Систематическая и случайная погрешности измерений

В силу ряда факторов, во многом связанных с природой самих измеряемых величин¹, таких как: несовершенство измерительных приборов, несовершенство наших органов чувств, а также ряда других причин результаты измерений дают не **истинное значение** физической величины, а ее приближенное значение. Поэтому существуют погрешности (ошибки) измерений. Согласно РМГ 29-99 *погрешность измерения* – это отклонение результата измерений от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Погрешность является количественной характеристикой неоднозначности результата измерения. Ее оценивают исходя из всей информации, накопленной при подготовке и выполнении измерений. Понятие погрешность измерения можно трактовать двояко. С одной стороны, в качестве истинного значения величины (например, в случае калибровки по эталону) может выступать значение величины эталона принятое как точное. В качестве примера можно привести международный эталон килограмма, масса которого, по определению, всегда в точности равна одному килограмму. В этом случае погрешность измерения известна, поскольку известно истинное значение опорной величины. С другой стороны, если под истинным значением, понимать значение физической величины, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую физическую величину, то поскольку никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно истинное значение величины нам никогда не известно. Следовательно, в этом случае погрешность измерения также неизвестна. Поэтому отклонение результата измерений от истинного значения измеряемой величины будем называть **ошибкой измерения** (иногда термины ошибка измерения и погрешность измерения используются как синонимы, но согласно РМГ 29-99

¹Например, в силу наличия принципиально неустранимых колебаний кристаллической решетки, невозможно определить линейные размеры твердого тела, потому что никаких «истинных» линейных размеров у него попросту нет, есть лишь наиболее часто встречающееся значение, которое условно можно принять за «истинное».

термин ошибка измерения в этом контексте использовать не рекомендуется). Поэтому на практике при определении погрешности вместо истинного значения используется действительное значение физической величины. *Действительное* (или измеренное) *значение физической величины* – это значение физической величины, которое получено экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в условиях поставленной измерительной задачи может быть использовано в место него. Таким образом, погрешность можно записать в виде следующего выражения: $\Delta x = x_{\partial} - x_{изм}$ (Δx – погрешность измерения, x_{∂} – действительное значение величины, $x_{изм}$ – измеренное значение величины). **Погрешность может быть как положительной, так и отрицательной величиной.**

В зависимости от формы представления различают **абсолютную, относительную и приведенную** погрешности измерений. Если погрешность выражена в единицах измеряемой величины x , то она обозначается Δx и носит название **абсолютной погрешности**. Как показывает практика, абсолютная погрешность зачастую не может выступать в качестве оценки качества измерений. Например, абсолютная погрешность равная 0,1 мм при измерении геометрических размеров письменного стола свидетельствует о высокой точности измерения, в тоже время та же самая погрешность при измерении диаметра человеческого волоса просто недопустима. В связи с этим для оценки качества измерения была введена **относительная погрешность** δ (или ε), равная отношению абсолютной погрешности Δx к действительному x_{∂} или измеренному значению измеряемой величины $\delta = \Delta x / x_{\partial}$ (или $\delta = (\Delta x / x_{\partial}) \cdot 100\%$). Относительная погрешность измеряется в долях или процентах. Следует отметить, что если при измерении получена $\delta > 10\%$, то говорят, что произведена лишь оценка измеряемой величины.

Приведенная погрешность γ – это погрешность равная отношению абсолютной погрешности средства измерения к нормированному значению величины. Приведенная погрешность чаще всего выражается в процентах. В

качестве нормированного значения может выступать верхний предел измерений.

По характеру проявления все погрешности делятся на **случайные, систематические и промахи**.

Систематические погрешности – это погрешности измерения физической величины, значения которых (величина и знак) от опыта к опыту при равноточных измерениях остаются постоянными или изменяются по определенному закону.

В зависимости от характера измерения систематические погрешности можно разделить на **постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону**.

Постоянные погрешности – погрешности, которые длительное время сохраняют свое значение, например, в течение времени выполнения всего ряда измерений. Они встречаются наиболее часто.

Прогрессивные погрешности – непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. К ним относятся, например, погрешности приборов, вызванные износом измерительных наконечников, контактирующих с деталью.

Периодические погрешности – погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора.

Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, происходят вследствие совместного действия нескольких систематических погрешностей.

В зависимости от причин возникновения можно выделить четыре вида систематических погрешностей.

1) *Погрешность метода измерения (методическая)* – систематическая погрешность, которая обусловлена несовершенством используемого метода измерения (ошибочность или недостаточная разработанность принятой теории метода измерения). Например, взвешивание без учета силы Архимеда. Погрешность метода иногда называют теоретической

погрешностью. Иногда² погрешность метода измерения может проявляться как случайная, поэтому деление погрешностей на случайные и систематические зачастую носит условный характер.

2) *Инструментальная погрешность измерения* – систематическая погрешность, обусловленная погрешностью применяемых средств измерений. В качестве источников этой погрешности могут выступать:

- несовершенство используемой измерительной аппаратуры (например, взвешивание на неравноплечих весах или измерение длины линейкой, шкала которой нанесена не точно);
- плохая настройка измерительной аппаратуры (измерение силы тока амперметром, у которого неправильно установлен нуль);
- неправильная установка и взаимное расположение средств измерения (весы не выставлены по уровню).

3) *Погрешность (измерения) из-за изменений условий измерения* – систематическая погрешность, являющаяся следствием неучтенного влияния постоянных внешних факторов, отклоняющих в одну сторону от установленного значения какой-либо из параметров, характеризующих условия измерения.

4) *Субъективная погрешность* – систематическая погрешность, вызванная постоянными ошибками экспериментатора. Она появляется из-за индивидуальных особенностей наблюдателя, таких как скорость реакции, острота зрения, слышимый частотный диапазон и т. д. Иногда субъективную погрешность называют личной погрешностью.

В принципе, **систематические погрешности могут быть учтены и исключены, хотя осуществление этого на практике является сложной задачей.** Для выявления систематических погрешностей необходимо критически относиться к методам исследования, проводить измерения,

² Например, при косвенном измерении объема цилиндра мы предполагаем, что работаем с идеальным геометрическим объектом, а поскольку в природе таких тел не бывает, то в наши расчеты нужно внести соответствующую поправку или изменить методику измерения (например, проводить прямые измерения с помощью мерного стакана с водой), тем самым мы учтем систематическую погрешность. Но мы также можем минимизировать вышеописанный фактор, если рассматривать его влияние через понятие случайной погрешности. Для этого нужно проводить многократные измерения диаметра и высоты цилиндра в разных точках с последующей статистической обработкой результатов измерений.

используя разные методики; измерения могут параллельно проводить различные команды исследователей. Для уменьшения систематической погрешности можно использовать более точные приборы, тщательно контролировать процесс настройки оборудования и процесс проведения измерения, совершенствовать методику измерения, вносить соответствующие поправки в рабочие формулы и т. д.

Случайные погрешности – это погрешности измерения физической величины, значения которых (величина и знак) от опыта к опыту, при измерениях одной и той же физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью и при одинаковых условиях, изменяются случайным образом. Они обусловлены большим числом случайных причин. В силу случайного характера воздействий заранее предсказать величину такой погрешности невозможно, следовательно, ее действие и не может быть заранее учтено. Например: при косвенном измерении объема металлического цилиндра в рассмотренном нами примере мы не учитывали, что объема цилиндра зависит от температуры, а значит, может меняться в процессе эксперимента. Получается, что поскольку мы не можем определить величину случайной погрешности, то полученные нами при измерениях данные становятся бессмысленными. Оказывается, несмотря на то, что исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, их максимальный вклад все же можно оценить с помощью математической теории случайных явлений. Более того, на основе этой теории была разработана методика проведения измерений физических величин, которая позволяет свести к минимуму влияние стохастических факторов и тем самым минимизировать случайную погрешность.

Единственно возможный способ объективного учета случайных погрешностей состоит в определении их статистических закономерностей, проявляющихся в результатах многократных измерений. Таким образом, для того чтобы минимизировать случайную погрешность, необходимо проводить многократные измерения с последующей

статистической обработкой их результатов. Окончательный результат измерений приводится в виде информации об оценке «истинного» значения величины с учетом случайных погрешностей измерений при условии, что систематическая погрешность исключена или учтена в виде поправки.

При оценке погрешности измерения зачастую допускается следующая ошибка: погрешности ищется как разность полученного в ходе эксперимента **действительного** результата и заранее рассчитанного (или табличного) значений этой величины. Это в корне неверный подход, который противоречит как определению погрешности измерения, так и целям и задачам эксперимента.

Промахи (грубые погрешности измерений) – это погрешности результатов отдельных измерений, входящих в измерительный ряд, которые, для данных условий, существенно превышают ожидаемые значения и характеризуют ошибочные измерения или наблюдения. Промахи возникают в результате недосмотра оператора (небрежность при отсчете по прибору, неразборчивой записи показаний), неисправности средств измерений (при неправильном включении прибора, использование плохо настроенных или бракованных приборов) или при нарушении условий, в которых должен проводиться опыт. **Такие данные следует отбросить или сделать повторные (контрольные) измерения.** Влияние грубых погрешностей измерений на полученные результаты можно устранить или уменьшить.

Оценка случайной погрешности

При проведении реальных экспериментов используют **среднюю квадратичную погрешность измерения среднего арифметического значения S** или просто **стандартное отклонение среднего результата**

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} . \quad (1)$$

В этой формуле в знаменателе вместо n стоит $n-1$. Это связано с тем, что выборка один раз уже использовалась (для нахождения $\bar{x}$), и поэтому

слагаемые в сумме (1) не являются независимыми. Деление на $\sqrt{n}$ следует из математической теории погрешностей и учитывает закон сложения ошибок. Величина S_x^2 называется **несмещённой оценкой дисперсии**.

Часто для характеристики точности применяемого способа измерений используется величина, которая называется **среднеквадратическое отклонение выборочной средней** или **выборочное среднеквадратическое отклонение**:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{(n-1)}} . \quad (2)$$

Среднее арифметическое из результатов конечной выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (3)$$

При малом числе измерений ($n \leq 5$) S_x является весьма грубой оценкой погрешности измерения. Чтобы получить оценку доверительного интервала для **конечной выборки** (конечного числа измерений), вводится поправочный коэффициент $t_{P,n}$ – **коэффициент Стьюдента** (см. табл. 1), зависящей от полного количества измерений n и заданного значения доверительной вероятности P . Величину доверительной погрешности измерения находят по формуле

$$\Delta x = t_{P,n} S_x . \quad (4)$$

Соответственно, чем больше доверительная вероятность, тем шире доверительный интервал. Поскольку доверительная погрешность вычисляется приближенно, то её значения округляют до одной значащей цифры. Как уже говорилось, проводя многократные измерения, случайную погрешность можно свести к минимуму, а иногда влияние случайных факторов настолько мало, что многократные измерения дают одно и то же значение измеряемой величины. Но это не означает, что погрешность отсутствует. **Любой измерительный прибор обладает собственной**

погрешностью, которая определяется точностью изготовления и градуировки прибора, а также условиями его работы. С учетом погрешности технического средства измерения (измерительного прибора) Δx_{np} абсолютная погрешность измерения, учитывающая оба этих фактора, вычисляется по формуле

$$\Delta x_{\Sigma} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x_{np}^2} \approx \Delta x + \Delta x_{np}. \quad (5)$$

Если приборная и случайная погрешности измерений отличаются больше чем на порядок (больше чем в 10 раз), то наименьшей из них можно пренебречь.

Результат измерений записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$ ($n = \dots, P = \dots$). Это запись означает, что истинное значение физической величины x с вероятностью P находится в указанном интервале. Такая форма записи наиболее информативна, так как, помимо всего прочего, содержит данные об оценке надежности результата.

Приборная погрешность

Теперь следует поговорить о погрешности технического средства измерения Δx_{np} , или просто о **приборной погрешности**. В настоящее время существует огромное количество разнообразных измерительных приборов, которые отличаются принципом работы, точностью измерения, измерительным диапазоном и прочими конструктивными особенностями. Каждый прибор имеет свою точность измерения, которая задается классом точности либо указывается в паспорте прибора. **Если специальных указаний нет, то приборная погрешность определяется половиной цены деления шкалы прибора** (наименьшего деления шкалы). Для приборов с зеркальными шкалами допускается снимать показания с точностью 0,2 деления шкалы.

В общем случае приборная погрешность может иметь две составляющие: **систематическую** и **случайную**. Случайная составляющая погрешности

обусловлена воздействием случайных факторов, связанных с процедурой измерения (шумы измерительного прибора, вариация его показаний (например, колебание стрелки вольтметра), случайные колебания параметров электрической сети и условий измерений). Ее влияние можно минимизировать вышеописанным методом (проведение многократных измерений). Систематическая составляющая обусловлена неточностями, допущенными при изготовлении и регулировке приборов, изменением параметров элементов конструкции и схемы вследствие старения, погрешностью отсчета и т. д. Ее конкретное значение неизвестно, поэтому в паспорте прибора принято указывать предел допустимой погрешности Δx_{np} , означающий максимально возможную погрешность при рекомендованных условиях работы прибора. Еще раз подчеркнем, что деление на систематические и случайные погрешности довольно условно.

На многих приборах (как правило, стрелочных электроизмерительных) указывается класс точности k (выраженное в процентах отношение абсолютной приборной погрешности Δx_{np} к пределу измерения его шкалы Π). Для обозначения классов точности приборов в соответствии с ГОСТ 8.401-80 используются числа из следующего ряда: 6; 4; 2.5; 1.5; 1.0; 0.5; 0.2; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.005 и т. д. Класс точности указывается в паспорте и (или) на шкале прибора в виде числа заключенного в круг. Из определения класса точности имеем приборную погрешность

$$\Delta x_{np} = \frac{k\Pi}{100}. \quad (6)$$

Иногда точность измерения равна цене деления и указана непосредственно на приборе. Например, приборы, имеющие нониус, такие как штангенциркуль, точность нониуса которого равна 0,1 мм или 0,05 мм (в зависимости от марки прибора).

В случае работы с цифровыми (дискретными) измерительными приборами погрешность считается равной цене деления (минимальной

разности между двумя ближайшими значениями которые может отобразить прибор), если иное не указано в паспорте прибора или на самом приборе.

Следует отметить, что при снятии значений с прибора нецелесообразно стараться определить доли наименьшего деления, так как результат измерения от этого не станет точнее. С другой стороны, когда мы говорим, что приборная погрешность линейки равна 0,5 мм (половина цены деления), это не значит, что минимальное деление определено с точностью $(1 \pm 0,5)$ мм и при этом говорить о том, что относительная погрешность $\delta = 50\%$ некорректно. На самом деле цена деления (точность градуировки прибора) имеет существенно меньшую погрешность, чем указанная нами. **Мы всегда указываем предел допустимой погрешности всего прибора.** Поэтому теоретически можно проводить линейкой более точные измерения небольших расстояний, снимая значения с долями деления. Но поскольку на глаз разбить минимальное деление на равные отрезки очень сложно, хотя человеческий глаз способен различать интервалы с точностью до двух десятых миллиметра, такое измерение остается на совести самого экспериментатора. Измерять линейкой расстояния сравнимые с ее ценой деления или много большие чем предел приборной шкалы (в этом случае повышается вероятность накопления погрешности) нецелесообразно: линейка для подобных измерений не предназначена.

Также необходимо не забывать о том, что погрешность табличной величины принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этой величины. Например, если мы берем ускорение свободного падения равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, то его погрешность равна $\Delta g = \pm 0,05 \text{ м/с}^2$.

При выполнении однократного измерения оценкой погрешности результата служит приборная погрешность $\Delta x_{пр}$. Результат измерения при этом записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$ (доверительная вероятность считается равной 100 % и не указывается). Проводить однократные измерения

рекомендуется, только если заранее известно, что случайная погрешность пренебрежимо мала по сравнению с приборной. При этом иногда, чтобы учесть возможную неточность при снятии показаний с прибора, приборную погрешность полагают равной цене деления.

Погрешность косвенного измерения

В общем случае погрешность косвенного измерения Δy вычисляется по формуле

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}, \quad (7)$$

где $\partial f / \partial x_i$ – частная производная функции $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ по x_i , Δx_i – абсолютная погрешность прямого измерения величины x_i . Относительная погрешность измерения δ при этом равна

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right)^2 \Delta x_i^2}. \quad (8)$$

В табл. 2 приведены основные формулы упрощенного расчета абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения. Если выражение окажется сложным, то его можно разбить на сумму или произведение более простых и последовательно произвести вычисление погрешности.

Пример: $f = xy + z^2$; выполним замену: $f = A + B$; $L = xy$, $B = z^2$; тогда получаем $\Delta f = \pm(\Delta A + \Delta B)$; $\Delta A = \pm(\bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x)$; $\Delta B = \pm(2\bar{z}\Delta z)$; в итоге имеем: $\Delta f = \pm(\bar{x}\Delta y + \bar{y}\Delta x + 2\bar{z}\Delta z)$.

В случаях, когда расчетная формула имеет вид, удобный для логарифмирования, проще вычислять относительную погрешность.

Еще раз отметим, что погрешность измерения округляется до первой значащей цифры (первой цифры слева направо отличной от нуля). Иногда при большой точности измерений и если первая значащая цифра в абсолютной погрешности 1, то округление проводят до первых двух значащих цифр. В рамках лабораторных работ, проводимых студентами,

следует проводить округление до первой значащей цифры. При этом при округлении следует руководствоваться следующим правилом: если последующая за округляемой значащая цифра больше 2, то округление производится в большую сторону, иначе – в меньшую (погрешность принято слегка завышать, это оказывает меньшее влияние на качество результатов, чем занижение погрешности). Среднее значение измеряемой величины $\bar{x}$ должно заканчиваться тем же младшим разрядом, что и абсолютная погрешность Δx , при этом округление производится по обычным правилам округления. Например: $x = (2.5678 \pm 0.062) \text{ м}$ следует переписать в виде $x = (2.56 \pm 0.06) \text{ м}$, или $x = (2.5 \pm 0.06) \text{ м}$ следует переписать в виде $x = (2.50 \pm 0.06) \text{ м}$.

При проведении любых расчетов нужно руководствоваться следующими правилами:

- 1) при делении, умножении, сложении, вычитании и возведении в степень в окончательном результате следует оставлять такое количество значащих цифр, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных;
- 2) в промежуточных результатах надо сохранять на одну значащую цифру больше.

Таблица 1. Величины коэффициента Стьюдента $t_{P,n}$ для различных значений доверительной вероятности

Число степеней свободы ($n-1$)	Доверительная вероятность ($P, \%$)					
	80	90	95	98	99	99.9
1	3.077	6.314	12.706	31.820	63.657	636.619
2	1.885	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.645	4.032	6.859
6	1.439	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.397	1.859	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587

15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.849
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.282	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373

Таблица 2. Формулы упрощенного расчета абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения

Функция f	Погрешность	
	Абсолютная погрешность $\Delta f = \varepsilon(f) \cdot f$	Относительная погрешность $\varepsilon(f) = \frac{\Delta f}{f}$
$C \cdot x$ $C = const$	$\pm C \cdot \Delta x$	$\pm \frac{\Delta x}{\bar{x}}$
$x + C$	$\pm \Delta x$	$\pm \frac{\Delta x}{\bar{x} + C}$
$x + y + z + \dots$	$\pm(\Delta x + \Delta y + \Delta z + \dots)$	$\pm \frac{\Delta x + \Delta y + \Delta z + \dots}{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + \dots}$
$x - y$	$\pm(\Delta x + \Delta y)$	$\pm \frac{\Delta x + \Delta y}{\bar{x} - \bar{y}}$
$C \cdot xy$	$\pm(C \cdot \bar{x} \Delta y + C \cdot \bar{y} \Delta x)$	$\pm \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right) = \pm(\varepsilon(x) + \varepsilon(y))$
x^n	$\pm(n \bar{x}^{n-1} \Delta x)$	$\pm n \frac{\Delta x}{\bar{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\pm \frac{1}{n} \bar{x}^{\frac{1}{n}-1} \Delta x$	$\pm \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{\bar{x}}$
C^x	$\pm f \Delta x \ln(C)$	$\pm \Delta x \ln(C)$
$\frac{x}{y}$	$\pm \left(\frac{\bar{x} \cdot \Delta y + \bar{y} \cdot \Delta x}{\bar{y}^2} \right)$	$\pm \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right) = \pm(\varepsilon(x) + \varepsilon(y))$
$\ln x$	$\pm \frac{\Delta x}{\bar{x}}$	$\pm \frac{\Delta x}{\bar{x} \ln(\bar{x})}$
$\ln \frac{x}{y}$	$\pm \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right)$	$\pm \frac{1}{\ln \frac{x}{y}} \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right)$
$\sin x$	$\pm \Delta x \cdot \cos \bar{x}$	$\pm \Delta x \cdot ctg \bar{x}$
$\cos x$	$\pm \Delta x \cdot \sin \bar{x}$	$\pm \Delta x \cdot tg \bar{x}$
$tg x$	$\pm \frac{\Delta x}{\cos^2 \bar{x}}$	$\pm \frac{2 \Delta x}{\sin 2 \bar{x}}$

$ctg x$	$\pm \frac{\Delta x}{\sin^2 \bar{x}}$	$\pm 2\Delta x \cdot \sin 2\bar{x}$
$arctg x$	$\pm \frac{\Delta x}{1 + \bar{x}^2}$	$\pm \frac{\Delta x}{(1 + \bar{x}^2) arctg \bar{x}}$