есть линейная комбинация*

$$\boxed{Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_kY_k.} \qquad (9.89^*)$$

функций $\{Y_i\}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ ФСР.

Доказательство повторяет то, что было проделано при доказательстве подобной теоремы (см. п. 9.3.2).

В заключение приведем следующую теорему (без доказательства).

Теорема 9.13. *Для того чтобы вектор-функции* $Y_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, *имеющие непрерывные частные производные, составляли фундаментальную систему решений некоторой системы* (9.85) *с непрерывными коэффициентами* $p_{ij}(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* (*их*) *определитель Вронского* $W(x)$ *нигде не обращался в нуль*.

Необходимость следует из теоремы существования и единственности решения.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Составим *n* ОЛДУ относительно функций $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n1} & \cdots & y_{nn} \\ \dfrac{dy_i}{dx} & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} \end{vmatrix} = 0 \quad (i=\overline{1,n}). \qquad (9.97)$$

Очевидно, что этим уравнениям удовлетворяют функции $Y_i(x)$. В силу того, что определитель Вронского, составленный из этих функций, нигде в нуль не обращается, уравнения (9.97) можно разрешить относительно производных y_i' $(i=\overline{1,n})$, т.е. получить систему ОЛДУ, обладающую всеми требуемыми свойствами.

9.5.3. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать линейную однородную систему

$$\boxed{y_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j \quad \left(i=\overline{1,n}\right).} \tag{9.92}$$

где $p_{ij} = \text{const}$ (вещественные),

Как и в случае ОЛДУ n-го порядка, частное решение системы (9.92) ищем в виде

$$\boxed{y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \ \ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, \ldots, \ y_n = \alpha_n e^{\lambda x},} \tag{9.93}$$

где $\lambda, \alpha_i \, (i=\overline{1,n})$ – искомые числа.

Подберем в (9.93) α_i так, чтобы система (9.92) удовлетворялась тождественно.

Подставим (9.93) и $y_i' = \lambda\alpha_i e^{\lambda x}$ в систему (9.92) и сократим на $e^{\lambda x}$; придем к однородной системе алгебраических уравнений

$$\boxed{\begin{cases} (p_{11} - \lambda)\alpha_1 + p_{12}\alpha_2 + \ldots + p_{1n}\alpha_n = 0; \\ p_{21}\alpha_1 + (p_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + p_{2n}\alpha_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1}\alpha_1 + p_{n2}\alpha_2 + \ldots + (p_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{cases}} \tag{9.94}$$

Найдем решение системы (9.94), отличное от тривиального, для чего необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\boxed{\begin{vmatrix} (p_{11}-\lambda) & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & (p_{22}-\lambda) & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & (p_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0.} \tag{9.95}$$

Уравнение (9.95) называется *характеристическим уравнением системы* (9.92) и является алгебраическим уравнением n-й степени.

Каждому корню λ уравнения (9.95) отвечает набор чисел α_i, определяемый из системы (9.94) и, следовательно, некоторое частное решение вида (9.93) системы (9.92).

Очевидно, структура фундаментальной системы решений зависит от вида корней характеристического уравнения (хотя, как это можно показать, в отличие от линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами *не всегда вполне ими определяется).*

Рассмотрим следующие случаи.

1) *Все корни* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *характеристического уравнения* (9.95) *действительны и различны*. Подставляя λ_i в систему (9.94), определим таким образом n частных решений системы (9.92):

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}; \ Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x};...; \ Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}. \quad (9.96)$$

Функции в (9.96) образуют фундаментальную систему решений (9.97) и, следовательно, общее решение (см. (9.89*)) этой системы запишется в виде (в матричной форме)

$$\boxed{Y = C_1 Y_1 + ... + C_n Y_n}$$

или (в алгебраической форме)

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{12}e^{\lambda_2 x} + ... + C_n\alpha_{1n}e^{\lambda_n x}; \\ y_2(x) = C_1\alpha_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 x} + ... + C_n\alpha_{2n}e^{\lambda_n x}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = C_1\alpha_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{n2}e^{\lambda_2 x} + ... + C_n\alpha_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases}} \quad (9.97)$$

З а м е ч а н и е**.** Тот факт, что функции (9.96) образуют фундаментальную систему решений, доказывается от противного:

предположив, что это не так, по свойству 2 определителя Вронского (п. 9.5.2) системы функций (9.96), являющейся решением системы (9.92), получим, что он тождественно равен нулю, в частности, при $x = 0$. Отсюда сразу же следует, что в силу единственности решения системе (9.92) удовлетворяет только тривиальное решение, что и приводит к противоречию.

2). *Корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные.*

Так как коэффициенты p_{ij} вещественны, то корни входят сопряженными парами. Корню $\lambda = a + ib$ соответствует комплексное решение

$$y_1 = (\alpha_{11} + i\alpha_{12})e^{(a+ib)x}, \ldots, y_n = (\alpha_{n1} + i\alpha_{n2})e^{(a+ib)x}.$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых решения.

$$\boxed{\begin{aligned} y_{11} &= e^{ax}(\alpha_{11}\cos bx - \alpha_{12}\sin bx), \ldots, y_{n1} = e^{ax}(\alpha_{n1}\cos bx - \alpha_{n2}\sin bx) \\ y_{12} &= e^{ax}(\alpha_{11}\sin bx + \alpha_{12}\cos bx), \ldots, y_{n2} = e^{ax}(\alpha_{n1}\sin bx + \alpha_{n2}\cos bx) \end{aligned}} \tag{9.98}$$

Далее все проводится по схеме п.1.

З а м е ч а н и е**.** Решения, полученные от сопряженного корня $\lambda = a - ib$, линейно зависят от решений (9.98) и не доставляют новых решений.

3) *Среди корней характеристического уравнения есть кратные.*

Пусть λ есть корень кратности *k*. Тогда можно доказать (опустим это), что такому корню λ соответствует семейство решений, зависящее от *k* произвольных постоянных вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda x},\ y_2 = P_2(x)e^{\lambda x}, \ldots,\ y_n = P_n(x)e^{\lambda x}, \tag{9.99}$$

где $P_1(x),\ P_2(x), \ldots,\ P_n(x)$ – полиномы от *x* степени не выше $(k-1)$, причем *k* коэффициентов этих полиномов произвольны, а остальные выражаются через них.

Эти коэффициенты определяются подстановкой функций (9.99) в исходную однородную систему (9.92).

Формулы (9.99) дают возможность найти k линейно независимых частных решений, соответствующих корню λ кратности k.

Для этого нужно полагать поочередно один из произвольных коэффициентов полиномов $P_1(x),\ P_2(x),\ldots,\ P_n(x)$ равным единице, а остальные равными нулю.

В случае, если λ вещественно, то эти k решений вещественны.

Если $\lambda = a + ib$ – комплексный корень кратности k, то ему отвечают $2k$ вещественных решений, получаемые после отделения действительных и мнимых частей комплексных решений:

$$y_{11} = e^{ax}[P_{11}(x)\cos bx - P_{12}(x)\sin bx],\ldots, y_{n1} = e^{ax}[P_{n1}(x)\cos bx - P_{n2}(x)\sin bx],$$
$$y_{12} = e^{ax}[P_{11}(x)\sin bx + P_{12}(x)\cos bx],\ldots, y_{n2} = e^{ax}[P_{n1}(x)\sin bx + P_{n2}(x)\cos bx].$$

Аналогично вышеизложенному, найдем $2k$ вещественных линейно независимых частных решений, соответствующих корню $\lambda = a + ib$ кратности k.

Пример 28. Решить систему $\dfrac{dY}{dt} = PY$ линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами при заданных начальных условиях Y_0, где

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}, \text{ если } P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Перейдем от матричной записи к системе трех уравнений

$$
\begin{aligned}
x' &= 3x - y + z,\\
y' &= -x + 5y - z, \qquad (1)\\
z' &= x - y + 3z
\end{aligned}
$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 5, \quad z(0) = 4 \,. \qquad (2)$$

Решение системы (1) ищем в виде (9.93):

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}, \quad z = \gamma e^{\lambda t} \qquad (3)$$

Подставляя (3) и $x' = \alpha\lambda e^{\lambda t}$, $y' = \beta\lambda e^{\lambda t}$, $z' = \gamma\lambda e^{\lambda t}$ в (1), получим после сокращения каждого уравнения на $e^{\lambda t}$ систему

$$\begin{cases} \alpha\lambda = 3\alpha - \beta + \gamma, \\ \beta\lambda = -\alpha + 5\beta - \gamma, \\ \gamma\lambda = \alpha - \beta + 3\gamma \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (3-\lambda)\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + (5-\lambda)\beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + (3-\lambda)\gamma = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Составляем характеристическое уравнение (9.95):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая определитель,

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \qquad (5)$$

– уравнение третьей степени относительно λ, имеющее три корня.

Подбором находим корень уравнения, например, $\lambda_1 = 2$. Далее, разделив левую часть уравнения (5) на двучлен $\lambda - \lambda_1$, т.е. на $\lambda - 2$, получим для отыскания остальных двух корней уравнение $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$, для которого находим $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 6$.

1. Подставляя $\lambda_1 = 2$ в (4), получим для определения α, β, γ систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + \gamma = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

из которых линейно независимых будет только два, например, первое и второе, т.е. ранг системы (6) равен двум, а потому одна из трех искомых α, β, γ будет свободной. Для получения ненулевого решения примем, например, $\gamma_1 = 1$, тогда

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -1; \\ -\alpha + 2\beta = 1, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 0$, и из формул (3) получаем частное решение системы (1):

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = -e^{2t}, \quad y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t} = 0, \quad z_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} = e^{2t} \qquad (7)$$

2. Аналогично, для корня $\lambda_2 = 3$ система (3) примет вид:

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

ей соответствует фундаментальная система решений, например, $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 1$. Тогда частное решение системы (1) есть

$$x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = -e^{3t}, \quad y_2 = e^{3t}, \quad z_2 = e^{3t} \ . \qquad (8)$$

3. Для корня $\lambda_3 = 6$ из (4) получим

$$\begin{cases} -3\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

и фундаментальную систему решений можно взять, например, $\alpha_3 = \gamma_3 = 1$, $\beta_3 = -2$; частное решение системы (1) тогда имеет вид

$$x_3 = e^{6t}, \quad y_3 = -2e^{6t}, \quad z_3 = e^{6t} \ . \qquad (9)$$

Заметим, что частные решения (7)-(9) можно записать в матричной форме:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} \ .$$

Используя (7)-(9) запишем общее решение системы (1) в алгебраической форме (см. (9.97)):

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \qquad , \quad (10)$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \ .$$

Для решения задачи Коши подставим в решение (10) начальные условия (2): $t = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 5$, $z(0) = 4$; в итоге получим систему алгебраических уравнений для определения C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_2 - 2C_3 = 5; \\ C_1 + C_2 + C_3 = 4, \end{cases}$$

для которой находим (например, по формулам Крамера): $C_1 = 2$, $C_2 = 3$, $C_3 = -1$.

Ответ:

$$\begin{cases} x = -2e^{2t} + 3e^{3t} - e^{6t}, \\ y = 3e^{3t} + 2e^{6t}, \\ z = 2e^{2t} + 3e^{3t} - e^{6t} \end{cases} . \qquad \#$$

Пример 29. Найти общее решение системы

$$x' = y + z \, , \; y' = 3x + z \, , \; z' = 3x + y \, , \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, производные берутся по t.

Р е ш е н и е. Решение системы ищем в виде (9.93):

$$x = \alpha e^{\lambda t} \, , \; y = \beta e^{\lambda t} \, , \; z = \gamma e^{\lambda t} \, . \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим после преобразований систему уравнений (9.94):

$$\begin{cases} -\lambda\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha - \lambda\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta - \lambda\gamma = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение (9.95) – определитель системы (3):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0\,,$$

корнями которого являются числа

$$\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = -2, \;\; \lambda_3 = 3\,.$$

Подставляем в систему (3) поочередно корни λ_1, λ_2, λ_3 и находим соответствующие значения α, β, γ.

1. Для $\lambda = -1$ система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

фундаментальной системой решений которой может быть, например,

$$\alpha = 0, \;\; \beta = 1, \;\; \gamma = -1\,.$$

2. Для корня $\lambda = -2$ получим систему

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Фундаментальное решение возьмем в виде

$$\alpha = -1, \;\; \beta = 1, \;\; \gamma = 1\,.$$

3. Для $\lambda = 3$ система имеет вид

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

и фундаментальную систему решений можно взять в виде

$$\alpha = 2, \;\; \beta = \gamma = 3\,.$$

По формулам (9.93) построим частные решения в виде

$$Y_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t};\quad Y_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}e^{-2t};\quad Y_3=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}e^{3t}$$

и

$$x=-C_2e^{-2t}+2C_3e^{3t};\qquad y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3C_3e^{3t};$$
$$z=-C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3C_3e^{3t}$$

– общее решение заданной системы.

Пример 30. Решить систему

$$\frac{dy}{dx}=2y-z;\quad \frac{dz}{dx}=y+2z\,. \tag{1}$$

Р е ш е н и е. Ищем решение в виде

$$y=\alpha e^{\lambda t},\quad z=\beta e^{\lambda t}\,. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим после преобразования систему (см. (9.94)):

$$\begin{cases}(2-\lambda)\alpha-\beta=0,\\ \alpha+(2-\lambda)\beta=0.\end{cases} \tag{3}$$

Характеристическое уравнение здесь

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2-4\lambda+5=0$$

имеет комплексные сопряженные корни $\lambda=2\pm i$.

Решение, соответствующее корню $\lambda=2+i$, есть

$$y=\alpha e^{(2+i)x};\quad z=\beta e^{(2+i)x}.$$

Система (3) для $\lambda=2+i$ имеет вид

$$\begin{cases}-i\alpha-\beta=0,\\ \alpha-i\beta=0\end{cases}.$$

Полагая $\alpha=1$, найдем, что $\beta=-i$ – имеем комплексное решение

$$y = e^{(2+i)x}, \quad z = -ie^{(2+i)x}.$$

Запишем это решение в алгебраическом виде [$i^2 = -1$; по формуле Эйлера $e^{(2+i)x} = e^{2x} e^{ix} = e^{2x}(\cos x + i \sin x)$]:

$$y = e^{2x}(\cos x + i\sin x); \quad z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x)$$

Отделяя в комплексном решении действительную и мнимую части, найдем два частных (вещественных) решения

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{2x}, \ Y_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Эти решения составляют фундаментальную систему решений системы (1) и, следовательно,

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$$

– общее решение.

Пример 31. Найти общее решение системы:

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + z; \ \ \frac{dy}{dt} = x - y + z; \ \ \frac{dz}{dt} = x + y - z. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е**.** Ищем решение в виде:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \ y = \beta e^{\lambda t}, \ z = \gamma e^{\lambda t}. \qquad (2)$$

После подстановки (2) в исходную систему (1) получим в результате преобразований

$$\begin{cases} -(1+\lambda)\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - (1+\lambda)\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - (1+\lambda)\gamma = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Для корня $\lambda = 1$ – простого корня – из (3) получаем систему:

$$-2\alpha + \beta + \gamma = 0; \quad \alpha - 2\beta + \gamma = 0, \ \alpha + \beta - 2\gamma = 0,$$

частное решение которой можно взять в виде $\alpha = 1, \ \beta = 1, \ \gamma = 1$, так что частное решение СОЛДУ, соответствующее этому корню, есть

$$x_1 = e^t; \quad y_1 = e^t; \quad z_1 = e^t \ \text{ или } Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t. \qquad (4)$$

Корень $\lambda = -2$ имеет *кратность* $k = 2$, поэтому частное решение следует искать в виде (см. (9.99))

$$x = (A_1 t + A_2)e^{-2t}; \ \ y = (B_1 t + B_2)e^{-2t}; \ \ z = (C_1 t + C_2)e^{-2t}, \qquad (5)$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$) подлежат определению.

Подставляя в исходную систему, получим три тождественных равенства

$$\begin{cases} -2(A_1 t + A_2) + A_1 = (-A_1 + B_1 + C_1)t - A_2 + B_2 + C_2; \\ -2(B_1 t + B_2) + B_1 = (A_1 - B_1 + C_1)t + A_2 - B_2 + C_2; \\ -2(C_1 t + C_2) + C_1 = (A_1 + B_1 - C_1)t + A_2 + B_2 - C_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Приравнивая в (6) коэффициенты при одинаковых степенях t , придем к следующей системе из шести уравнений:

$$\begin{cases} -A_1 - B_1 - C_1 = 0; -A_2 + A_1 - B_2 - C_2 = 0; \\ -B_1 - A_1 - C_1 = 0; -B_2 + B_1 - A_2 - C_2 = 0; \\ -C_1 - A_1 - B_1 = 0; -C_2 + C_1 - A_2 - B_2 = 0. \end{cases}$$

Упрощая, получим систему четырех линейно независимых уравнений, например:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 = 0; \;\; A_1 - B_1 = 0; \;\; B_1 - C_1 = 0; \\ \qquad\qquad A_2 + B_2 + C_2 = B_1, \end{cases}$$

решение которой есть:

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0; \;\; C_2 = -(A_2 + B_2),$$

где постоянные A_2 и B_2 произвольны:

$$x = A_2 e^{-2t}; \quad y = B_2 e^{-2t}; \quad z = -(A_2 + B_2)e^{-2t}.$$

Полагая сначала $A_2 = 1$, $B_2 = 0$, а затем $A_2 = 0$, $B_2 = 1$ получим частные решения СОЛДУ

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}; Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Заметим, что фундаментальная система решений Y_1, Y_2, Y_3 имеет вид как и в случае, когда все корни характеристического уравнения простые, несмотря на то, что среди них есть кратные.

Запишем общее решение системы:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}; \;\; y = C_1 e^t + C_3 e^{-2t}; \;\; z = C_1 e^t - C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-2t}$$

#

9.5.4. О системах неоднородных линейных уравнений

Система (9.80) называется *системой неоднородных линейных дифференциальных уравнений* (СНЛДУ), или просто *неоднородной системой*, если в ней не все функции $f_i(x)$ тождественно обращаются в нуль.

Для СНЛДУ можно сформулировать и доказать свойства решений, теорему о структуре общего решения, рассмотреть методы построения общего решения в случае вещественных коэффициентов p_{ij} в системе (9.80), используя метод вариации произвольных постоянных.

Здесь мы рассмотрим на примере решение неоднородной системы сведением ее к одному уравнению (отметим попутно, что аналогичным образом можно решать и однородные системы).

Пример 32. Найти общее решение системы уравнений для функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2 & (2) \end{cases}.$$

Р е ш е н и е**.** Найдем решение системы сведением ее к одному уравнению.

Продифференцируем по t обе части одного из уравнений системы, например, (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 4.$$

Подставим в последнее уравнение вместо $\dfrac{dy}{dt}$ его выражение из (2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4y - 4x = 4 - 6t^2. \quad (3)$$

Найдем из (1) и подставим в (3); в итоге получим неоднородное уравнение второго порядка для функции $x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 3 - 4t - 6t^2. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) ищем в виде

$$x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{ч}}, \quad (5)$$

где $x_{\text{оо}}$ – общее решение ОЛДУ $x'' + x' - 6x = 0$, которое находим методом Эйлера, полагая $x = e^{\lambda t}$; тогда характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-6=0$ имеет корни $\lambda_1=2, \lambda_2=-3$ и $x_{\text{оо}}=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Частное решение $x_{\text{ч}}$, входящее в (5), находим методом неопределенных коэффициентов, полагая (см. табл. 2, случай I.1)

$$x_{\text{ч}}=At^2+Bt+C,$$

тогда $x'_{\text{ч}}=2At+B,\ x''_{\text{ч}}=2A$. Подставим $x_{\text{ч}}, x'_{\text{ч}}$ и $x''_{\text{ч}}$ в (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях полученного тождества:

$$2A+2At+B-6(At^2+Bt+C)\equiv 3-t^2-6t^2,$$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & -6A=-6, \\ t^1 & 2A-6B=-4, \\ t^0 & 2A+B-6C=3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{A}=1, \\ \text{B}=1 \ \text{ и } \ x_{\text{ч}}=t^2+t. \\ \text{C}=0 \end{array}$$

В итоге

$$x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}+t^2+t. \tag{6}$$

Из уравнения (1), используя (6), получим

$$y(t)=-C_1e^{2t}+\frac{1}{4}C_2e^{-3t}-\frac{1}{2}t^2\ . \qquad \#$$

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Как записывается нормальная система линейных дифференциальных уравнений? Как определяется ее порядок? Запишите систему в матричной форме.

2. Какие преобразования не нарушают линейность системы?

3. Дайте определение системы однородных линейных дифференциальных уравнений (СОЛДУ). Запишите ее в обычной и матричной формах. Определите понятие линейного оператора системы уравнений. Запишите с его помощью СОЛДУ.

4. Сформулируйте и докажите простейшие свойства решений СОЛДУ.

5. Какая система вектор–функций называется линейно зависимой (независимой) на некотором промежутке? Как определяется определитель Вронского системы функций y_{ij} $\left(i,j=\overline{1,n}\right)$, заданных на интервале (a,b)?

6. Приведите свойство определителя Вронского для линейно–зависимой на интервале (a,b) системы функций.

7. Сформулируйте теорему существования ФСР для СОЛДУ *n*-го порядка. Приведите теорему о структуре общего решения СОЛДУ. В чем заключается необходимое условие утверждения о том, что вектор–функции Y_1, $Y_2,...,Y_n$ образуют ФСР?

8. Опишите метод Эйлера построения ФСР для СОЛДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами. Какое уравнение называется характеристическим? Как строится ФСР в случае действительных различных корней характеристического уравнения?

ГЛАВА 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

По числу переменных, от которых зависит некоторая величина, функции подразделяются на функции двух, трех и вообще многих переменных. В этой главе рассмотрим функции двух переменных, но подчеркнем, что многие понятия, определения, теоремы, рассмотренные для функций двух переменных легко обобщаются на функции произвольного числа независимых переменных.

§10.1. Функции двух и нескольких переменных

10.1.1. Множества на плоскости и в пространстве

Говоря о парах чисел (x,y), расположенных в определенном порядке (иногда в этом случае говорят об упорядоченных парах), пользуются геометрическим языком: пара чисел (x,y) суть точки плоскости Oxy.

В разделах математического анализа, относящихся к функциям нескольких переменных используют следующие определения и обозначения:

плоскость $R^2 = \{(x,y)\}$ – множество всех упорядоченных пар чисел (x,y);

пространство $R^3 = \{(x,y,z)\}$ – множество всех упорядоченных троек чисел (x,y,z);

пространство $R^n = \{(x_1,x_2,...,x_n)\}$ – множество всех упорядоченных наборов из n чисел $(x_1,x_2,...x_n)$;

Множество S на плоскости $R^2 = \{(x,y)\}$ называется *окрестностью* точки $M(x,y)$, если M является *внутренней* точкой S, т.е. M входит в S вместе с некоторым кругом $K(M,r)$, координаты произвольной точки $M'(x',y')$ которого удовлетворяют условию $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2} \le r$ при $r \ge 0$; таким образом, круг $K(M,r)$ записывают символически

$$K(M,r) = \left\{(x,y)\colon \sqrt{\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2} \le r\right\}.$$

Множество *открыто*, если оно служит окрестностью каждой своей точки.

Точка N – *граничная* для множества S, если любая окрестность этой точки содержит и точки, принадлежащие S, и точки, не принадлежащие S. На рис. 10.1 заштрихована часть окрестности точки N, точки которой не принадлежат S.

Совокупность всех граничных точек множества S образует *границу* $Г$.

Объединение S с $Г$ называют *замыканием* S и обозначают $\overline{S}$.

Множество связно, если любые две точки из S можно соединить кривой, не выходя из S, т.е. все точки кривой принадлежат S. На рис. 10.1 изображена связная область, ибо любые две точки A и B из S можно соединить кривой, все точки которой принадлежат S.

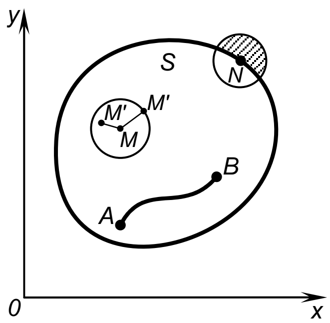


Рис. 10.1

Связное открытое множество называется *областью* (обозначается S, D, E и т.д.), а его замыкание – *замкнутой областью* (обозначается $\overline{S}, \overline{D}, \overline{E}$ и т.п.). Тот факт, что области являются частью плоскости R^2 обозначается $S \subset R^2$, $\overline{S} \subset R^2$ и т.п.

Множество $S \subset R^2$ называется *ограниченным*, если существует круг с центром в начале координат (0;0) радиуса R такой, что он содержит внутри себя множество S.

Назовем δ-*окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ (обозначается $U(M_0, \delta)$) множество точек $M(x,y)$, расстояние от которых до точки M_0 меньше δ, т.е. координаты x,y точки M удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$.

Проколотой δ-*окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ (обозначается $\overset{\circ}{U}(M_0, \delta)$) называется множество $U(M_0, \delta)$ без самой точки

M_0, т.е. координаты точек $M(x,y) \in \overset{\circ}{U}(M_0,\delta)$ удовлетворяют двойному неравенству

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta .$$

10.1.2. Функция двух переменных

Пусть дано множество $D \subset R^2$ и множество $E \subset R$ (здесь R – множество действительных чисел), и пусть каждой паре чисел (x,y) из D поставлено в соответствие по определенному правилу (закону) единственное число z из E; тогда говорят, что на множестве D определена числовая *функция.*

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторой буквой, например f, и пишут $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Множество D называют *областью определения* функции, множество E – областью значений функции, x,y – независимыми переменными, функцию $z = f(x,y)$ называют *функцией двух переменных*.

Так как всякой паре чисел (x,y) соответствует единственная точка M плоскости Oxy, и обратно, каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел, то функцию двух переменных x и y можно рассматривать как функцию точки M и, следовательно, вместо $z = f(x,y)$ писать $z = f(M)$. Областью определения в этом случае является некоторое множество $D = \{M\}$ точек плоскости. Точку M в этом случае называют *аргументом* или *независимой переменной*. Число z_0, соответствующее точке $M_0(x_0,y_0)$, называют значением функции в точке M_0 и обозначают $f(M_0)$ или $f(x_0,y_0)$.

Под функцией, заданной формулой, понимают функцию, областью определения которой является множество всех пар чисел (x,y) , для которых эта формула имеет смысл и результатом каждой операции, указанной в формуле, является действительное число. Область определения функции в этом случае называют *естественной областью определения*. *Область за-*

дания функции (заданная область определения) характеризуется условиями конкретной задачи (физическими, геометрическими и т.п.) и может отличаться от естественной области определения.

Пример 1. Объем V прямого кругового цилиндра можно считать функцией, зависящей от радиуса основания r и высоты h: $V = \pi r^2 h$. Область задания D функции V характеризуется условиями $r>0$, и $h>0$ и потому $D = \{(r,h): r > 0,\ h > 0\}$. Естественной областью определения является множество

$$D = \{(r,h): -\infty < r < \infty,\ -\infty < h < \infty\}.$$

Аналогичным образом определяются функции трех, четырех и вообще n переменных; для этого достаточно вместо пар чисел (x,y) и точек $M(x,y)$, принадлежащих R^2, рассматривать упорядоченные наборы $(x,y,z) \in D \subset R^3$, ... $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$, или соответствующие точки $M(x,y,z)$, ..., $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. #

10.1.3. График функции двух переменных

Введем пространственную декартову систему координат $Oxyz$, изобразим на плоскости Oxy множество D – область изменения переменных x и y. В каждой точке $M(x,y) \in D$ вычислим значение функции $f(x,y)$ и рассмотрим множество всех точек в пространстве, имеющих координаты (x,y,z), где $z=f(x,y)$; это множество точек называют графиком функции двух переменных, который представляет собой поверхность в пространстве (возможно с разрывом и углами), а равенство $z=f(x,y)$ называется уравнением этой поверхности.

Пример 2. 1. Графиком функции $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in R^2$ является поверхность (параболоид вращения), изображенная на рис. 10.2.

2. Графиком функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le R^2\}$ является “верхняя” полусфера (рис. 10.3).

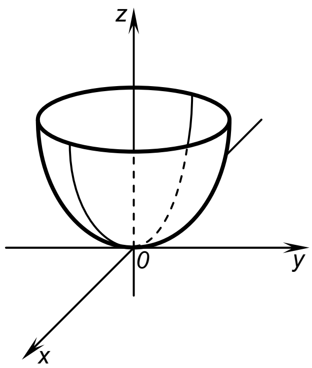


Рис. 10.2

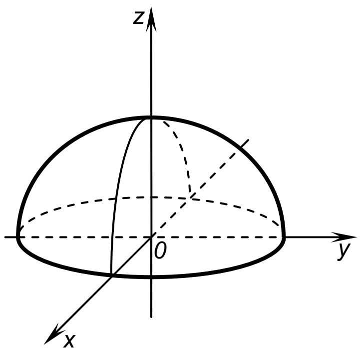


Рис. 10.3

§10.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

10.2.1. Предел функции

Приведенные здесь определения почти дословно повторяют соответствующие определения для функции одной переменной.

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности D точки M_0, кроме, может быть, самой точки M_0.

О п р е д е л е н и е. *Число A называется пределом функции f(M) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек M(x,y), принадлежащих выколотой δ-окрестности $\overset{\circ}{U}(M_0, \delta)$, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству $0 < \sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} < \delta$, выполняется неравенство $\left|f(M)-A\right| < \varepsilon$.*

Если число A является пределом функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то пишут

$$\lim_{M-M_0} f(M) = A \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad (10.1)$$

и говорят, что при $M \to M_0$ функция *f стремится к A вдоль множества D*.

Несмотря на сходство определений предела для функций одной и двух переменных, предельный переход в последнем случае сложнее. Это вызвано тем обстоятельством, что к предельной точке M_0 точка M может стремиться разными путями, и функция при этом может вести себя по разному. Но если функция $f(M)$ имеет предел в точке M_0, то он не должен зависеть от способа стремления точки M к точке M_0.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Р е ш е н и е. а) Не нарушая общности будем считать, что точка $M(x,y)$ из окрестности точки $M_0(0,0)$ стремится к точке M_0 по прямой $y = kx$ (проходящей через точки M_0 и M). Тогда из $x \to 0$ следует $y \to 0$ и

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2xkx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Пределы получаются разными при различных значениях k и не существует числа A, к которому значения $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ становились бы сколь угодно близки, как только точка $M(x,y)$ оказывается в достаточной близости к точке $M_0(0,0)$. Предел данной функции в точке $M_0(0,0)$ не существует.

б) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{\left(x^4 + y^2\right)} = \left| \begin{array}{l} \text{пусть точка } M(x,y) \\ \text{стремится к предельной точке} \\ 0(0,0) \text{ по линии } y = x^k \ (k > 0): \\ \left(M \to M_0\right) \Leftrightarrow \left(x \to 0, y \to 0\right) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^k}{x^4 + x^{2k}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{k-2}}{1 + x^{2k-4}}.$$

Возможны случаи: 1) при k=2 имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

2) при k>2 (k=2+m, m>0) имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^m}{1+x^{2m}} = 0$.

Не рассматривая отдельно случай 0<k<2, уже можно сделать вывод, что общий предел данной функции в точке O(0,0) не существует. #

Как и для функций одной переменной можно ввести понятие бесконечно малых (б.м.) и бесконечно больших (б.б.) функций.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(x,y)$ называется *бесконечно малой* при $M(x,y) \to M_0(x_0, y_0)$ вдоль D, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(x,y)$ называется *бесконечно большой* при $M \to M_0$ вдоль D, если для любого сколь угодно большого положительного числа N существует такое положительное число δ, что для всех точек $M(x,y) \in \overset{\circ}{U}(M_0, \delta)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, выполняется условие $|f(x,y)| > N$. В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = +\infty \quad \text{(или } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = -\infty \text{)}.$$

Основные свойства б.м., установленные для функций одной переменной, понятие порядка малости, эквивалентности б.м. распространяются на случай функций двух (и более) переменных. Под символом $o(\alpha)$ понимают б.м. в данной точке M_0 функцию β более высокого порядка малости, чем б.м. α:

$$\lim_{M\to M_0} \frac{\beta(M)}{\alpha(M)} = \lim_{M\to M_0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

10.2.2. Повторные пределы

Введенное выше понятие предела функции $f(x,y)$ при одновременном стремлении x и y к предельным значениям x_0 и y_0 называется *двукратным (двойным) пределом*. Теперь введем понятие повторного предела. Зафиксируем y и предположим существование пределов функции $f(x,y)$ (зависящей теперь от одной переменной x): $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$. Тогда

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{10.2}$$

– один из повторных пределов. Аналогично, если существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\psi(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \tag{10.3}$$

– другой повторный предел.

О п р е д е л е н и е . *Повторным называется предел, получаемый в результате последовательных предельных переходов (в том или ином порядке).*

В общем случае (10.2) и (10.3) не обязательно равны. Более того, может случиться, что один из повторных пределов существует, а другой нет. Приведем без доказательства теорему о связи между двукратными и повторными пределами.

Теорема 10.1. *Пусть существует двойной предел* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ *и при любом фиксированном* y *из некоторой окрестности точки* (x_0,y_0) *существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$. *Тогда существует повторный предел* $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ *и он равен двойному*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A. \qquad (10.4)$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, определенную в $D=\{(x,y): x>0, y>0\}$ и пусть $x_0=y_0=0$.

Имеем: $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\dfrac{-y+y^2}{y}=y-1$,

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to 0}(y-1)=-1$; с другой стороны,

$\psi(x)=\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\dfrac{x+x^2}{x}=1+x,$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0.}\psi(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$, – повторные пределы не равны. Из теоремы 10.1 следует, что двукратный предел функций в точке (0,0) не существует.

10.2.3. Непрерывность функции. Композиция функций

Пусть функция $f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности.

О п р е д е л е н и е . *Функция f называется непрерывной в точке (x_0,y_0), если операции f и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ перестановочны, то есть*

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f\left(\lim_{x\to x_0} x, \lim_{y=y_0} y\right)=f(x_0,y_0)}, \qquad (10.5)$$

или, другими словами, для любого сколь угодно малого числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют двойному неравенству

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, выполняется неравенство $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

Перепишем (10.5) в виде

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right]=0 \qquad (10.5')$$

и обозначим

$$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=y-y_0,\quad \Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0).$$

Тогда непрерывность $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) равносильна тому, что

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\Delta f=0}. \qquad (10.5'')$$

З а м е ч а н и е . В тех случаях, когда функция не является непрерывной в точке (x_0,y_0), говорят, что она имеет разрыв в этой точке, при этом сама точка (x_0,y_0) называется *точкой разрыва* функции $f(x,y)$.

Пример 5. а) Покажем, что функция $f(x,y) = x^2+y^2$ непрерывна в любой точке (x_0,y_0), $|x_0|<\infty$, $|y_0|<\infty$.

Действительно, следуя (10.5′),

$$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\left[(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2\right]-\left(x_0^2+y_0^2\right)=$$

$$=2x_0\Delta x+2y_0\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Очевидно, $\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ и, таким образом, функция $f(x,y)=x^2+y^2$ непрерывна в произвольной точке (x_0,y_0).

б) Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, \text{ если } x\ne 1, y\ne 2;\\ \quad 0,\ \text{ если } x=1, y=2.\end{cases}$$

Эта функция непрерывна всюду, кроме $x = 1$, $y = 2$ (см. а)); в точке (1; 2) функция разрывна, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=5$, а значение $f(1; 2) = 0$ и, следовательно, условие (10.5) не выполняется. #

Определение. *Функция f называется непрерывной на множестве D из области определения функции, если она непрерывна в каждой точке множества.*

Из основных свойств предела функции следует: если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ заданы на D и непрерывны во внутренней точке $M_0(x_0,y_0)\in D$, то линейная комбинация $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$, произведение $f(x,y)\cdot g(x,y)$, частное $f(x,y)/g(x,y)$, $\left(g(x,y)\neq 0 \ \ \forall (x,y)\in D\right)$ определены на D и непрерывны в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Непрерывность композиции

Теорема 10.2. (о непрерывности композиции функций). *Пусть $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0). Если функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ непрерывны в точке (u_0,v_0), причем $\varphi(u_0,v_0)=x_0$, $\psi(u_0,v_0)=y_0$, то и композиция функций (или сложная функция) $f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)$ также непрерывна в точке (u_0,v_0).*

Доказательство следует из того, $(\Delta u)^2+(\Delta v)^2\to 0$ обеспечивает $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ и потому $\Delta f\to 0$. #

Основные свойства функций одной переменной, непрерывных на отрезке, распространяются на случай функций нескольких переменных, непрерывных в ограниченных замкнутых областях. Приведем без доказательства теорему.

Теорема 10.3. *Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда:*

1) она ограничена в $\overline{D}$;

2) она принимает, по крайней мере в одной точке области $\overline{D}$, наименьшее, и, по крайней мере в одной точке, наибольшее значения;

3) в односвязной области $\overline{D}$ функция принимает каждое значение, заключенное между наименьшим и наибольшим значениями.

§10.3. Дифференциал и частные производные функции двух переменных

10.3.1. Частные и полное приращения функции

Символами Δx и Δy обозначим приращения независимых переменных. Пусть точки $M(x,y)$, $M_1(x+\Delta x, y)$, $M_2(x, y+\Delta y)$, $M_3(x+\Delta x, y+\Delta y)$ лежат в D – области определения функции двух переменных *f*.

О п р е д е л е н и я . *Разности*

$\Delta_x f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ *и* $\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ *называются частными приращениями, а разность*

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

– полным приращением функции f в точке $M(x,y)$*, отвечающим приращениям* Δx *и* Δy *независимых переменных.*

Заметим, что в словосочетании “полное приращение” слово “полное” часто опускают.

Отметим, что в общем случае полное приращение функции Δf не есть сумма частных приращений $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$.

Заметим также, что на языке приращений условие непрерывности (10.5) определенной в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции примет вид

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0 . \qquad (10.5'')$$

10.3.2. Частные производные функции

Пусть точка $M(x,y)$ – внутренняя точка области определения D функции двух переменных *f*. Это гарантирует, что частные приращения $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$ имеют смысл для достаточно малых по абсолютной величине приращений Δx и Δy.

Определение. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}$, *то он называется частной производной функции f по переменной x в точке* $M(x,y)$ *и обозначается* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *или* $f'_x(x,y)$ *[или* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$; $f'_x(M)$*].*

Аналогично определяется частная производная по переменной *y*: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ или $f'_y(x,y)$.

Отметим, что для обозначения частных производных употребляются круглые ∂ (вместо прямых *d* в обозначениях обыкновенных производных).

В обозначениях $f_x(x_0,y_0)$ индекс *x* внизу указывает, по какой переменной берется производная, и не связан с точкой (x_0,y_0) в которой эта производная вычисляется.

Заметим, что в определении частной производной f'_x переменная *y* фиксирована (не получает приращения и, следовательно, не изменяется) и предельный переход осуществляется только по одной переменной Δx. Перефразируя определение, скажем, что частная производная функции *f* по переменной *x* – это производная функции *f* в предположении, что *y* – постоянная. Поэтому для отыскания f'_x и f'_y используют правила и формулы дифференцирования функции одной переменной (см. левые столбцов таблиц 7.1 и 7.2).

Пример 6. Найти частные производные указанных функций.

а) $f(x,y)=x^2-3xy^3+y$;

$$f'_x(x,y)=(x^2-3xy^3+y)'_x=\left|\begin{array}{l}\text{считаем } y \text{ постоянной и применяем}\\ \text{известные правила и формулы для}\\ \text{дифференцирования функции одной}\\ \text{переменной}\end{array}\right|=$$

$$=(x^2)'_x-(3xy^3)'_x+(y)'_x=2x-3y^3(x)'_x+0=\ 2x-3y^3\ ;$$

$$f'_y(x,y)=(x^2-3xy^2+y)'_y=\left|\text{считаем } x \text{ постоянной}\right|=$$

$$=(x^2)'_y-(3xy^3)'_y+(y)'_y=\ =0-3x(y^3)'_y+1=-9xy^2+1\,.$$

б) $f(x,y)=x^y$;

$$f'_x(x,y)=\left(x^y\right)'_x=\left|\begin{array}{l}\text{считаем } y \text{ постоянной, тогда функция}\\ \text{является степенной и потому используем}\\ \text{формулу } 16^{\circ} \text{ из таблицы 7.1.}\end{array}\right|=$$

$=yx^{y-1}$;

$$f'_y(x,y)=(x^y)'_y=\left|\begin{array}{l}\text{считаем } x \text{ постоянной, тогда функция,}\\ \text{очевидно,-показательная, и потому}\\ \text{используем аналог формулы } 9^{\circ} \text{ из таблицы 7.1}\end{array}\right|=$$

$=x^y\ln x$.

10.3.3. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Рассмотрим функцию $f(x,y)$. Как известно, графиком ее является поверхность $z=f(x,y)$ в пространстве. По определению, значение $f'_x(x_0,y_0)$ получается дифференцированием функции $f(x,y_0)$ по переменной x с последующим вычислением полученной производной при значении $x_0: f_x(x_0,y_0)=(f(x,y_0))'\big|_{x=x_0}$. Графиком функции $f(x,y_0)$ является линия γ_1 пересечения поверхности $z=f(x,y)$ плоскостью $y=y_0$ (на рис. 10.4 AP принадлежит линии γ_1). Отсюда, по геометрическому смыслу производной функции одной переменной, следует, что значение $f'_x(x_0, y_0)$ есть тангенс угла α, образуемого касательной K_1 к

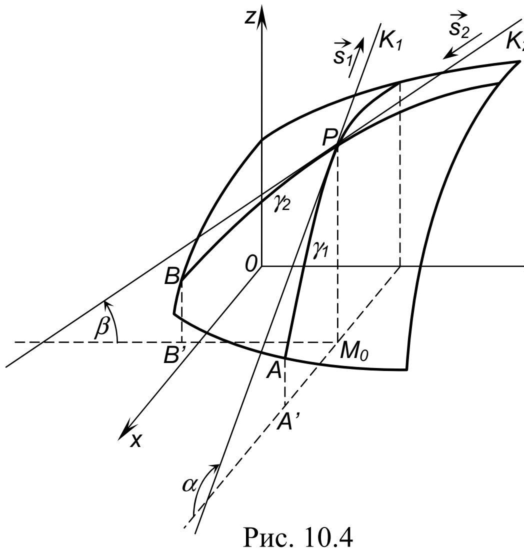


Рис. 10.4

графику кривой $z = f(x, y_0)$ (лежащей в плоскости $y = y_0$) в точке $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и прямой, проходящей через точки A' и M_0 (также принадлежащие плоскости $y = y_0$) с выбранным на прямой направлением, совпадающим с направление оси Ox:

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогично, $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$, где β – угол между направлением касательной K_2 к кривой $z = f(x_0, y)$ (лежащей в плоскости $x = x_0$) в точке P и прямой $B'M_0$ (также лежащей в плоскости $x = x_0$) с выбранным на ней направлением, совпадающим с направлением оси Oy (см. рис. 10.4).

10.3.4. Дифференцируемость функции двух переменных

Пусть функция f определена в окрестности точки $M(x,y)$.

О п р е д е л е н и е . *Функция f дифференцируема в точке M, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \qquad (10.6)$$

где коэффициенты A и B не зависят от Δx *и* Δy*, а функции* $\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – *бесконечно малые при стремлении* Δx *и* Δy *к нулю.*

Условие дифференцируемости (10.6) можно представить в другой форме. Полагаем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, при этом ρ – б.м. при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Так как $\frac{|\Delta x|}{\rho} \le 1$, $\frac{|\Delta y|}{\rho} \le 1$, то $|\alpha\Delta x + \beta\Delta y| \le \rho\left(|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho}\right) \le \rho(|\alpha| + |\beta|)$ и, следовательно, $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ – б.м. более высокого порядка по сравнению с б.м. ρ: $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)$. Поэтому (10.6) можно записать в виде:

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \qquad (10.7)$$

Теорема 10.4 (необходимые условия дифференцируемости функции).

Если функция f дифференцируема во внутренней точке $M(x,y)$ *области определения, то: а) она непрерывна в этой точке, б) существуют частные производные* $f'_x(M)$ *и* $f'_y(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если функция f дифференцируема в точке $M(x,y)$, то, согласно определению, имеет место представление (10.6). Отсюда следует $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x,y) = 0$, т.е. функция непрерывна в точке $M(x,y)$. Для доказательства второго утверждения положим в равенстве (10.6) $\Delta y = 0$, в результате получим выражение для частного приращения

$\Delta_x f(x,y) = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$. Разделив на Δx обе части последнего равенства и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x, 0) = A$$

или $f'_x(x,y) = A$. Так же можно доказать, что $f'_y(x,y) = B$. Теорема доказана. #

Из доказанной теоремы следует, что для дифференцируемой функции f

$$\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y =$$
$$= f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + o(\rho) \qquad (10.8)$$

Заметим, что для функции одной переменной существование производной – достаточное условие дифференцируемости. Если независимых переменных более одной, то только существование частных производных в точке мало для дифференцируемости функции. Но если эти производные непрерывны в самой точке, то этого оказывается достаточно.

Теорема 10.5 (достаточное условие дифференцируемости). *Пусть функция f(x,y) в точке M(x,y) и некоторой ее окрестности имеет частные производные, непрерывные в самой точке M(x,y). Тогда функция f дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Перепишем $\Delta f(x,y)$ в виде (прибавив и вычтя $f(x, y+\Delta y)$):

$$\Delta f(x,y) = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) \right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \right].$$

Выражение в первой квадратной скобке есть частное приращение функции, вычисленное при фиксированном значении $y + \Delta y$, а во второй скобке – частное приращение при фиксированном значении x; поэтому

$$\Delta f\left(x,y\right) = \Delta_x f\left(x, y+\Delta y\right) + \Delta_y f(x,y). \qquad (10.9)$$

К каждому слагаемому в (10.9) можно применить формулу конечных приращений для функции одной переменной (теорему Лагранжа), в итоге получим (в силу существования частных производных):

$$\Delta f = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$
$$(0<\theta_1, \theta_2<1). \qquad (10.10)$$

Так как частные производные f'_x и f'_y по условию теоремы непрерывны в точке $M(x,y)$, то: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)$ и

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y)$. Согласно определению предела

это означает

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$
$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y) + \beta(\Delta x, \Delta y), \qquad (10.11)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции при стремлении Δx и Δy к нулю. Из соотношений (10.10) и (10.11) следует:

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y. \quad (10.8')$$

Это означает, что функция f дифференцируема в точке $M(x,y)$.#

10.3.5. Дифференциал функции

О п р е д е л е н и е . *Дифференциалом (обозначается df) дифференцируемой в точке $M(x,y)$ функции f называется часть полного приращения Δf, линейная относительно приращений Δx и Δy независимых переменных:*

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$
$$\text{или} \quad df(M) = f'_x(M)\Delta x + f'_y(M)\Delta y. \qquad (10.12)$$

Так как в силу (10.8) и (10.12) $\Delta f(M) = df(M) + o(\rho)$, то

$$\Delta f(x,y) \approx df(x,y) \qquad (10.13)$$

Это обстоятельство часто подчеркивают, называя дифференциал главной частью полного приращения функции, и используют в приближенных вычислениях.

Положим в (10.12) $f(x,y) = x$. Так как в этом случае $f'_x = 1$, $f'_y = 0$, то $df(x,y) = \Delta x$, или короче $dx = \Delta x$; аналогично получим $dy = \Delta y$. Таким образом, дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных. Тогда

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \qquad (10.14,а)$$

или в короткой записи

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (10.14,б)$$

Слагаемые в правой части (10.14) называются *частными дифференциалами* и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$: $d_x f = f'_x(x, y)dx$, $d_y f = f'_y(x, y)dy$; тогда

$$df = d_x f + d_y f \qquad (10.15)$$

и df в этом случае называют *полным дифференциалом*. Из (10.15) следует, что полный дифференциал функции есть сумма частных дифференциалов (для полного и частных приращений функции f соотношение, аналогичное (10.15), в общем случае не выполняется).

Итак, вычисление дифференциалов может быть сведено к вычислению частных производных, что позволяет использовать все правила дифференцирования, выведенные для функции одной переменной.

Заметим, что формулы, аналогичные (10.14) имеют место для функций произвольного числа независимых переменных, например,

$$df(x, y, z) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \qquad (10.14,в)$$

10.3.6. Дифференцируемость и касательная плоскость к графику функции двух переменных

Рассмотрим в пространстве поверхность σ без складок и углов. В любой точке такой поверхности можно провести касательную плоскость.

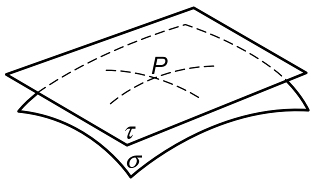


Рис. 10.5

О п р е д е л е н и е . *Касательной плоскостью к поверхности* σ *в некоторой ее точке P называется плоскость* τ*, касательная ко всем кри-*

вым, лежащим на этой поверхности и проходящим через точку P (рис. 10.5).

Пусть поверхность с уравнением $z = f(x, y)$ является графиком функции f, точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения; $z_0 = f(M_0)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ – соответствующая точка графика. Найдем уравнение касательной плоскости τ в предположении дифференцируемости функции f в точке M_0. Рассечем поверхность $z=f(x,y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$; в пересечении получим линии γ_1 и γ_2 с касательными K_1 и K_2 к этим линиям в точке P (см. рис. 10.4). Эти прямые K_1 и K_2 лежат в касательной плоскости τ и имеют направляющие векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Вектор $\overline{S}_1$ составляет с координатными осями Ox, Oy,Oz углы $\alpha, \pi/2, \gamma = \alpha - \pi/2$, а $\overline{S}_2$ – углы $\pi/2, \beta, (\pi/2) - \beta$. Тогда единичными векторами будут, соответственно: $\overline{S}_1^0 = \{\cos\alpha, \cos(\pi/2), \cos(\alpha - \pi/2)\} = \{\cos\alpha, 0, \sin\alpha\} = \cos\alpha\{1, 0, \operatorname{tg}\alpha\}$ и $\overline{S}_2^0 = \{\cos(\pi/2), \cos\beta, \cos(\pi/2 - \beta)\} = \{0, \cos\beta, \sin\beta\} = \cos\{0, 1, \operatorname{tg}\beta\}$.
В силу геометрического смысла частных производных ($\operatorname{tg}\alpha = f'_x(x_0, y_0)$, $\operatorname{tg}\beta = f'_y(x_0, y_0)$ (см. п.10.3.3)) в качестве направляющих векторов касательных K_1 и K_2 можно взять $\overline{S}_1 = \{1, 0, f'_x(x_0, y_0)\}$ и $\overline{S}_2 = \{0,1, f'_y(x_0, y_0)\}$. Найдем вектор $\overline{N}$, перпендикулярный τ:

$$\overline{N} = \overline{S}_1 \times \overline{S}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & f'_x(M_0) \\ 0 & 1 & f'_y(M_0) \end{vmatrix} = \{-f'_x(M_0), -f'_y(M_0), 1\}.$$

Искомое уравнение плоскости τ, содержащее точку $P(x_0, y_0, z_0)$, с известным вектором нормали $\overline{N}$ есть

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (10.16)$$

Пример 7. Записать уравнение касательной плоскости к поверхности σ: $z = x^2 + y^2$ в точке P (1; 2; 5).

Р е ш е н и е . Находим $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $z'_x = (1,2) = 2$, $z'_y = (1,2) = 4$. Тогда уравнение касательной плоскости τ есть (см. (10.16)) $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$. #

§10.4 Дифференцирование сложной функции

Допустим, что величина z выражается через аргумент t с помощью вспомогательных переменных x и y: $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y_0 = y(t_0)$ или $z = z(t) = f(x(t), y(t))$, т.е. $z(t)$ – сложная функция (или композиция функций).

Теорема 10.6 (о дифференцируемости сложной функции). *Если функция f дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$, то функция $z(t)$ дифференцируема в t_0, причем*

$$z'(t_0) = f'_x(M_0)x'(t_0) + f'_y(M_0)y'(t_0) \tag{10.16}$$

или в условной записи

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Запишем приращение сложной функции при изменении аргумента от t_0 до $t_0 + \Delta t$:

$$\begin{aligned}\Delta z(t_0) &= f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = \\ &= f(x(t_0) + \Delta x, y(t_0) + \Delta y) - f(x(t_0), y(t_0)) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).\end{aligned} \tag{10.17}$$

В силу дифференцируемости функций f, $x(t)$, $y(t)$ в соответствующих точках имеем:

$$\Delta x = x'(t_0)\Delta t + \alpha, \quad \Delta y = y'(t_0)\Delta t + \beta, \tag{10.18}$$

$$\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \gamma,$$

где $\alpha, \beta = o(\Delta t)$, $\gamma = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

В силу формул (10.18) выражение для $\Delta z(t_0)$ примет вид

$$\Delta z(t_0) = [f'_x(M_0)x'(t_0) + f'_y(M_0)y'(t_0)]\Delta t + \delta, \tag{10.19}$$

где $\delta = f_x'(M_0)\alpha + f_y'(M_0)\beta + \gamma,$ при этом, очевидно, $\delta = o(\Delta t)$.

С другой стороны, для функции z одной переменной при изменении аргумента t от t_0 до $t_0 + \Delta t$ имеет место равенство

$$\Delta z(t_0) = z_t'(t_0)\Delta t + o(\Delta t). \tag{10.20}$$

Из сравнения формул (10.19) и (10.20) следует утверждение теоремы и соотношение для дифференциала сложной функции

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt. \tag{10.21}$$

Теорема доказана. #

Если x и y – дифференцируемые функции двух аргументов u и v, то из доказательства теоремы 10.6 (о дифференцировании сложной функции) следует, что (в условной записи)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Заметим, что соотношение (10.14,б) справедливо и тогда, когда x с y служат независимыми переменными, и тогда, когда они являются лишь вспомогательными переменными. Например, при $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ в условной записи

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{10.22}$$

§10.5. Дифференцирование неявной функции

Предположим, что дифференцируемая функция f двух переменных x и y задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$; $z = f(x,y)$ – решение этого уравнения. Будем предполагать, что функция F дифференцируема. Найдем формулы, выражающие частные производные $f_x'(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ через частные производные функции F.

Из определения неявной функции следует, что

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0 \qquad (10.23)$$

для всех x и y из области определения функции $f(x,y)$. В силу дифференцируемости функции F из (10.23) следует $dF\equiv 0$ или в силу (10.14,в)

$$F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy+F'_z(x,y,z)dz=0,$$

отсюда получаем

$$dz=-\frac{F'_x}{F'_z}dx-\frac{F'_y}{F'_z dy}. \qquad (10.24)$$

С другой стороны, для $z=f(x,y)$ имеем

$$dz=f'_x dx+f'_y dy. \qquad (10.25)$$

Из сравнения (10.24) и (10.25) получаем

$$f'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad (10.26)$$

при $F'_z\left(x,y,z\right)\neq 0$.

Аналогично, если дифференцируемая функция $f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$ и $y=f(x)$ есть решение этого уравнения, то при $F'_y(x,y)\neq 0$ нетрудно получить формулу

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (10.27)$$

Пример 8. Функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $y+xe^y=1$. Найти $y'(0)$.

Р е ш е н и е. В нашем случае $F(x,y)=y+xe^y-1$. По формуле (10.27)

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=\left|\begin{array}{l}F'_x=(y+xe^y-1)'_x=e^y\\ F'_y=(y+xe^y-1)'_y=1+xe^y\end{array}\right|=-\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

Если $x=0$, то $F(0,y)=(y+xe^y-1)\Big|_{x=0}=y-1$ и из $F(0,y)=0$ следует $y=1$, т.е. точка $M(0;1)$ принадлежит графику функции. Тогда

$$y'(0)=\left(-\frac{e^y}{1+xe^y}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}=-e\,. \qquad \#$$

§10.6. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных

10.6.1. Частные производные второго порядка

Допустим, что функция f двух переменных x и y имеет в открытой окрестности точки $M(x,y)$ одну из частных производных, которую обозначим g. Если функция двух переменных g в свою очередь обладает в точке $M(x,y)$ частной производной h, то h называют частной производной второго порядка от f. Естественные обозначения (учитывать различие между способами записи!):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x\,, \qquad f''_{yx}=(f'_y)'_x\,,\ldots\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{yx}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{xy}\,.$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются *смешанными* и отличаются друг от друга тем, что вычислены, как говорят, в разном порядке: первая – функцию f сначала дифференцировали по переменной x, затем результат дифференцировали по переменной y; вторая – наоборот.

Пример 9. Найти вторые производные от функции $f(x,y)=x^3y^2$.

Р е ш е н и е . $f'_x=(x^3y^2)'_x=3x^2y^2$, $f'_y=(x^3y^2)'_y=2x^3y$,

$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(3x^2y^2)'_x=6xy^2$, $f''_{xy}=(f'_x)'_y=(3x^2y^2)'_y=6x^2y$,

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = (2x^3y)'_x = 6x^2y\,, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y = (2x^3y) = 2x^3\,.\ \#$$

В приведенном примере совпадение смешанных производных не является случайным; ситуацию проясняет следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 10.7. *Если смешанные частные производные* f''_{xy} *и* f''_{yx} *непрерывны в некоторой точке, то они в данной точке совпадают.*

Пример 10. Для функции $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ найти f''_{xy}.

Р е ш е н и е.

$$f'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = -\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

10.6.2. Частные производные произвольного порядка

По аналогии с частными производными второго порядка вводятся частные производные третьего порядка $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{d^2 f}{\partial x \partial y}\right)$,... $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}\right)$,... или $f'''_{xxx} = (f''_{xx})'_x$, $f'''_{yxx} = (f''_{yx})'_x$, $f'''_{xyx} = (f''_{xy})'_x$, ...
и всех последующих порядков.

Если все частные производные порядка m непрерывны, то величина каждой из них зависит только от общего числа дифференцирований по x и y (и не зависит от очередности) и равна

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \qquad (10.28)$$

О п р е д е л е н и е . *Если все частные производные порядка m непрерывны, то функцию называют непрерывно дифференцируемой m раз.*

10.6.3. Дифференциалы второго и произвольного порядка функции двух переменных

Дифференциал df называют *дифференциалом первого порядка*, рассматривают его как функцию переменных x и y при неизменных дифференциалах dx и dy (см. (10.14,а)). Дифференциалы последующих порядков определяют индуктивно

$$d^m f = d(d^{m-1} f),\ m>1,$$

при этом $d^k x = d^{k-1}(dx) = 0$, $d^k y = d^{k-1}(dy) = 0$ для всякого $k>1$. Если f – дважды дифференцируема в точке $M(x,y)$ функция, то в этой точке существуют все частные производные второго порядка от f и

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(df(x,y))dx + \frac{\partial}{\partial y}(df(x,y))dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy)dy =$$

$$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2. \qquad (10.29)$$

Если функция f дифференцируема в точке $M(x,y)$ m раз, то $d^m f$ представляет собой сумму слагаемых вида

$$\frac{\partial^m f}{\partial z_1, \partial z_2 ... \partial z_m} dz_1 dz_2 ... dz_m, \qquad (10.30)$$

где каждое z_i равно либо x, либо y и потому

$$dz_1 \cdot dz_2 \cdot \dots \cdot dz_m = dx^k\, dy^{m-k}, \qquad (10.31)$$

при этом множителю (10.31) соответствует $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ слагаемых вида (10.30).

Таким образом, если функция f непрерывно дифференцируема m раз, то каждую частную производную порядка m можно привести к виду (10.28) и потому

$$d^m f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k} =$$

$$= C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial y^m} dy^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}} dx dy^{m-1} + \ldots + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m} dx^m, \ m \geq 1. \tag{10.32}$$

Определим *оператор дифференцирования d по двум аргументам*, положив

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy,$$

который ставит в соответствие функции f функцию $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Оператор

$$d^2 = dd = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) d = \frac{\partial (d)}{\partial x} dx + \frac{\partial (d)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial x} dx \right) \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) \right) dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2,$$

здесь принято по смыслу $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Тогда $\quad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$ (см. (10.29)).

Аналогично, для $m \geq 2$

$d^m = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m$ и формуле (10.32) можно придать вид:

$$d^m f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f(x, y) . \tag{10.33}$$

§10.7. Формула Тейлора для функции двух переменных

Изложенный в этом и следующем параграфе материал относится скорее к области приложения дифференциального исчисления функций двух переменных, а потому для более глубоко понимания следует еще раз прочитать аналогичные разделы для функций одной переменной.

Для функции *g* одной переменной *t*, непрерывно дифференцируемой в окрестности точки t_0, имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$g(t) = g(t_0) + \frac{1}{1!} g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} g''(t_0)(t - t_0)^2 + ...$$

$$+ \frac{1}{n!} g^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi)(t - t_0)^{n+1} , \tag{10.34}$$

$$\xi = t_0 + \theta(t - t_0) , \quad 0 < \theta < 1 .$$

Так как $g^{(m)}(t_0)(t - t_0)^m = d^m g(t_0)$ – дифференциал функции $g(t)$ порядка m в точке t_0, то формула (10.34) в дифференциалах принимает вид $(g(t) - g(t_0) = \Delta g)$:

$$\Delta g = \frac{dg(t_0)}{1!} + \frac{d^2 g(t_0)}{2!} + ... + \frac{d^n g(t_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} g(\xi)}{(n+1)!} . \tag{10.35}$$

Пусть величина g выражается через аргумент t с помощью вспомогательных переменных x,y, т.е.

$$g = f(x, y),\ x = x_0 + t\Delta x,\ y = y_0 + t\Delta y,\ 0 \le \theta \le 1 \text{ или}$$

$$g = g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \qquad (10.36)$$

и пусть функция f – непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ n+1 раз, а Δx и Δy – достаточно малы. Тогда функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема n+1 раз по t и в силу формулы (10.21) имеем

$$dg(t_0) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt\Bigg|_{t=t_0} =$$

$$= \left[\begin{matrix} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \end{matrix}\ \frac{dx}{dt} = \Delta x,\ \frac{dy}{dt} = \Delta y\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x_0 + t_0\Delta x, y_0 + t_0\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t_0\Delta x, y_0 + t_0\Delta y}{\partial y}\Delta y\right)dt\,.$$

В операторной записи (см. (10.33) при m = 1) из предыдущего следует

$$dg(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t_0\Delta y)dt\,.$$

В силу линейных относительно t выражений $x_0 + t\Delta x$ и $y_0 + t\Delta y$ справедливо (см(10.33)):

$$d^m g(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0 + t_0\Delta x, y_0 + t_0\Delta y)dt^m,\ 1 \le m \le n,$$

$$(10.37)$$

$$d^{n+1}g(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + (t_0 + \theta dt)\Delta x, y_0 + (t_0 + \theta dt)\Delta y) \cdot dt^{n+1}$$

.

Если принять $t_0 = 0$ и $dt = \Delta t = 1$, то $\Delta g = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) =$ $= g(1) - g(0) =$ [см. (10.36)] $= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f$, соотношения (10.37) переходят в следующие (с учетом (10.33)):

$$d^m g(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0,y_0)=d^m f(x_0,y_0),\ 1\le m\le n,$$

$$d^{n+1}g(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=$$

$$=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \qquad (10.38)$$

а формула Тейлора (10.35) (при $t_0=0$) превращается в формулу Тейлора для функции f двух переменных x и y:

$$\Delta f=\frac{df(x_0,y_0)}{1!}+\frac{d^2(x_0,y_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}+$$

$$+\frac{d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{(n+1)!},\ \ 0<\theta<1. \qquad (10.39)$$

Обозначим R_n остаточный член в формуле Тейлора, т.е. последнее слагаемое в (10.39), и пусть $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$. Тогда с учетом (10.38) формуле Тейлора можно придать вид

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^2 f(x_0,y_0)+\ldots+ \qquad (10.40)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^n f(x_0,y_0)+R_n.$$

Нетрудно показать, что

$$R_n=o(\rho^n),\ \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,. \qquad (10.41)$$

Формула Тейлора (в форме (10.40) или (10.39)) применяется для отыскания предельных значений функции, принимающих неопределенные значения для отыскания точек экстремума, для представления приращения функции в виде суммы последовательных дифференциалов df, $d^2 f$, $d^3 f$,... .

З а м е ч а н и е. При $x_0=y_0=0$ формула (10.40) переходит в формулу Маклорена.

Пример 11. Записать формулу Маклорена при $n = 3$ для функции:

а) $f(x,y) = \cos x \cos y$, б) $f(x,y) = e^{x+y}$.

Р е ш е н и е.

Из (10.40) при $x_0 = y_0 = 0$ имеем

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^2 + 3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}x^2 y + 3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3\right) +$$

$$+o(\rho^3), \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (10.42)$$

$$\begin{aligned}
&\text{а) } f(x,y) = \cos x \cos y, && f(0,0) = 1,\\
&f'_x = -\sin x \cos y, && f'_x(0,0) = 0,\\
&f'_y = -\cos x \sin y, && f'_y(0,0) = 0,\\
&f''_{xx} = -\cos x \cos y, && f''_{xx}(0,0) = -1,\\
&f''_{xy} = \sin x \sin y, && f''_{xy}(0,0) = 0,\\
&f''_{yy} = -\cos x \cos y, && f''_{yy}(0,0) = -1.
\end{aligned}$$

(10.43, а)

Все частные производные третьего порядка в точке (0;0) равны нулю (покажите самостоятельно). Поэтому после подстановки (10.43) в (10.42) получим $\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2!}(x^2 + y^2) + o(\rho^3)$.

б) $f(x,y) = e^{x+y}$. Легко видеть, что при любых целых m и k $(m > 1,\ 0 \le k \le m)$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = \frac{\partial^m \left(e^{x+y}\right)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = e^{x+y}, \text{ поэтому}$$

$$\frac{\partial^m f(0,0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = e^{x+y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = e^0 = 1, \quad f(0,0) = e^{x+y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1. \quad (10.43, б)$$

Подставляя (10.43, б) в (10.42) получим

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) = o\left(\rho^3\right).$$

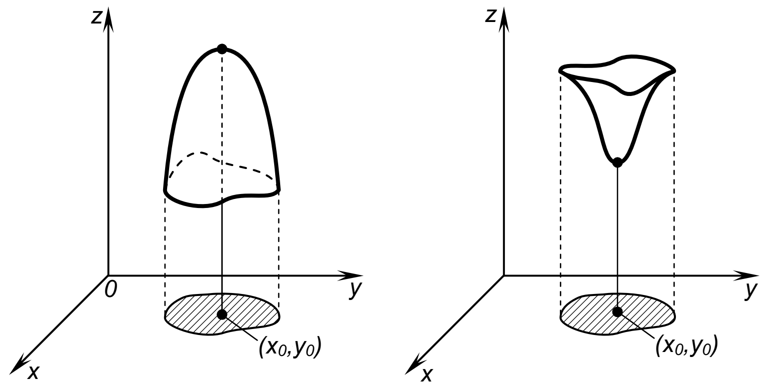
§10.8. Экстремумы функции двух переменных

10.8.1 Основные определения

Определение. *Функция $f(x, y)$ достигает максимума (минимума) в точке (x_0, y_0), если существует окрестность точки (x_0, y_0) такая, что для всякой точки (x, y) из нее приращение*

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \quad (\Delta f(x_0, y_0) > 0). \qquad (10.44)$$

Геометрически максимуму (минимуму) на поверхности $z = f(x, y)$ соответствует «вершина» («впадина») (рис.10.6, а, б).



а) б)

Рис. 10.6

Как и для функции одной переменной, понятие экстремума относится лишь к достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), таким образом, экстремум есть локальная характеристика, и вся поверхность $z = f(x, y)$ в области ее задания может содержать, естественно, точки, лежащие выше максимума или ниже минимума в конкретной точке.

Замечание. Если в окрестности точки (x_0, y_0) выполняется условие

$$\Delta f(x_0, y_0) \le 0 \qquad (\Delta f(x_0, y_0) \ge 0),$$

то функция в точке (x_0, y_0) имеет несобственный (или нестрогий) максимум (минимум).

10.8.2. Необходимые условия экстремума

Теорема 10.8. *Для того, чтобы дифференцируемая в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имела экстремум, необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (10.45)$$

Доказательство: Пусть в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, т.е. выполнено одно из условий (10.44). В частности, будет выполнено условие $f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y_0) > f(x_0, y_0))$ для всяких значений x, близких к x_0, а это означает, что функция одной переменной $f(x, y_0)$ в точке x_0 имеет экстремум. Отсюда следует первое из равенств (10.45). Второе равенство доказывается аналогично. #

Следствие. Точки, в которых функция $f(x, y)$ имеет экстремум, следует искать среди точек, где либо обе частные производные равны нулю, либо по меньшей мере одна из этих частных производных не существует, либо бесконечна. Подобные точки называются *критическими точками*; точки, в которых обе частные производные обращаются в нуль, называются *стационарными точками*.

Замечание. В случае дифференцируемой функции двух переменных $f(x, y)$ необходимые условия (10.45) имеют простой геометрический смысл: поверхность $z = f(x, y)$ может иметь в точке $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательную плоскость, параллельную плоскости Oxy.

Пример 12. а) Для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ из системы (10.45): $f'_x = 2x = 0$; $f'_y = 2y = 0$ находим единственную стационарную точку (0; 0). В этой точке функция имеет минимум, так как во всех остальных точках $f > 0$. #

б) Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ имеет частные производные

$$f'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}}, \quad f'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}}.$$

Точкой, «подозрительной» на экстремум, является единственная точка (0;0), в которой значения для частных производных становятся неопределенными. Вычислим их:

$$f'_x(0;0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \infty,$$

$$f'_y(0;0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{y^2} - 0}{y - 0} = \infty.$$

Однако, из вида зависимости ясно, что в начале координат функция имеет минимум, ибо $f(0;0) = 0$, а во всех других точках $f > 0$. #

10.8.3. Достаточные условия экстремума

Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда в окрестности точки M_0 существуют частные производные первого и второго порядков. Обозначим для краткости $f''_{xx}(M_0) = A$, $f''_{xy}(M_0) = B$, $f''_{yy}(M_0) = C$, $\Delta = B^2 - AC$.

Аналогом достаточных условий экстремума функций одной переменной является следующая теорема.

Теорема 10.9. *Пусть* M_0 *– критическая точка функции* f. *Тогда:*

1) если $A>0$ *и* $\Delta < 0$, *то* M_0 *– точка минимума функции* f;

2) если $A<0$ *и* $\Delta < 0$, *то* M_0 *– точка максимума функции* f;

3) если $\Delta > 0$, *то* M_0 *не является точкой экстремума.*

Доказательство. Рассмотрим пространство с декартовой системой координат *Oxyz*. Точка M_0 принадлежит плоскости

Oxy. Графиком функции $f(x,y)$ является поверхность σ, определяемая уравнением $z=f(x,y)$. Плоскость π, определяемая уравнением $y=y_0+k(x-x_0)$ и проходящая через точку M_0 перпендикулярно плоскости Oxy, пересечет поверхность σ по линии γ (рис. 10.7) Меняя угловой коэффициент в уравнении плоскости π, заставляем тем самым плоскость вращаться около оси M_0P и в результате будем получать разные линии γ, но все они будут проходить через точку $P(x_0,y_0,z_0)$, где $z_0=f(x_0,y_0)$.

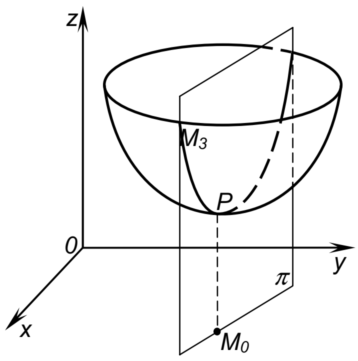


Рис. 10.7

Пусть композиция функций $f(x,y)$ и $y=y_0+k(x-x_0)$ есть $g(x)=f(x;y_0+k(x-x_0))$. Функция $g(x)$ одной переменной x будет также дважды дифференцируемой по x и графиком ее будет как раз линия γ пересечения поверхности σ и плоскости π. При $x=x_0$ имеем $y=y_0$ (из $y=y_0+k(x-x_0)$), и если точка $M_0(x_0,y_0)$ будет критической для функции f, то точка x_0 будет критической для композиции $g(x)$. Достаточным условием экстремума функции одной переменной сохранение знака второй производной в окрестности критической точки дважды непрерывной дифференцируемой функции. Если точка (x_0,y_0) доставляет экстремум функции f, то вторая производная $g''(x)$ в точке x_0 должна сохранять знак при любом значении k, т.е. линия γ , получающаяся при пересечении σ любой плоскостью π в точке P должна быть выпукла (вогнута).

По формуле (10.16) при $t=x$ имеем

$$g'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=f'_x(x,y)+kf'_y(x,y), \qquad (10.46, а)$$

$$g''(f)=\frac{\partial}{\partial x}(g')\frac{dx}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}(g')\frac{dy}{dx}=(f'_x+kf'_y)'_x+k(f'_x+kf'_y)'_y=$$

$$=f''_{xx}(xy)+2kf''_{xy}(x,y)+k^2 f''_{yy}(x,y)\,. \qquad (10.46,\text{ б})$$

При $x=x_0$, $y=y_0$ из (10.46, а,б) и (10.45) имеем $g'(x_0)=0$, $g''(x_0)=A+2kB+Ck^2$. Для того, чтобы $g''(x_0)$ сохраняла знак при любом значении k необходимо, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $A+2kB+k^2C$ был меньше нуля, т.е. $B^2-AB<0$. Для приращения функции f в точке M_0 воспользуемся формулой (10.39), (10.40) при $n=2$:

$$\Delta f=df(M_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(M_0)+o(\rho^2)=$$

$$=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+\frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(M_0)\Delta x^2+$$

$$+2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(M_0)\Delta y^2\Big]+o(\rho^2)$$

или в силу (10.45) (ибо M_0 – критическая точка) и принятых обозначений

$$\Delta f=\frac{1}{2}(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+o(\rho^2)=$$

$$=\frac{1}{2}A\left[\left(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y\right)^2-\frac{B^2-AC}{A^2}\right]+o(\rho^2)\,. \qquad (10.47)$$

Выберем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ достаточно малым, тогда $o(\rho^2)$ не будет влиять на знак выражения в правой части (10.47). Если $A>0$ и $\Delta<0$, то $\Delta f>0$ и в точке (x_0,y_0) функция f достигает минимума, а если $A<0$ и $\Delta<0$, то в точке (x_0,y_0) функция имеет максимум. При $\Delta>0$ $g''(x_0)$ меняет знак в зависимости от k (т.е. в зависимости от положения плоскости π линия γ в точке P либо выпукла, либо вогнута), а потому нет экстремума в точке M_0 ни у функции $g(x)$, ни у функции $f(x,y)$. Теорема доказана. #

Пример 13. Исследовать функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум.

Р е ш е н и е. Найдем критические точки, для чего решаем систему уравнений $\begin{cases} f_x'(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \\ f_y'(x,y) = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$ Критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Определим характер каждой из точек M_1 и M_2 по достаточному условию. Находим $f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$, $f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3$, $f''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y$. В точке $M_1(0;0)$ имеем $A = f''_{xx}(0;0) = 0$, $B = f''_{xy}(0;0) = -3$, $C = f''_{yy}(0;0) = 0$, $\Delta = B^2 - AC = 9 > 0$ – экстремума нет. В точке $M_2(1;1)$ A=6, B= –3, C=6, $\Delta = 9 - 36 = -27 < 0$, поэтому M_2 – точка экстремума функции f, именно, минимума, т.к. $A > 0$; $f(M_2) = f(1;1) = -1$.

10.8.4. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Согласно теореме 10.3 всякая непрерывная в замкнутой и ограниченной области D функция достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений. Чтобы их найти нужно сначала найти в D все точки, в которых экстремальные значения в принципе могут достигаться, а затем сравнить значения функции f только в этих точках и выбрать наименьшее и наибольшее из этих значений.

Пример 14. 1) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy + 50/x + 20/y$ в области D, заданной неравенствами $y \geq 1$, $x \leq 6$, $y \leq 2x$; 2) Определить характер критических точек функции $z(x, y)$ во всей естественной области ее определения, используя достаточное условие экстремума; 3) Сделать чертеж области D.

Р е ш е н и е. 2) Критические точки функции $f(x, y)$ и их характер определяются на основании теорем 10.8 и 10.9.

Естественная область существования $D(f)$ заданной функции есть вся числовая плоскость $R^2 = \{(x, y)\}$ за исключением линий

$x = 0$ и $y = 0$, то есть $D(f) = \left\{(x, y) \in R^2, x \neq 0, y \neq 0\right\}$. Находим $z'_x = (xy + 50/x + 20/y)'_x = y - 50/x^2$ и $z'_y = (xy + 50/x + 20/y)'_y = x - 20/y^2$; из необходимого условия экстремума определяем критические точки:

$$\begin{cases} x = 50y^{-2}, \\ x(125 - x^3) = 0; \end{cases}$$

таким образом, решением системы будут $x = 5$, $y = 2$, то есть критическая точка $M_1(5; 2)$.

Определим характер точки M_1 по достаточному условию. Для этого найдем

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(y - 50x^{-2}\right)'_x = 100x^{-3},$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(x - 50y^{-2}\right)'_y = 40y^{-3},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(y - 50x^{-2}\right)'_y = 1.$$

В точке M_1: $A = z''_{xx}(M_1) = 100x^{-3}\Big|_{x=5} = 100/125 = 4/5 > 0,$

$C = z''_{yy}(M_1) = 40y^{-3}\Big|_{y=2} = 40/8 = 5,$ $B = z''_{xy}(M_1) = 1,$ тогда

$\Delta(M_1) = B^2 - AC = -3$.

Следовательно, по теореме 10.9, $M_1(5; 2)$ – точка минимума функции и $z_{\min} = (xy + 50/x + 20/y)\Big|_{x=5, y=2} = 5 \cdot 2 + 50/5 + 20/2 = 30.$

1) Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x, y)$ в замкнутой области D, ограниченной ломаной $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$: а) находим критические точки внутри D; б) на каждом звене γ_k ломаной сводим f к функции f_k одной переменной и выделяем на γ_k точки, соответствующие критическим точкам функции f_k ; в) вычисляем значения функции f в точках из пунктов а), б) и в вершинах ломаной $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$ и выбираем

среди них наибольшее и наименьшее.

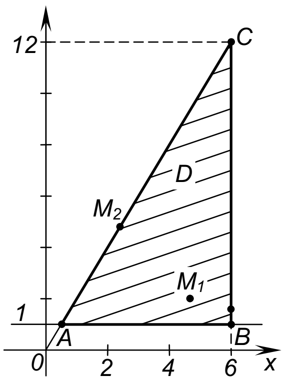


Рис.10.8

Сделаем чертеж области D , ограниченной линиями $y = 1$, $x = 6$, $y = 2x$ (заштрихована на рис. 10.8). Убеждаемся, что любая внутренняя точка области, например, $M(4;\ 4)$, удовлетворяет заданным неравенствам $y \geq 1$, $x \leq 6$, $y \leq 2x$. Пересечение линий $y = 1$, $y = 2x$ дает вершину $A(0{,}5;\ 1)$, линий $x = 6$, $y = 1$ – вершину $B(6;1)$, линий $x = 6$, $y = 2x$ – вершину $C(6;12)$. а) Критическая точка $M_1(5;\ 2) \in D$. б) На участке AC: $y = 2x$, $x \in [0{,}5;\ 6]$ функция $z(x, y)$ сводится к функции $z_1(x) = z(x,2x) = x \cdot 2x + 50/x + 20/(2x) = 2x^2 + 60/x$. Критические точки функции z_1: $z_1'(x) = 4x - 60/x^2 = 0$ или (так как $x \neq 0$) $4x^3 - 60=0$, $x_{кр} = \sqrt[3]{15} \in [0{,}5;6]$, тогда $y = 2x\big|_{x=x_{кр}} = 2\sqrt[3]{15}$, то есть, получим точку $M_2\left(\sqrt[3]{15};2\sqrt[3]{15}\right)$. На участке AB: $y = 1$, $x \in [0{,}5;\ 6]$ функция $z(x, y)$ сводится к функции $z_2(x) = z(x,1) = x + 50/x + 20$. Критические точки функции $z_2(x)$: $z_2'(x) = 1 - 50/x^2 = 0$, $x^2 = 50$, $x_{1,2} = \pm 5\sqrt{2} \notin [0{,}5;6]$ (точки $x_{1,2}$ не принадлежат отрезку $0{,}5 \leq x \leq 6$), – критических точек нет. На участке BC: $x = 6$, $y \in [1;\ 12]$ функция $z(x, y)$ сводится к функции $z_3(y) = z(6,\ y) = 6y + 50/6 + 20/y$. Критические точки функции $z_3(x)$: $z_y' = 6 - 20/y^2 = 0$, $y^2 = 20/6 = 10/3$, $y_{кр} = +\sqrt{10/3} \in [1;12]$, $y_2 = -\sqrt{10/3} \notin [1;12]$, то есть, получим точку $M_3\left(6;\sqrt{10/3}\right)$. в) Находим значения функции $z = xy + 50/x + 20/y$ в точках A, B, C, M_1, M_2, M_3: $z(A) = z(0{,}5;\ 1) = 120{,}5$; $z(B) = z(6;\ 1) = 103/3$; $z(C) = z(6;12)=246/3$; $z(M_1) = z(5;2)=30$; $z(M_2) = z\left(\sqrt[3]{15};2\sqrt[3]{15}\right) = 90/\sqrt[3]{15}$, $z(M_3) = z\left(6;\sqrt{10/3}\right) = 12\sqrt{10/3} + 25/3$. Следовательно, наибольшее значение $\sup z = 120{,}5$, наименьшее значение $\inf z = 30$.

Вопросы и предложения для самопроверки

1. Область определения функций 2-х переменных. Естественная область определения. Изображение областей на плоскости. Окрестность точки. Внутренние и граничные точки области.

2. График функции 2-х переменных.

3. Определение бесконечно малых функций и предела функции 2-х переменных. Непрерывность функции в точке ее области определения. Непрерывность функции на множестве.

4. Частные и полное приращения функции 2-х переменных. Определение непрерывности функции в точке на языке приращений. Частные производные функции 2-х переменных и их геометрический смысл.

5. Определение дифференцируемости функции 2-х переменных в точке. Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости функции 2-х переменных. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференцируемости функции в точке. Уравнение касательной плоскости к графику дифференцируемой функции.

6. Понятие сложной функции нескольких переменных. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Частные производные сложных функций. Частные производные функций, заданных неявно.

7. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных (формулировка). Дифференциалы высших порядков функции 2-х переменных. Формула Тейлора (в частности, Маклорена) порядка n для функции 2-х переменных.

8. Точка минимума и точка максимума функции 2-х переменных; точка экстремума. Критические точки. Необходимое условие экстремума функции 2-х переменных. Формулировка достаточного условия экстремума функции 2-х переменных в невырожденной критической точке.

9. Исследование функции 2-х переменных на наименьшее и наибольшее значения в замкнутой ограниченной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.–М.:Наука,1971.–Т.1.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа.–М.:Наука,1967.–Т.1,2.

3. *Шипачев В.С.* Высшая математика.– М.:Высшая школа,1985.

4. *Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С.* Краткий курс высшей математики.–М.:Высшая школа,1978.-Т.1, 2.

5. *Смирнов В.С.* Курс высшей математики.–М.:Наука,1958.–Т.1,2.

6. *Толстов Г.П.* Курс математического анализа.–М.:ГИТТЛ,1957.-Т.2.

7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.-М.:Наука,1965.

8. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.-М.:Наука,1966.

9. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа.–М.: Высшая школа, Т.1,2, 1988.

10. *Рождественский Б.Л.* Лекции по математическому анализу.–М.: Наука, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Как и ранее, перед решением примеров настоятельно рекомендуется просмотреть теоретический материал по учебным пособиям или учебникам. Ссылки на учебное пособие: В.Я.Долгих, Э.Б.Шварц. «Высшая математика для заочников», Ч. II – Н-ск: НГТУ,2006» будем обозначать: ВМЗ – ч.II с указанием параграфа, пункта, номера формулы или таблицы, страницы. И, поскольку, если постижение чего-либо нового дается с трудом, то следует помнить: кто обладает информацией, тот владеет ситуацией! (т.е. всякий труд во благо!).

Желаем успехов!

Методические указания к нахождению неопределенных интегралов и вычислению определенных интегралов

1^0. Подведение под знак дифференциала.

Из свойств дифференциала следует: 1) $d[cf(x)] = c \cdot df(x)$; 2) $d[c + f(x)] = df(x)$. Читая их справа налево, получим правила: 1) постоянный множитель можно заносить под знак дифференциала; 2) под знаком дифференциала можно прибавлять произвольную постоянную.

Замечание. Занесение выражения под знак дифференциала означает фактически интегрирование этого выражения. Покажем это примерами.

Пример 1. Записать выражение x^2dx под знаком дифференциала. Интегрируем данное выражение (см. ВМЗ – ч.II, таблица 7.1, формула 16^0): $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Берем дифференциал от каждой части: $d\int x^2 dx = d\frac{x^3}{3}$, откуда (так как дифференциал и интеграл, стоящие рядом, уничтожаются – см. ВМЗ – ч.II, формула (7.9)) $x^2 dx = d\frac{x^3}{3}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int \frac{\cos\ln x}{x}dx$.

Решение. Имеем $\int \frac{dx}{x} = \ln x$, откуда $\frac{dx}{x} = d\ln x$. Таким образом,

$$I = \int \frac{\cos\ln x}{x}dx = \int \cos\ln x \cdot d\ln x = \left[\int \cos u du = \sin u - \text{табличный интеграл}\right] =$$

$= \sin\ln x + C.$ Сделаем проверку: $d(\sin\ln x + C) = (\cos\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$.

Замечание. В примерах 1 и 2 в процедуре занесения под знак дифференциала была опущена постоянная интегрирования. Впредь это замечание следует иметь в виду.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int \frac{e^{3x-5}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}$.

Решение. Здесь можно предложить следующую последовательность действий: а) записываем $e^{3x-5} = e^{-5}e^{3x}$ и множитель e^{-5} выносим за знак интеграла, б) занесем e^{3x} под дифференциал $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ и $e^{3x}dx = \frac{1}{3}de^{3x}$, в) вынесем в знаменателе 5 за знак радикала; таким образом, приходим к интегралу $I = \frac{e^{-5}}{3\sqrt{5}}\int \frac{de^{3x}}{\sqrt{\frac{4}{5}-\left(e^{3x}\right)^2}}$ – это табличный интеграл $\left(\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{a}\right)$: $I = \frac{e^{-5}}{3\sqrt{5}}\arcsin\frac{e^{3x}\sqrt{5}}{2} + C.$ Проверим вычисления: $d\left(\frac{e^{-5}}{3\sqrt{5}}\arcsin\frac{e^{3x}\sqrt{5}}{2} + C\right) = \frac{e^{-5}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^{6x}5}{4}}} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot e^{3x}dx = \frac{e^{3x-5}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}$, что совпадает с подынтегральным выражением в интеграле I.

2^0. Интегрирование по частям (ВМЗ – ч.II, §.7.7).

Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$. По этой формуле заменяют отыскание интеграла в левой части формулы отысканием интеграла в правой части, когда последний проще.

Замечание. К числу интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, относятся, например, интегралы вида $\int P(x)f(x)dx$, где $P(x)$ – многочлен (в частности, степенная функция x^n), а $f(x)$ – одна из следующих функций: e^{ax}, $\sin ax, \cos ax, \ln x, \operatorname{arctg} x, \arcsin x, \arccos x$.

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Здесь следует положить $u = \operatorname{arctg} x$ (ибо дифференцирование $\operatorname{arctg} x$ приводит к рациональной функции), $dv = x^2 dx$. Имеем: $I = \int x^2 \operatorname{arctg} x dx =$

$$= \left[u = \mathrm{arctg}x,\ du = \frac{dx}{1+x^2};\ \ dv = x^2dx,\ v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3};\ \int udv = uv - \int vdu \right] =$$

$= \dfrac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x - \dfrac{1}{3}\int x^3 \dfrac{dx}{1+x^2}$. Имеем в правой части интеграл $\int \dfrac{x^3}{1+x^2}dx$ – интеграл от рациональной функции. Вычисление подобных интегралов разобрано ниже. Здесь ограничимся следующим. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

Таким образом, $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$

$= \left| \int xdx = \dfrac{x^2}{2}\right.$ и $xdx = \dfrac{1}{2}dx^2 = d\left(x^2+1\right)$ – подвели x под знак дифференциала

и прибавили под дифференциалом $1\Big| = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

Окончательно,

$I = \displaystyle\int x^2\mathrm{arctg}xdx = \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x - \frac{x^2}{6} + \ln\sqrt[6]{x^2+1} + C$ (здесь $\dfrac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right) = \ln\sqrt[6]{x^2+1}$).

Сделаем проверку: $I'_x = \dfrac{1}{3}\left(3x^2\mathrm{arctg}x + \dfrac{x^3}{1+x^2}\right) - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2x}{6\left(x^2+1\right)} =$

$$= x^2\mathrm{arctg}x + \frac{x^3}{3\left(1+x^2\right)} - \frac{x}{3} + \frac{x}{3\left(x^2+1\right)} = x^2\mathrm{arctg}x + \frac{x^3 - x^3 - x + x}{3\left(x^2+1\right)} = x^2\mathrm{arctg}x.$$

Замечание. В некоторых задачах требуется повторное применение формулы интегрирования по частям. Приведем пример.

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \int x\ln^2 xdx$.

Решение. Полагая здесь $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$ и применяя формулу интегрирования по частям, получим $I = \int x\ln^2 xdx =$

$= \left[u = \ln^2 x, du = 2\ln x\dfrac{dx}{x}; dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2}\right] = \displaystyle\int udv = uv - \int vdu = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln xdx$. К интегралу в правой части снова применим формулу интегрирования по частям: $\int x\ln xdx =$

$$= \left[u = \ln x, du = \frac{dx}{x}; dv = xdx, v = \frac{x^2}{2}\right] = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

Окончательно, $I = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + C$.

Проверка: $I'_x = \frac{1}{4}\left[2x\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + x^2\left(4\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)\right] =$

$= \frac{1}{4}\left(4x\ln^2 x - 4x\ln x + 2x + 4x\ln x - 2x\right) = x\ln^2 x$.

3^0. Интегрирование рациональных дробей.

Согласно теореме, интегрирование правильной дроби (степень числителя меньше степени знаменателя) осуществляется путем разложения ее на простейшие, для которых известны «табличные» значения. В примерах используются простейшие дроби вида: $\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \left(p^2 - 4q < 0\right)$ – простейшие дроби I-III типов. Практически разложение правильной дроби на простейшие осуществляется по методу неопределенных коэффициентов.

Интегрирование простейших дробей проводится по формулам (см. ВМЗ – ч.II, §7.9).

(I) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a|$; (II) $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$;

(III) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$.

Приведем примеры. Прежде чем приступить к интегрированию, следует прочесть о разложении правильной дроби на простейшие и о методе неопределенных коэффициентов (см. ВМЗ – ч.II, $п^0п^0$.7.10.2, 7.10.3, 7.10.4).

Пример 6. Найти интеграл $I = \int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 8}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь – неправильная (в числителе и знаменателе стоят многочлены одинаковой, третьей, степени). Выделим целую часть делением уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 5 & x^3 - 8 \\ \cline{2-2} -\ \ x^3 - 8 & 1 \\ \hline x^2 + 3 & \end{array}$$

Таким образом,

$\dfrac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\dfrac{x^2+3}{x^3-8}$. Знаменатель дроби $\dfrac{x^2+3}{x^3-8}$ разложим (как разность кубов) на линейный и квадратичный множители: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ и запишем разложение правильной дроби (см. ВМЗ – ч.II, формула (7.33)) с подлежащими определению коэффициентами A, B, C:

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{x^2+3}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \qquad (*)\ ;$$

приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим равенство числителей дробей, стоящих в (*) справа и слева:

$$A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)\equiv x^2+3 \qquad (**)$$

или

$$(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C\equiv x^2+3 \qquad (***)$$

Так как знаменатель x^3-8 имеет действительный корень $x_1=2$, то, подставив в обе части тождества (**) вместо x значение 2, получим 12А = 7 $\Rightarrow$ А = 7/12.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в (***), придем к системе уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\left.\begin{array}{r|c} x^2 & A+B=1; \\ x & 2A-2B+C=0; \\ x^0 & 4A-2C=3. \end{array}\right\}$$. Решая эту систему с учетом ранее полученного $A = 7/12$,

найдем $B = 5/12$, $C = -1/3$.

Таким образом, $\dfrac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\dfrac{7}{12(x-2)}+\dfrac{5x-4}{12(x^2+2x+4)}$.

Следовательно (см. формулы (I), (III)),

$$\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx=\int dx+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{1}{12}I_1 .$$

Для I_1:

$I_1=\displaystyle\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx=$ [преобразуем знаменатель, выделив полный квадрат:

$x^2+2x+4=(x^2+2x+1)+3=(x+1)^2+3$] $=\displaystyle\int\frac{5x-4}{(x+1)^2+3}dx=$

$=$ | перейдем к новой переменной t, положив $x+1=t$, тогда $x=t-1$, $dx=dt$ | $=$

$= \displaystyle\int \frac{5(t-1)-4}{t^2+3}dt = 5\int\frac{tdt}{t^2+3} - 9\int\frac{dt}{t^2+3} =$

$= \Big[$ в первом интеграле внесем t под дифференциал: $tdt = \frac{1}{2}dt^2 = \frac{1}{2}d\left(t^2+3\right)$; второй

интеграл – табличный$\Big] =$

$= \displaystyle\frac{5}{2}\int\frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} - 9\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}\ln\left|t^2+3\right| - 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} = [t = x+1] =$

$= \displaystyle\frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$

Интеграл $I = x + \dfrac{7}{12}\ln|x-2| + \dfrac{5}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Пример 7. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x^3+2x^2+12x+1}{x^4+7x^2+10}dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная дробь. Найдем разложение ее знаменателя на множители: $x^4+7x^2+10 = \left(x^2+2\right)\left(x^2+5\right)$. Подынтегральную функцию – правильную рациональную дробь – разложим в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами (см. ВМЗ – ч.II, формула (7.33)): $\dfrac{3x^3+2x^2+12x+1}{x^4+7x^2+10} = \dfrac{3x^3+2x^2+12x+1}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+5\right)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+5}$. Для числителей дробей имеем равенство:

$(Ax+B)\left(x^2+5\right) + (Cx+D)\left(x^2+2\right) = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (5A+2C)x + (5B+2D) =$
$= 3x^3+2x^2+12x+1$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=3; \\ x & 5A+2C=12; \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x^2 & B+D=2; \\ x^0 & 5B+2D=1. \end{array}$$

Полученная система распадается на две (независимые) системы. Решая их, найдем: для первой системы $3A = 6$, $-3C = -3$ и $A = 2$, $C = 1$; для второй системы $3B = -3$, $-3D = -9$ и $B = -1$, $D = 3$. Таким образом, заданная дробь $\dfrac{3x^3+2x^2+12x+1}{x^4+7x^2+10} = \dfrac{2x-1}{x^2+2} + \dfrac{x+3}{x^2+5}$.

Вычислим интеграл: $\displaystyle\int\frac{3x^3+2x^2+12x+1}{x^4+7x^2+10}dx = \int\frac{2x-1}{x^2+2}dx + \int\frac{x+3}{x^2+5}dx = I_1 + I_2$.

Интеграл $I_1 = \displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2+2}dx = \int\frac{2x}{x^2+2}dx - \int\frac{dx}{x^2+2} = \int\frac{d\left(x^2+2\right)}{x^2+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} =$

$= \ln\left(x^2+2\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Для второго интеграла имеем:

$$I_2 = \int \frac{x+3}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} = \ln\sqrt{x^2+5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно, $I = I_1 + I_2 = \left(\ln\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+5}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{5}} + C$

(использовали свойство $\ln a + \ln b = \ln(ab)$).

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int \frac{4x^3+9x^2+28}{x^4-16}dx.$

Решение. Подынтегральная дробь – правильная. Разложим знаменатель x^4-16 на множители: $x^4-16 = \left(x^2+4\right)(x-2)(x+2)$. Имеем, далее,

$\dfrac{4x^3+9x^2+28}{x^4-16} = \dfrac{4x^3+9x^2+28}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$ и, таким образом,

$A\left(x^2+4\right)(x+2) + B\left(x^2+4\right)(x-2) + (Cx+D)\left(x^2-4\right) = (A+B+C)x^3 + (2A-2B+D)x^2 +$ $+ \quad (4A+4B-4C)x + (8A-8B-4D) = 4x^3+9x^2+28$ (*). Для определения коэффициентов A,B,C,D воспользуемся тем, что равенство (*) есть тождество по x (то есть оно выполняется при любых x). Воспользуемся корнями знаменателя; при x_1= 2: $32A = 4x^3+9x^2+28\big|_{x=2} = 96$ и A = 3. При x_2 = – 2:

$32B = 4x^3+9x^2+28\big|_{x=2} = 32$ и B = – 1. Добавим два недостающих (для определения C и D) уравнения; приравнивая коэффициенты при x^3 и x^2 в обеих частях (*):

$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=4; \\ x^2 & 2A-2B+D=9. \end{array}$ Имеем отсюда (зная, что A = 3, B = – 1): C = 2, D = 1, и для дроби получим разложение ее в сумму простейших дробей:

$\dfrac{4x^3+9x^2+28}{x^4-16} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2x+1}{x^2+4}$. Вычислим интеграл I:

$$I = \int \frac{4x^3+9x^2+28}{x^4-16}dx = 3\int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{dx}{x+2} + \int\frac{2x+1}{x^2+4}dx =$$

$$= 3\ln|x-2| - \ln|x+2| + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Проверка: $I'_x = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2x}{x^2+4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2/4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{4x^3+9x^2+28}{x^4-16}$.

4^0. *Интегрирование алгебраических иррациональностей и рациональных функций, зависящих от тригонометрических функций*

Примеры на интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ (как от переменных), а также примеры на интегрирование алгебраических иррациональностей вида $R\left(x, x^{m/n}, x^{p/q}, \ldots\right)$ или $R\left(x, (x-a)^{m/n}, (x-a)^{p/q}, \ldots\right)$ решаются, в основном, по методу замены переменной в неопределенном интеграле. Рассмотрение нижеследующих примеров следует начинать после прочтения ВМЗ–ч.II, §§ 7.11–7.13.

Пример 9. Вычислить интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция есть рациональная функция от x и от x в дробных степенях: $R\left(x, x^{1/2}, x^{1/3}\right)$. По теории здесь следует найти *общее наименьшее кратное показателей корней* 2 и 3: о.н.к. = [2;3] = 6 и сделать подстановку $t = \sqrt[6]{x}$. Отсюда имеем: $x = t^6$ и $dx = 6t^5dt$. Тогда $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{x - \sqrt[3]{x^2}} =$

$= \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^4 dt}{t^2 - 1}$. В последнем интеграле подынтегральная функция есть рациональная (неправильная) дробь.

Можно выделить целую часть делением уголком. В данном примере выделим целую часть, отняв и добавив в числителе единицу: $\frac{t^4}{t^2-1} = \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1} = t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}$, а последнюю дробь разложим в сумму простейших дробей, преобразовав числитель: $1 = \frac{1}{2}\left[(t+1) - (t-1)\right]$:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

Для интеграла получим:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{x - \sqrt[3]{x^2}} = 6\int \frac{t^4 dt}{t^2-1} = 6\int \left(t^2+1\right)dt + 3\left(\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1}\right) = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Здесь надлежит заменить t на $\sqrt[6]{x}$; получим $I = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|^3 + C$.

Пример 10. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x+\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}dx$.

Решение. Так как о.н.к. = [2;3] = 6, то можно сделать замену: $t=\sqrt[6]{x-1}$; тогда : $x=t^6+1$ и интеграл $I=\int\frac{t^6+1+t^2-1}{t^3+t^2}dt=\int\frac{t^2\left(t^4+1\right)dt}{t^2\left(t+1\right)}=\int\frac{t^4-1+2}{t+1}dt=$

$$=\int\left(t^3+t^2+t+1+\frac{2}{t+1}\right)dt=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{\left(t+1\right)^2}{2}+2\ln\left|t+1\right|\Big|_{t=\sqrt[6]{x-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{\left(x-1\right)^4}}{4}+\frac{\sqrt{x-1}}{3}+\frac{\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right)^2}{2}+\ln\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right)+C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение. Заметим, что в подобных примерах применяется универсальная подстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Здесь $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{1}{8-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$

$=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=\int\frac{2dt}{(t-3)(t-5)}=$ [выделим квадрат в знаменателе: $t^2-8t+15=$

$=(t^2-2t\cdot 4+16)-1$] $=2\int\frac{dt}{\left(t-4\right)^2+1}=\left|\begin{matrix}\text{пусть}\ \ t-4=z,\\ \text{тогда}\ \ t=z+4, dt=dz\end{matrix}\right|=2\int\frac{dz}{z^2-1}=$

$=$ | см. таблицу 7.1, формула 18^0 | $=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$

5^0. Несобственные интегралы (ВМЗ – ч.II, §§ 8,9).

Символом $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ (*несобственный интеграл первого рода*), $\left|f(x)\right|\le M\ \ \forall x\in\left[a,\infty\right)$ обозначается предел $\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$. Если известна некоторая первообразная $F(x)$ для $f(x)$, то в таком случае применима формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a)$. В этой формуле под $F(\infty)$ понимают предел: $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Аналогично (для ограниченной функции $f(x)$),

$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^a f(x)dx$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx + \int\limits_a^\infty f(x)dx$ – для сходимости здесь требуется сходимость обоих несобственных интегралов (первого рода).

Напомним, что несобственные интегралы первого рода обобщают понятие определенного интеграла на бесконечный промежуток интегрирования. Другое обобщение определенного интеграла – на функции, принимающие в некоторых точках бесконечно большие значения. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Тогда под символом $\int\limits_a^b f(x)dx$ понимают предел: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ – *несобственный интеграл второго рода*. Если $a < c < b$ и в окрестности точки c функция $f(x)$ неограничена (хотя бы и с одной стороны), то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, причем для сходимости нужно, чтобы существовали оба интеграла справа. Как и для интеграла первого рода, здесь также применима формула Ньютона-Лейбница: если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$; здесь под $F(a)$ понимают предел: $F(a) = \lim\limits_{x\to a+0} F(x)$.

Приведем примеры.

Пример 12. Вычислить или установить расходимость интеграла

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{arctg} x dx}{1+x^2}.$$

Решение. Имеем несобственный интеграл первого рода. Для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2}$ найдем первообразную $\int \dfrac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2}dx =$

$= \int \mathrm{arctg} x d(\mathrm{arctg} x) = \dfrac{(\mathrm{arctg} x)^2}{2}$. К вычислению интеграла I применим теперь формулу Ньютона-Лейбница:

$I=\left[F(x)\big|_1^{\infty}\right]=\dfrac{(\operatorname{arctg}x)^2}{2}\Bigg|_1^{\infty}=\dfrac{1}{2}\left[(\operatorname{arctg}\infty)^2-(\operatorname{arctg}1)^2\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{16}\right)=\dfrac{3\pi^2}{32}$. Таким образом, интеграл I сходится, при этом: $I=\dfrac{3\pi^2}{32}$.

Пример 13. Провести исследование поведения интеграла $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xdx}{1+x^2}$.

Решение. По определению, $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xdx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{a}\dfrac{xdx}{1+x^2}+\int\limits_{a}^{\infty}\dfrac{xdx}{1+x^2}$. Найдем первообразную для $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; $F(x)=\int\dfrac{xdx}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\ln\sqrt{1+x^2}$. Далее, интеграл $I=\ln\sqrt{1+x^2}\Big|_{-\infty}^{a}+\ln\sqrt{1+x^2}\Big|_{a}^{\infty}$. Так как первое слагаемое при $x\to-\infty$ обращается в бесконечность, то интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xdx}{1+x^2}$ расходится и, следовательно, исходный интеграл – расходящийся.

Пример 14. Вычислить или установить расходимость интеграла $I=\int\limits_{0}^{\pi/4}\operatorname{ctg}xdx$.

Решение. Имеем несобственный интеграл второго рода: $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$ – подынтегральная функция неограниченна в точке $x = 0$. Далее, $I=\int\limits_{0}^{\pi/4}\operatorname{ctg}xdx=$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|\Big\|_0^{\pi/4}=\ln\sin\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to+0}\ln\sin x=+\infty$$

– интеграл расходится.

Пример 15. Выяснить поведение интеграла $I=\dfrac{4}{5}\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$.

Решение. Подынтегральная функция в точке $x=1\in[-1,2]$ обращается в бесконечность – имеем два несобственных интеграла второго рода. Далее,

$$I=\frac{4}{5}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}=\frac{4}{5}\int\limits_{-1}^{2}(x-1)^{-1/5}d(x-1)=$$

$$=\frac{4}{5}\left(\int\limits_{-1}^{1}(x-1)^{-1/5}d(x-1)+\int\limits_{1}^{2}(x-1)^{-1/5}d(x-1)\right)=\sqrt[5]{(x-1)^4}\Big|_{-1}^{1}+\sqrt[5]{(x-1)^4}\Big|_{1}^{2}=$$

$= (0-\sqrt[5]{16})+(1-0)=-\sqrt[5]{16}$.

– оба интеграла в правой части – сходящиеся; исходный интеграл I – сходится и $I=-\sqrt[5]{16}$.

6^0. Приложение определенного интеграла (ВМЗ – ч.II, §§ 8,10).

Примеры на геометрическое приложение определенного интеграла: вычисление плоских фигур, объемов тел вращения и длин кривых.

Пример 16. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$ (см. рис.1).

Решение. Определим абсциссы точек пересечения A и B параболы и прямой: $y = 2x - x^2,\ y = -x \Rightarrow 2x - x^2 = -x \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x_A = 0,\ x_B = 3$.

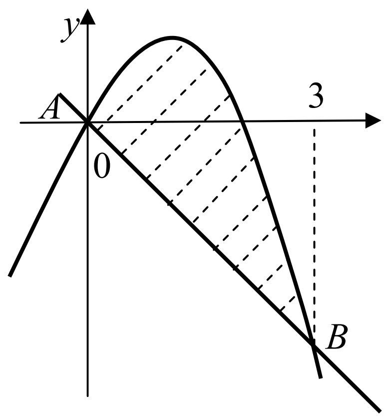


Рис. 1.

Площадь криволинейной трапеции $D:\ \{x=a, x=b; y=f_1(x)\le y=f_2(x)\}$ вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx \quad (*)$$

В данном случае имеем: $S=\int_a^b [(2x-x^2)-(-x)dx]=\int_0^3 [(3x-x^2)]dx=$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.$$

Пример 17. Вычислить площадь фигуры (см. рис.2), ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$, заданной в параметрической форме.

Решение. Для определения площади области, ограниченной заданной кривой, определим площадь S_1 заштрихованной области – четвертой части искомой площади. Из формулы (*) находим: $S_1=\int_0^a y(x)dx$. В этом интеграле сделаем замену переменных по правилу: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$. Найдем значения

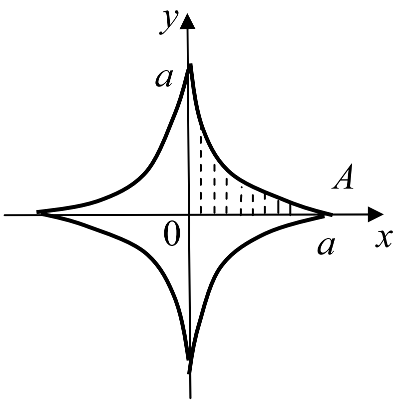


Рис.2

параметра t , соответствующие значениям $x = 0$ и

$x = a : 0 = a\cos^3 t$, откуда $\cos t = 0,\ t_1 = \dfrac{\pi}{2}$;

$a = a\cos^3 t$ и $\cos t = 1$, откуда $t_2 = 0$. Подставим t_1, t_2, $x(t)$ и $y(t)$ в интеграл:

$S_1 = \int\limits_{\pi/2}^{0} \underbrace{a\sin^3 t}_{y}\underbrace{a3\cos^2 t(-\sin t)dt}_{dx} = -3a^2\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos^2 t dt$. Для вычисления этого интеграла преобразуем подынтегральную функцию:

$\sin^4 t\cos^2 t = (\sin^2 t\cos^2 t)\cdot\sin^2 t =$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2t\sin^2 t = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{16}(1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 4t\cdot\cos 2t) =$$

$$= \frac{1}{16}\left[1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{1}{2}(\cos 6t+\cos 2t)\right] = \frac{1}{32}(2-2\cos 4t+\cos 6t-\cos 2t).$$

Интегрируем это выражение, изменив порядок интегрирования в определенном интеграле $\left(-\int\limits_{\pi/2}^{0} = \int\limits_{0}^{\pi/2}\right)$: $S_1 = \dfrac{3a^2}{32}\int\limits_{0}^{\pi/2}(2-2\cos 4t+\cos 6t-\cos 2t)dt =$

$= \dfrac{3a^2}{32}\left(2t-\dfrac{\sin 4t}{2}+\dfrac{\sin 6t}{6}-\dfrac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \dfrac{3a^2\pi}{32}$. Итак, $S = 4S_1 = \dfrac{3}{8}a^2\pi$.

Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в *полярных координатах*, то площадь сектора АОВ (см. рис.3.) определяется с помощью интеграла по формуле: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\rho(\varphi)]^2 d\varphi$ (**).

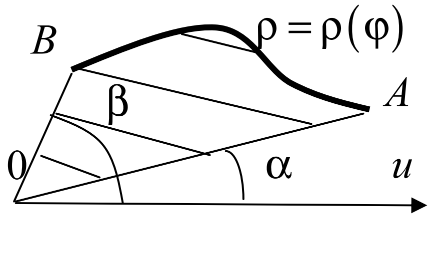


Рис.3.

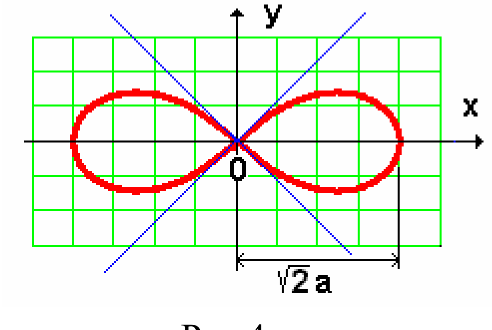


Рис.4.

Пример 18. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (см. рис.4.).

Решение. Для построения кривой имеем $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$. Область изменения φ находится из условия $\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq$ $\leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, где k – целое. При $k = 0$: $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$; при $k = 1$: $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi$. Ни при каких других k не получаются множества изменения φ , входящие в естественную область изменения φ : $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$. Построив кривую по точкам, получим чертеж области, ограниченной данной кривой, приведенный на рис.4.

В силу симметрии достаточно найти четверть искомой площади. По формуле (**) имеем:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4} \text{ и } S = a^2.$$

Приведем примеры на вычисление объемов тел вращения. Объем ищется по формуле: $V_{Т.В.} = \pi\int_a^b y^2(x)dx$.

Пример 19. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$ и $y = x$ вокруг оси Ox (см. рис.5).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения линий: $y = 4x - x^2$ и $y = x$, откуда $3x - x^2 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Объем тела, образованного вращением заштрихованного «лепестка» вокруг оси Ox, ищется по формуле: $V_{Т.В.} = \pi\int_0^3\left[\left(4x - x^2\right)^2 - x^2\right]dx$ – разность объемов тел вращения, полученных вращением фигуры OMBC и треугольника OBC около оси Ox.

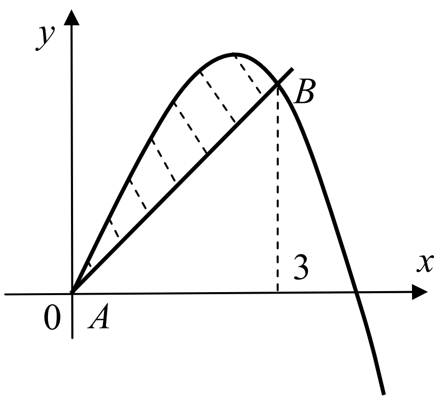


Рис.5.

Далее получим:

$$\frac{1}{\pi}V_{Т.В.} = \int_0^3\left(15x^2 - 8x^3 + x^4\right)dx = \left(5x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = 21{,}6.$$ Объем $V_{Т.В.} = 21{,}6\,\pi$.

Длина дуги кривой вычисляется по формуле: $L=\int\limits_a^b dl$, где dl вычисляется в соответствии со способом задания кривой: а) при явном способе задания $(y=y(x))$ дифференциал дуги $dl=\sqrt{1+y'^2}dx$; б) в случае параметрического представления кривой $(x=x(t),y=y(t))$ дифференциал $dl=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$; в полярной системе координат $(\rho=\rho(\varphi))$ имеем: $dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi$. Пределы интегрирования a и b , естественно, определяются заданием кривой (то есть это либо пределы для x, либо для параметра t , либо для φ). Приведем примеры.

Пример 20. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, содержащейся между точками с абсциссами $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$.

Решение. Кривая $y=\ln x$ задана явным уравнением.

Имеем $L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^2}dx$. Найдем подынтегральную функцию: $y'=\dfrac{1}{x}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+1/x^2}=\ x^{-1}\sqrt{x^2+1}$. Длина дуги $L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x^{-1}\sqrt{x^2+1}dx$. Для вычисления интеграла применим подстановку $t=\sqrt{x^2+1}$; тогда $x^2+1=t^2$, xdx = tdt. Найдем пределы для переменной t : из соотношения $t=\sqrt{x^2+1}$ при $x=\sqrt{3}$ получим, что $t_1=\sqrt{3+1}=2$; для $x=\sqrt{8}$ находим, что $t_2=\sqrt{8+1}=3$. Таким образом,

$$L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}xdx=$$

$$=\int\limits_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3\left(3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=1+\ln\sqrt{3/2}.$$

Пример 21. Найти длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (см. рис. 2).

Решение. Кривая симметричная относительно обеих координатных осей, поэтому вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Для параметрически заданной кривой дифференциал дуги

$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$. Находим: $x'=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cos t$ и сумма $x'^2+y'^2=9a^2\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$. Для кривой в первом квадранте параметр t меняется от t = 0 до t = π/2. Следовательно, $\frac{1}{4}L=3a\int\limits_0^{\pi/2}\left|\sin t\cos t\right|dt=$[в первом квадранте $\left|\sin t\cos t\right|=\sin t\cos t$]=

$$=3a\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,d\sin t\ =3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2}$$ и $L=6a$.

Методические указания к решению дифференциальных уравнений

Ссылки на учебное пособие «Высшая математика для заочников», ч.II . – Н-ск: НГТУ,2006 будем обозначать ВМЗ – ч.II с указанием параграфа (§), пункта ($п^0$) или страниц (стр.).

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Прежде всего, прочитайте (еще раз) ВМЗ – ч.II, введение и $п^0 п^0$ 9.1.1-9.1.3.

Задача 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Нужно найти общее решение дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка, принадлежащих к одному из следующих четырех типов: 1) ДУ с разделяющимися переменными, 2) однородные ДУ, 3) линейные уравнения, 4) уравнения Бернулли.

1.1^0. Уравнения с разделяющимися переменными (ВМЗ – ч.II, $п^0$.9.1.4)

ДУ с разделяющимися переменными – это уравнения первого порядка, приводящиеся к виду: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или $f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0$. Обе формы записи ДУ равносильны. Само название типа этого ДУ указывает на возможность преобразования его таким образом, что при *dx* множителем будет функция, зависящая только от *x*, а при *dy* – функция, зависящая только от *y*. Вышеприведенные уравнения приводятся соответственно к виду $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ и $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dy + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx = 0$.

Для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными всегда можно получить *общее решение* $y = \varphi(x, C)$ (*общий интеграл* $\Phi(x, y, C) = 0$), где C – произвольная постоянная. Для этого достаточно в последних уравнениях перейти к квадратурам – вычислению интегралов (интегрированию функций). Для остальных указанных выше типов дифференциальных уравнений общее решение найти можно, если с помощью соответствующих подстановок или замены переменных преобразовать данные ДУ к уравнениям с разделяющимися переменными.

1.2⁰. Однородные уравнения (ВМЗ – ч.II, п⁰.9.1.5)

Однородные ДУ имеют вид $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ или $f_1(x,y)\frac{dy}{dx}+f_2(x,y)=0$,

где $f(x,y)$ – *однородная функция нулевого измерения*, а функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – *однородные функции одного измерения*.

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией *k*-го измерения, если $\forall t$ выполняется равенство: $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Введением новой функции $u(x)=\frac{y(x)}{x}$ (или $u(y)=\frac{x(y)}{y}$) однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

1.3⁰. Линейные уравнения первого порядка (ВМЗ – ч.II, п⁰.9.1.6)

Линейное ДУ – это линейное относительно y и y' уравнение, т.е. y и y' входят в уравнение линейной комбинацией $y'+p(x)\,y$ (или $a(x)\,y'+b(x)\,y$) ; оно имеет вид $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ (*), где $p(x)$, $q(x)$ – известные (непрерывные) функции x. Если вместо искомой функции $y(x)$ ввести две новые функции $u(x)$ и $v(x)$ соотношением $y(x) = u(x)\ v(x)$, то уравнение (*) может быть сведено к системе из двух ДУ с разделяющимися переменными (для каждой из искомых функций $u(x)$ и $v(x)$.

1.4⁰. Уравнение Бернулли (ВМЗ – ч.II, п⁰.9.1.7)

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m$ (m $\neq$ 0; 1). Здесь ограничимся лишь замечанием, что оно решается как и линейное – подстановкой $y=uv$.

Заранее, как правило, неизвестно, к какому из вышеперечисленных типов относится заданное ДУ; практически тип его определяется сравнением с «каноническим» видом в случаях 1.1⁰, 1.3⁰, 1.4⁰ (или приведением к таковым), или проверкой на однородность входящих в уравнение функций (случай 1.2⁰).

Замечание. Может случиться, что заданное ДУ относится к нескольким типам, например, к 1.2⁰ и 1.3⁰. Выбор метода решения в таком случае произволен. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y'=\frac{(\ln y)\sin x}{x}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{(\ln y)\sin x}{x}$. Так как правая часть уравнения есть произведение $f(x)g(y)$ (здесь $f(x)=\sin x/x$, а $g(y)=\ln y$), то сравнивая с «образцами» 1.1⁰– 1.4⁰, видим, что заданное уравнение есть *ДУ с* *разделяющимися переменными*. Разделим переменные и перейдем к квадратурам: $\frac{dy}{\ln y}=\frac{\sin x}{x}dx$, $\int\frac{dy}{\ln y}=\int\frac{\sin x}{x}dx+C$. Интегралы в последнем равенстве – «не берущиеся» (в конечном виде); это равенство и есть общий интеграл заданного ДУ.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $xy'=\sqrt{y^2-x^2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2-x^2}$. Сравнивая его с «эталонным» 1.1^0, видим, что оно *не* есть уравнение с разделяющимися переменными. Функции $f_1(x,y)=x$ и $f_2(x,y)=-\sqrt{y^2-x^2}$ – *однородные первого измерения* (ибо $f_1(tx,ty)=tx=t^1f_1(x,y)$, $f_2(tx,ty)=-\sqrt{(ty)^2-(tx)^2}=$ $=\ -t\sqrt{y^2-x^2}=t^1f_2(x,y)$) и, таким образом, заданное ДУ – *однородное уравнение*. Вводим $y(x)=u(x)x$ и ее производную $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$ в заданное ДУ: $x\left(\frac{du}{dx}x+u\right)=\sqrt{x^2u^2-x^2}\Rightarrow\frac{du}{dx}x+u=\sqrt{u^2-1}\Rightarrow\frac{du}{dx}x=\sqrt{u^2-1}-u$. Получили уравнение с разделяющимися переменными; разделим переменные и перейдем к квадратурам:

$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u}=\frac{dx}{x}$ и $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u}=\int\frac{dx}{x}+C$. Найдем интегралы: $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u}=$

$$=\left[\sqrt{u^2-1}-u=t,\quad \sqrt{u^2-1}=t+u,\quad u^2-1=t^2+2tu+u^2,\quad u=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right),\right.$$

$$\left.du=\frac{(1-t^2)dt}{2t^2}\right]=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}\right)dt=\left[\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2t^2},\quad \int\frac{dt}{t}=\ln|t|\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right)=\ -\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sqrt{u^2-1}-u\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{u^2-1}-u\right)^2}\right);\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|.$$

Общий интеграл ДУ имеет вид (заменяем u на $y(x)/x$):

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{y^2-x^2}-y}{x}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\left(\sqrt{y^2-x^2}-y\right)^2}\right)=C.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'=(\sin x-y)\cos x$.

Решение. Определим тип дифференциального уравнения. В уравнении $\frac{dy}{dx}=(\sin x-y)\cos x$ переменные не разделяются: невозможно преобразовать разность $\sin x-y$ в произведение (так, чтобы разность $\sin x-y=f_1(x)\cdot f_2(y)$). Заданное уравнение не есть и однородное ДУ: если обозначить $f(x,y)=(\sin x-y)\cos x$, то $f(tx,ty)=(\sin tx-ty)\cos tx\neq t^k f(x,y)$. Так как искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, то исходное ДУ – *линейное уравнение*: $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cos x$. Как рекомендовано в 1.3^0, введем новые функции $u(x)$ и $v(x)$ соотношением: $y=uv$; тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$ и уравнение принимает вид $\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}+uv\cos x=\sin x\cos x$ (*) или $\frac{du}{dx}v+\underline{u\left(\frac{dv}{dx}+v\cos x\right)}=\sin x\cos x$. Так как искомых функций две, а уравнение, связывающее их, лишь одно (это уравнение (*), и так как из одного уравнения две неизвестные не определяются, добавим еще одно условие (уравнение, связывающее u и v); в последнем уравнении приравняем подчеркнутое выражение нулю: $u\left(\frac{dv}{dx}+v\cos x\right)=0$. Необходимо, чтобы $u\neq 0$, ибо если $u=0$, то и $y=0$, но $y=0$ не удовлетворяет заданному ДУ. Имеем: (а) $\left(\frac{dv}{dx}+v\cos x\right)=0$ – ДУ с разделяющимися переменными, и в силу (а) из (*) следует уравнение (б) $\frac{du}{dx}v=\sin x\cos x$. Решаем (а): $\frac{dv}{dx}=-v\cos x\Rightarrow$ $\frac{dv}{v}=-\cos x dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int\cos x dx \Rightarrow \ln|v|=-\sin x,\ v=e^{-\sin x}$. Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, так как достаточно найти лишь одну функцию v . Подставив $v=e^{-\sin x}$ в уравнение (б) получим $\frac{du}{dx}e^{-\sin x}=\sin x\cos x$ – уравнение для определения функции u, которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Имеем: $du=e^{-\sin x}\sin x\cos x dx$. Интегрируем $\int du=\int e^{-\sin x}\sin x\cos x dx+C$, $u=\int e^{\sin x}\sin x d\sin x=[\sin x=t]=\int te^t dt=$ $\Big[$интегрируем по частям: $\int u_1 dv_1=u_1v_1-\int v_1 du_1$, $u_1=t,\ du_1=dt,\ dv_1=e^t dt,$

$v_1 = \int e^t dt = e^t \Big] \quad = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$. Таким образом, окончательно имеем: $y = uv = \left[e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right] e^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ - общее решение ДУ.

Замечание. Обратим еще раз внимание на то, что при отыскании общего решения линейного ДУ приходится дважды находить первообразные (при отыскании v и при отыскании u), но постоянную интегрирования, входящую в общее решение, вводят лишь при «втором» интегрировании.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $x^2 y' + 2x^3 y = y^2\left(1 + 2x^2\right)$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение не относится к типам 1.1^0–1.3^0, а есть *уравнение Бернулли*. Вводим, как рекомендовано, новые функции $u(x)$ и $v(x)$ соотношением: $y=uv$; тогда производная $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} v + u\dfrac{dv}{dx}$, и данное уравнение приводится к виду $x^2 \dfrac{du}{dx} v + u\left(x^2 \dfrac{dv}{dx} + 2x^3 v\right) = u^2 v^2\left(1 + 2x^2\right)$.

Повторяя рассуждения, приведенные при решении (предыдущего) линейного ДУ, для определения функций u и v получим систему двух ДУ с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{dv}{dx} + 2x^3 v = 0, \\ x^2 \dfrac{du}{dx} v = u^2 v^2\left(1 + 2x^2\right). \end{cases}$$

Решаем систему последовательно, начиная с первого уравнения.

1) Умножим первое уравнение на дробь $\dfrac{dx}{x^2 v}$ и применим квадратуры:

$$\frac{dv}{v} = -2x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -2\int x dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

2) Подставим во второе уравнение системы $v = e^{-x^2}$, тогда для нахождения $u(x)$ получим ДУ с разделяющимися переменными, сократим его на $v\left(\forall x : e^{-x^2} \neq 0\right)$ и разделим переменные, в результате получим $\dfrac{du}{u^2} = e^{-x^2} \dfrac{1 + 2x^2}{x^2}$. Так как $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$, то $\displaystyle -\frac{1}{u} = \int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx + 2\int e^{-x^2} dx + C$.

В правой части предыдущего равенства каждый интеграл – «не берущийся», но их сумму можно преобразовать, используя интегрирование по частям в первом интеграле:

$$\int \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx = \begin{bmatrix} u_1 = e^{-x^2}, & du_1 = -2xe^{-x^2}dx \\ dv_1 = \dfrac{dx}{x^2}, & v_1 = \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = \left(\int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 \right) =$$

$$= -\frac{e^{x^2}}{x} - \int \frac{2xe^{-x^2}}{x}dx = -\frac{e^{-x^2}}{x} - 2\int e^{-x^2}dx.$$

Тогда $-\dfrac{1}{u} = -\dfrac{e^{-x^2}}{x} - 2\int e^{-x^2}dx + 2\int e^{-x^2}dx + C = -\dfrac{e^{-x^2}}{x} + C = -\dfrac{1 - Cxe^{x^2}}{xe^{x^2}}$,

отсюда $u = \dfrac{xe^{x^2}}{1 - Cxe^{x^2}}$. Окончательно, $y = [u \cdot v] = \dfrac{x}{1 - Cxe^{x^2}}$ – общее решение заданного ДУ.

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

(ВМЗ – ч.II, $п^0.п^0$. 9.2.1, 9.2.2)

Задача 2. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

Общее решение (общий интеграл) ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'')=0$ имеет вид: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ $(\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Данные уравнения относятся к ДУ, *допускающим понижение порядка*, следующих типов:

2.1⁰. ДУ $F(x, y', y'') = 0$ – *не содержит явно искомую функцию* $y(x)$. Если ввести новую функцию $z(x)$ соотношением $\dfrac{dy}{dx} = z(x)$, то исходное уравнение приводится к ДУ первого порядка, для которого общее решение (общий интеграл) можно найти, если полученное уравнение относится к одному из типов 1.1^0–1.4^0. Тогда в некоторых случаях можно построить общее решение (общий интеграл) исходного дифференциального уравнения второго порядка, по крайней мере, в квадратурах.

2.2⁰. ДУ $F(y, y', y'') = 0$ – *не содержит явно независимую переменную* x. Если ввести новую функцию $p(y)$ (зависящую от y) соотношением $\dfrac{dy}{dx} = p(y)$, то для второй производной найдем $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, и исходное ДУ преобразуется в ДУ первого порядка для функции $p(y)$ от независимой переменной y. Если полученное ДУ относится к одному из типов 1.1^0–1.4^0, то для него можно построить общее решение (общий интеграл), а затем в отдельных случаях возможно получение общего решения (общего интеграла) для исходного ДУ. Решим примеры.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.

Решение. Уравнение $x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\ln\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{x}$ не содержит в явном виде функцию $y(x)$, т.е. оно вида $F(x, y', y'') = 0$ – тип 2.1^0. Введем новую функцию $z(x)$ соотношением $\frac{dy}{dx} = z(x)$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ и исходное уравнение примет вид $x\frac{dz}{dx} - z\ln\frac{z}{x} = 0$ – ДУ первого порядка. Сравнивая ДУ с известными типами 1.1^0–1.4^0, убеждаемся, что полученное уравнение есть *однородное* ДУ: функции $f_1(x,z) = x$ и $f_2(x,z) = z\ln\frac{z}{x}$ есть однородные функции первого измерения, т.к. $f(tx,tz) = tx = t^1 f_1(x,z)$, $f_2(tx,tz) = tz\ln\frac{tz}{tx} = t\left(z\ln\frac{z}{x}\right) = t^1 f_2(x,z)$.

Вводим новую функцию $u(x)$ соотношением $u = \frac{z}{x}$, отсюда $z = ux$, $\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ и ДУ примет вид: $x\left(\frac{du}{dx}x + u\right) = ux\ln\frac{ux}{x}$, или $x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$ – ДУ *с разделяющимися переменными*. Разделяя переменные и применяя квадратуры, найдем: $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$, $\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x} + C_1$ $\Rightarrow \int\frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln|x| + C_1$ $\Rightarrow$ $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C_1$, (т.к. C_1 – произвольная постоянная, то она может быть введена любым образом, в том числе как $\ln C_1$), $\ln u = xC_1 + 1 \Rightarrow u = e^{C_1x+1}$. Тогда из $z = ux$ следует, что $z = xe^{C_1x+1}$, или

$\dfrac{dy}{dx}=xe^{C_1x+1}$ – ДУ *с разделяющимися переменными*. Решаем его: $dy=xe^{C_1x+1}dx \Rightarrow \int dy=\int xe^{C_1x+1}dx$.

К интегралу справа применяем формулу интегрирования по частям, полагая $u_1=x,\ dv_1=e^{C_1x+1}dx$ и $du_1=dx$, $v_1=\int e^{C_1x+1}dx=\dfrac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}d(C_1x+1)=$

$=\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}$. Тогда $y=u_1v_1-\int v_1du_1=\dfrac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\dfrac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}dx=$

$$=\left[\int e^{C_1x+1}dx=\int e^{C_1x+1}\frac{d(C_1x+1)}{C_1}=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\right]=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Ответ: $y=\dfrac{1}{C_1}\left(x+\dfrac{1}{C_1}\right)e^{C_1x+1}+C_2$.

Пример 6. Найти общее решение ДУ второго порядка $yy''-(y')^2=y^2y'$.

Решение. В уравнении $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=y^2\dfrac{dy}{dx}$ отсутствует в явном виде независимая переменная x, поэтому оно типа 2.2^0. Введем новую функцию $p(y)$ соотношением $\dfrac{dy}{dx}=p(y)$; тогда $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}=p\dfrac{dp}{dy}\right)$ и исходное уравнение сводится к ДУ первого порядка: $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=y^2p$ или $p\left(y\dfrac{dp}{dy}-p-y^2\right)=0$. Последнее уравнение выполняется, если каждый из сомножителей в левой части уравнения равен нулю. В итоге имеем два ДУ:

1) p = 0 или $\dfrac{dy}{dx}=0$; отсюда $y=C$, где C – произвольная постоянная.

2) $y\dfrac{dp}{dy}-p-y^2=0$. Так как функция p и ее производная $\dfrac{dp}{dy}$ входят в уравнение линейной комбинацией $y\dfrac{dp}{dy}-p$, то это *линейное* ДУ (тип 1.3^0). Вводим две новые функции $u(y)$ и $v(y)$ соотношением $p=u\cdot v$; тогда $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{du}{dy}v+u\dfrac{dv}{dy}$ и уравнение принимает вид: $yv\dfrac{du}{dy}+u\left(y\dfrac{dv}{dy}-v\right)-y^2=0$.

Определение u и v сводится к решению двух ДУ с *разделяющимися переменными*:

$$\begin{cases} y\dfrac{dv}{dy}-v=0 & (\alpha), \\ yv\dfrac{du}{dy}-y^2=0 & (\beta). \end{cases}$$

Решаем последовательно:

(α): $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dy}{y}$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v|=\ln|y| \Rightarrow v=y$

(β): $y^2\dfrac{du}{dy}-y^2=0 \Rightarrow \dfrac{du}{dy}=1 \Rightarrow \displaystyle\int du=\int dy+C_1 \Rightarrow u=y+C_1$.

Итак, $p = uv = y^2 + C_1y$. Так как $\dfrac{dy}{dx}=p$, то $\dfrac{dy}{dx}=y^2+C_1y-$ ДУ с разделяющимися переменными для функции $y(x)$; решаем его:

$$\int\frac{dy}{y^2+C_1y}=\int dx+C_2 \Rightarrow x+C_2=\int\frac{d\left(y+\dfrac{C_1}{2}\right)}{\left(y+\dfrac{C_1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{C_1}{2}\right)^2}=$$

$$=\left[\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C\right]=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{C_1+y}\right| .$$

Таким образом, $x+C_2=\dfrac{1}{C_1}\ln\left|\dfrac{y}{C_1+y}\right|$ – общий интеграл исходного ДУ.

Так как решение $y + C$ не может быть получено из общего интеграла ни при каких C_1 и C_2, то оно будет особым решением.

2.3⁰. Неоднородные линейные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

(ВМЗ – ч.II, § 9.4, п^0.п^0. 9.4.1, 9.4.2)

Предварительно полезно вспомнить основные определения и структуру общего решения однородного и неоднородного линейных уравнений высшего порядка (ВМЗ – ч.II, § 9.3).

Задача 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$. По условию требуется решить задачу Коши. Решение проводится в два этапа:

а) отыскание общего решения $y_{он}$ заданного линейного неоднородного ДУ (ЛНДУ),

б) нахождение значений произвольных постоянных, входящих в $y_{он}$, удовлетворяющих заданным начальным условиям.

Общее решение $y_{он}$ имеет структуру: $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, где $y_{оо}$ – общее решение линейного однородного ДУ (ОЛДУ) $y''+py'+qy=0$, а $y_{чн}$ – любое частное решение данного НЛДУ.

В силу структуры $y_{он}$ его, в свою очередь, ищут в два этапа.

1) находят $y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1, y_2 – фундаментальная система решений (ФСР) для ОЛДУ (т.е. система линейно независимых решений). Если коэффициенты p и q в ОЛДУ постоянны, то y_1 и y_2 ищем методом Эйлера. Полагаем $y=e^{\lambda x}$, $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ $(\lambda=\mathrm{const})$, тогда ОЛДУ приводится к виду $e^{\lambda x}\cdot\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)=0$; отсюда следует, что $\lambda_{1,2}$ – корни характеристического уравнения (ХУ) $\lambda^2+p\lambda+q=0$. Возможны случаи (см. таблицу 9.1, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.1):

а) λ_1, λ_2 – вещественные и различные; тогда ФСР: $y_1=e^{\lambda_1 x}$, $y_2=e^{\lambda_2 x}$;

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; ФСР: $y_1=e^{\lambda x}$, $y_2=xe^{\lambda x}$;

в) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженные; ФСР: $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

2. Для определения структуры $y_{чн}$ по виду правой части НЛДУ используют таблицу 9.2, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.2. Частное решение $y_{чн}$ для НЛДУ ищем методом неопределенных коэффициентов. Так как свободный член $f(x)$ имеет следующий вид

$$f(x)=e^{ax}\left[P_k(x)\cos bx+Q_l(x)\sin bx\right], \qquad (*)$$

где $P_k(x)$, $Q_l(x)$ – многочлены степеней k и l, соответственно (при этом или m, или n, или m и n могут равняться нулю), то частное решение $y_{чн}$ следует искать в виде:

$$y_{чн}=x^s x^{mk} e^{ax}\left[R_r(x)\cos bx+T_r(x)\sin bx\right], \qquad (**)$$

где $R_r(x)$, $T_r(x)$ – многочлены степени r (r = $\max(k,l)$) с коэффициентами, подлежащими определению;

$s = 0$, если $a \pm ib$ – не корни характеристического уравнения,

$$s=1\begin{cases}\text{а) если } a\pm ib \text{ – корни характеристического уравнения,}\\ \text{б) если } b=0, \text{ а } a \text{ – простой действительный корень характеристического уравнения,}\end{cases}$$

$s = 2$, если $b = 0$, а a – двукратный корень характеристического уравнения.

Подставляя $y_{\text{чн}}$ в виде (**) и $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное НЛДУ, приравниваем коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях $x^{\gamma}\cos nx,\ x^{\gamma}\sin nx\ (\gamma=0,1,2...,r)$ в общих частях тождества и решаем полученную при этом систему алгебраических уравнений для коэффициентов многочленов $R_r(x)$ и $T_r(x)$. Приведем примеры.

Пример 7. Решим задачу Коши: $y''-y'=xe^{x}$, $y(0)=2,\ y'(0)=-3.$

Решение. Общее решение НЛДУ имеет вид: $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) ОЛДУ: $y''-y'=0$; пусть $y=e^{\lambda x}$; тогда $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ и уравнение $y''-y'=0$ сводится к виду $e^{\lambda x}\left(\lambda^2-\lambda\right)=0$. Характеристическое уравнение (ХУ): $\left(\lambda^2-\lambda\right)=0$. Решаем его: $\lambda(\lambda-1)=0$. Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ – действительные различные корни. Находим ФСР: $y_1=e^{\lambda_1 x}=e^0=1,\ y_2=e^{\lambda_2 x}=e^x$, тогда $y_{\text{оо}}=C_1+C_2e^x$.

2) Правая часть заданного уравнения имеет вид: $f(x)=xe^x$. Если сравнивать ее с общим выражением для $f(x)$ (*), то имеем $a = 1$, $b = 0$, $P_k(x) = P_1(x) = x$, $Q_l \equiv 0$. Так как $b = 0$, а $a = 1$ – простой корень ХУ, то $s = 1$, и, следуя выражению (**) (или таблице 9.2, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.2) ищем частное решение $y_{\text{чн}}$ в виде ($r = \max(k,l) = \max(1,0) = 1$, $\cos nx = \cos 0 = 1$, $\sin nx = \sin 0= = 0$): $y_{\text{чн}}=x^1e^xR_1(x)=xe^x(Ax+B)=e^x\left(Ax^2+Bx\right)$, где коэффициенты A, B подлежат определению. Находим

$$y'_{\text{чн}}=e^x\left[Ax^2+(2A+B)x+B\right],\quad y''_{\text{чн}}=e^x\left[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B\right].$$

Подставляя y' и y'' в заданное уравнение, получим после сокращения обеих частей на e^x и приведения подобных: $2Ax + (2A + B) \equiv x$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x (при x^0 и x^1) в обеих частях тождества и решаем полученную систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 2A=1, \\ x^0 & 2A+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1. \end{array}$$ Следовательно, $y_{\text{чн}} = e^x\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)$ и общее решение ЛНДУ есть $y = C_1 + C_2e^x + e^x\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)$. Находим $y' = C_2e^x + e^x\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)$ и подставим начальные условия $x_0=0, y_0=2, y'_0=-3$ в y, y':

$$\left.\begin{array}{r} y(0)=2, \\ y'(0)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=2, \\ C_2-1=-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4, \\ C_2=-2. \end{cases}$$

Подставив найденные C_1 и C_2 в y, получим решение задачи Коши:

$$y = 4 + e^x\left(\frac{x^2}{2}-x-2\right).$$

Пример 8. $y''+2y'+5y = e^{-x}(2x+\sin 2x)$, $y(0)=-1, y'(0)=2$.

Решение. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) ОЛДУ: $y''+2y'+5y=0$.

Пусть $y=e^{\lambda x}$; тогда $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$. Как уже упоминалось, чтобы $e^{\lambda x}$ было решением ОЛДУ $y''+2y'+5y=0$ необходимо, чтобы λ было корнем характеристического уравнения $\lambda^2+2\lambda+5=0$, решая которое, получаем $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$; поэтому ФСР (см. таблицу 9.1, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.1): $y_1=e^{-x}\cos 2x$, $y_2=e^{-x}\sin 2x$ и общее решение ОЛДУ есть: $y_{\text{оо}} = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x.$

2) Так как $f(x)=2xe^{-x}+e^{-x}\sin 2x$, то представим $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=2xe^{-x}$, $f_2(x)=e^{-x}\sin 2x$. Частное решение $y_{\text{чн}}$ для НЛДУ также будем искать в виде суммы двух функций $y_{\text{чн}} = y_{\text{ч1}} + y_{\text{ч2}}$, где $y_{\text{ч}i}$ (i = 1,2) – частное решение НЛДУ $y''+2y'+5y=f_i(x)$. Для первого слагаемого $f_1(x)=2xe^{-x}$ имеем из сравнения с общим выражением (*) (или с таблицей 9.2, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.2): $a = -1$, $b = 0$, $P_k(x) = P_1(x) = 2x$, ($k = 1$), $Q_l \equiv 0$ ($l = 0$). Так как $a = -1$ – не корень ХУ и $b = 0$, то $s = 0$ и из (**) (или из таблицы 9.2, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.2) имеем ($r = \max(k,l) = \max(1,0) = 1$, $R_1 = Ax + B$, $\cos nx = 1$, $\sin nx = 0$) $y_{\text{ч1}} = (Ax+B)e^{-x}$, где коэффициенты A, B подлежат определению.

Находим $y'_{ч1} = e^{-x}(-Ax + A - B)$, $y''_{ч1} = e^{x}(Ax - 2A + B)$ и подставим выражение $y_{ч1}$, $y'_{ч1}$ и $y''_{ч1}$ в уравнение $y''+2y'+5y = 2xe^{-x}$; в результате после сокращения на e^{-x} и приведения подобных в левой части имеем $4Ax + 4Bx \equiv 2x$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 4A = 2, \\ x^0 & 4B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = 0. \end{array}$$

Итак, $y_{ч1} = \dfrac{1}{2}xe^{-x}$.

Для второго слагаемого $f_2(x) = e^{-x}\sin 2x$ из сравнения с выражением (*) (или с таблицей 9.2, ВМЗ – ч.II, п^0. 9.4.2) имеем: $a = -1$, $b = 2$, $P_k(x) \equiv 0$, ($k = 0$), $Q_l(x) = Q_0(x) = 1$ ($l = 0$). Так как $a \pm ib = -1 \pm 2i$ – корни ХУ, то $s = 1$ и из (**) следует ($r = \max(0,0) = 0$, $R_0(x) = C$, $T_0(x) = D$; C, D – неопределенные коэффициенты): $y_{ч2} = x\left(Ce^{-x}\cos 2x + De^{-x}\sin 2x\right)$.

Находим $y'_{ч2} = e^{-x}\cos 2x(C - Cx + 2Dx) + e^{-x}\sin 2x(B - Bx - 2Cx)$,

$$y''_{ч2} = e^{-x}\cos 2x(-3Cx - 4Dx - 2C + 4D) + e^{-x}\sin 2x(4Cx - 3Dx - 4C - 2D)$$

и подставляем $y_{ч2}$, $y'_{ч2}$ и $y''_{ч2}$ в уравнение $y''+2y'+5y = e^{-x}\sin 2x$; в итоге имеем $4De^{-x}\cos 2x - 4Ce^{-x}\sin 2x \equiv e^{-x}\sin 2x$.

Приравниваем коэффициенты в обеих частях тождества при $\sin 2x$ и $\cos 2x$:

$$\begin{array}{l} \sin 2x: \\ \cos 2x: \end{array}\left\{\begin{array}{l} -4C = 1, \\ 4D = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} C = -1/4, \\ D = 0. \end{array}$$

Итак, $y_{ч2} = -1/4\, xe^{-x}\cos 2x$.

В итоге $y_{чн} = y_{ч1} + y_{ч2} = \dfrac{1}{2}xe^{-x} - \dfrac{1}{4}xe^{-x}\cos 2x$

и $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x + \dfrac{1}{4}xe^{-x}(2 - \cos 2x)$.

Находим

$$y' = e^{-x}\left[\left(-C_1 + 2C_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\right)\cos x + \left(-2C_1 - C_2 + \frac{1}{2}x\right)\sin 2x + \frac{1}{2}(1 - x)\right]$$

и подставим y, y' в начальные условия:

$$\begin{matrix} y(0)=-1, \\ y'(0)=2 \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1, \\ -C_1+2C_2+\dfrac{1}{4}=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1, \\ C_2=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Подставив найденные C_1 и C_2 в y , получим решение задачи Коши:

$$y=e^{-x}\left[-\left(\frac{1}{4}x+1\right)\cos 2x+\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{1}{2}x\right].$$

§ 3. Система линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами (ВМЗ – ч.II, §. 9.5).

Пример 9. Дана система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (x, y – функции, зависящие от t):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-5x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Решение. 1) общее решение системы двух линейных однородных ДУ имеет вид:

$x_{oo}=C_1x_1+C_2x_2$, $y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 – фундаментальная система решений (ФСР), C_1, C_2 – произвольные постоянные. Для однородной системы с постоянными коэффициентами ищем ФСР в виде (метод Эйлера): $x=\alpha e^{\lambda t}$, $y=\beta e^{\lambda t}$, α, β, λ – коэффициенты, подлежащие определению.

Находим $x'=\alpha e^{\lambda t}$, $y'=\beta e^{\lambda t}$, и подставляем выражения для x, y, x', y' в уравнения заданной системы; в результате после сокращения обеих частей полученных уравнений на $e^{\lambda t}$ имеем:

$$\begin{cases} \alpha\lambda=-5\alpha+2\beta, \\ \beta\lambda=\alpha-6\beta \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -(5+\lambda)\alpha+2\beta=0, \\ \alpha-(6+\lambda)\beta=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Получили систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно α и β. Чтобы эта система имела нетривиальные (ненулевые) решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю, то есть $\begin{vmatrix} -(5+\lambda) & 2 \\ 1 & -(6+\lambda) \end{vmatrix}=0$ – это *характеристическое уравнение* для данной системы ДУ. Вычисляем определитель и решаем уравнение для λ:

$(5 + \lambda)(6+ \lambda) - 2 = 0$, $\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -7$ – вещественные и различные корни ХУ.

Подставим $\lambda_1 = -4$ в систему (1) для определения α и β. Так как определитель системы равен нулю, то из двух уравнений алгебраической системы линейно независимых будет одно, например, первое: $-(5-4)\alpha + 2\beta = 0$ $\Rightarrow \alpha - 2\beta = 0$, или $\alpha = 2\beta$ – бесконечное множество пар решений системы. Нам достаточно одно (любое) решение, например, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$. Тогда $x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = 2e^{-4t}$, $y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t} = e^{-4t}$ – первое решение системы. Подставим $\lambda_2 = -7$ в систему (1). Аналогично, линейно независимым уравнением выберем первое: $2\alpha + 2\beta = 0$. Из множества пар решений последнего уравнения выберем $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -1$, тогда $x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-7t}$, $y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t} = -e^{-7t}$ – второе решение системы.

Итак, общее решение системы имеет вид:

$$x_{оо} = C_1 2e^{-4t} + C_2 e^{-7t},\ y_{оо} = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t}.$$

2) Запишем систему ДУ и ее общее решение в матричной форме.

Пусть $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тогда система ДУ в матричной форме:

$$Z' = M \cdot Z \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Общее решение в матричной форме:

$$Z_{оо} = C_1 K_1 e^{-4t} + C_2 K_2 e^{-7t} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}.$$

Пример 10. Найти решение однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0. \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = 1$.

Решение. Фундаментальную систему решений ищем методом Эйлера, полагая $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, α, β, λ – коэффициенты, подлежащие определению.

Находим производные $x' = \alpha e^{\lambda t}$, $y' = \beta e^{\lambda t}$ и подставляем x, y, x', y', выраженные через α, β, λ, t в уравнения заданной системы; в результате получим:

$$\begin{cases} e^{\lambda t}(\alpha\lambda + 3\lambda + \beta) = 0, \\ e^{\lambda t}(\beta\lambda - \alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3+\lambda)\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha + (1+\lambda)\beta = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Для существования ненулевых решений алгебраической системы (1) требуем, чтобы

$$\begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 \\ -1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3+\lambda)(1+\lambda) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\lambda = -2$ – двукратный корень (действительное характеристическое уравнение можно записать $((\lambda+2)(\lambda+2) = 0,$ откуда следует $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2)$.

В случае двукратного корня $\lambda = -2$ частное решение системы следует искать в виде:

$$\begin{aligned} x &= (A + Bt)e^{\lambda t} = (A = Bt)e^{-2t}, \\ y &= (C + Dt)e^{\lambda t} = (C + Dt) = e^{-2t}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где коэффициенты *A, B,C, D* подлежат определению. Находим:

$$\begin{aligned} x' &= Be^{-2t} + (A + Bt)\left(-2e^{-2t}\right) = (-2A + B - 2Bt)e^{-2t}, \\ y' &= De^{-2t} + (C + Dt)\left(-2e^{-2t}\right) = (-2C + D - 2Dt)e^{-2t} \end{aligned} \qquad (3)$$

и подставляя x, y, x', y' из (2) и (3) в исходную систему, в результате имеем тождественные равенства (после сокращения на e^{-2t}):

$$\begin{cases} (-2A + B - 2Bt) + 3(A + Bt) + C + Dt = 0, \\ (-2C + D - 2Dt) - (A + Bt) + C + Dt = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (B + D)t + (A + B + C) = 0, \\ -(B + D)t + (-A - C + D) = 0. \end{cases}$$

Последние тождества должны выполняться при любом t , для чего необходимо равенство нулю коэффициентов при t^0 и t^1; в итоге имеем систему уравнений для нахождения *A, B,C, D*:

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ A + B + C = 0, \\ -A - C + D = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Так как из первого уравнения системы (4) следует $D = -B$, то второе и третье уравнения системы (4) зависимы, и линейно независимых уравнений системы (4) будет только два, например, первое и второе. Тогда $D = -B$ и $C = -A - B$, а постоянные A и B – произвольные.

Итак, решение системы имеет вид:

$$x = (A + Bt)e^{-2t}, \quad y = (-A - B - Bt)e^{-2t}.$$

Обозначив $A = C_1$ и $B = C_2$, имеем общее решение системы:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}, \quad y = (-C_1 - C_2 - C_2 t)e^{-2t}. \qquad (5)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ -(1+t)e^{-2t} \end{pmatrix} C_2.$$

Подставив начальные условия в общее решение (5), получим: $C_1 = 1$, $-C_1 - C_2 = 1$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ и

$$x = (1 - 2t)e^{-2t}, \quad y = (1 + 2t)e^{-2t}.$$