1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы. Основные определения

Числовой матрицей или просто матрицей порядка (размера, формата) $m \times n$ называется прямоугольная таблица числовых элементов a_{ij}, содержащая m строк и n столбцов. Здесь i – номер строки, j-номер столбца. Обозначается:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Употребляются и более краткие обозначения:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \quad (a_{ij})_{m\times n}, \quad \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}.$$

Матрицу обозначают также одной заглавной буквой

$$A = (a_{ij})_{m\times n}; \quad B = (b_{ij})_{m\times n}.$$

Две матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{p\times q}$ называют равными, если $m=p$, $n=q$ и $\forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij}$.

Матрицу размера $n \times n$ называют *квадратной* матрицей n-го порядка.

Если $\forall i, j \quad a_{ij} = 0$, то матрицу называют *нулевой* (обозначают **0**).

Элементы a_{ii} $i = 1, 2, ..., \min(m, n)$ образуют главную диагональ матрицы.

Матрица называется *диагональной*, если все элементы, за исключением элементов главной диагонали, равны нулю, т.е. $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$, $\forall i = j$ $a_{ij} \neq 0$.

Матрицу называют *верхней трапецевидной* (треугольной при m=n) матрицей, если все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю.

Матрицу называют *нижней трапецевидной* (треугольной при m=n) матрицей, если все элементы, лежащие выше главной диагонали, равны нулю.

Квадратную диагональную матрицу называют единичной (обозначают E), если все элементы главной диагонали равны единице.

Матрица-столбец – это матрица размера $m \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матрица- строка - это матрица размера $1 \times n$ $A = (a_{11}, a_{12} ... a_{1n})$.

1.2. Операции над матрицами

Суммой (разностью) двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n} = A \pm B$, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число α называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=\alpha A$, элементы которой равны $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times k}$ *на матрицу* $B=(b_{ij})_{k\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}=AB$, элементы которой равны $c_{ij}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$ (поэлементное умножение i-той строки матрицы A на j-й столбец матрицы B и сложение этих произведений). Вообще говоря, $AB\neq BA$.

Пример: $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

$$C=AB=\begin{pmatrix}3\cdot1+2\cdot4 & 3\cdot2+2\cdot5 & 3\cdot3+2\cdot1\\ 1\cdot1+0\cdot4 & 1\cdot2+0\cdot5 & 3\cdot3+0\cdot1\\ 4\cdot1+6\cdot4 & 4\cdot2+6\cdot5 & 4\cdot3+6\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11 & 16 & 11\\ 1 & 2 & 3\\ 28 & 38 & 18\end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица A^T получается из матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ заменой строк на столбцы $A^T:\ a_{ij}^T=a_{ji}$.

Пример: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$

Элементарные преобразования матрицы:

а) Умножение всех элементов строки на число $\alpha \neq 0$.

б) Сложение строки с другой строкой, умноженной на число $\alpha \neq 0$.

в) Перестановка строк матрицы.

г) Перечисленные преобразования со столбцами.

Элементарные преобразования приводят данную матрицу к эквивалентной ($\sim$ - символ эквивалентности).

С помощью элементарных преобразований можно получить трапецевидную (треугольную при $m=n$) матрицу.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -5 & 4\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -2\cdot \mathrm{I}\\ -3\cdot \mathrm{I}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 11 & -7\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -11\cdot \mathrm{II}\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -29\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ :(-29)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.3. Определители

Числовая характеристика квадратной числовой матрицы A – определитель $(\Delta, |A|, \det A)$.

Определитель n-го порядка, соответствующий квадратной матрице A размера $n\times n$:

$$D=\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минор M_{ij} элемента a_{ij} - это определитель (n-1)-го порядка, полученный из D вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Рекуррентная формула вычисления определителей (разложение определителя по элементам строки или столбца):

$$D=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+\dots+a_{in}A_{in} & \text{(по элементам } i\text{ - той строки);} \\ a_{1j}A_{1j}+\dots+a_{nj}A_{nj} & \text{(по элементам } j\text{ - го столбца).} \end{cases}$$

Свойства определителей

1) Определитель сохраняет свое значение, если:

а) заменить строки соответствующими столбцами (транспонирование): $\det A=\det(A^T)$;

б) к элементам строки (столбца) прибавить соответствующие элемены другой строки (столбца), умноженные на число $\lambda \neq 0$;

в) число перемен местами любых двух строк (столбцов) является четным.

2) Определитель равен нулю, если:

а) одна строка (столбец) состоит из нулей;

б) одна строка (столбец) равна или пропорциональна другой строке (столбцу);
одна строка (столбец) есть линейная комбинация двух и более строк (столбцов).
3) Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
4) Определитель произведения двух $n \times n$ - матриц равен произведению определителей этих матриц : $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

1.4. Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица *A* порядка $n \times n$.

По определению, A^{-1} - обратная матрица к *A*, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

причем $\Delta = \det A \neq 0$ (необходимое и достаточное условие существование обратной матрицы);
$\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

1.5. Ранг матрицы

Минором k -го порядка матрицы $A_{m \times n}$ ($k \leq m,\ k \leq n$) называется определитель D, составленный (с сохранением порядка) из k^2 элементов матрицы, лежащих на пересечении некоторых ее k столбцов и k строк.

Ранг матрицы A - наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы A.

Ранг матрицы можно получить приведением матрицы к трапецевидному (треугольному) виду.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rang$A$=2.

1.6. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными

Общий вид системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

У *однородной* системы все $b_i = 0, \ (i = 1, \ldots, n)$, у *неоднородной* – хотя бы один *свободный член* b_i отличен от нуля.

Матричная запись системы имеет вид $AX = B$, где A – матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных; X и B – матрицы-столбцы из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли. Система совместна (имеет решение) тогда и только тогда, если ранг матрицы коэффициентов системы равен рангу расширенной матрицы.

Обратная теорема. Система несовместна (не имеет решения), если $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \tilde{A}$.

Система имеет единственное решение, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n$. В этом случае определитель матрицы $\det A \neq 0$. Система имеет бесконечное множество решений, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} < n$.

В данном пункте рассматривается случай, когда система имеет единственное решение. Для однородной системы имеем тривиальное решение:

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Для неоднородной системы рассмотрим три метода решения:

1. С помощью обратной матрицы.
2. Метод Крамера.
3. Метод Гаусса.

1. Решение системы выражается формулой $X = A^{-1}B$.

2. Решение системы находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы A; $\Delta_j \quad (j = 1, 2, \ldots n)$ - определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-того столбца на столбец свободных членов.

3. Метод Гаусса заключается в приведении матрицы $\tilde{A}$ к трапецевидному виду (прямой ход) и, затем, последовательного вычисления вектора неизвестных (обратный ход метода Гаусса).

Пример: Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}.$$

Матрица системы и матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица имеет вид

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Определитель матрицы A равен

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ \\ -4\cdot\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{23} =$$

$$= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 7 - (-2) \cdot (-3)) = -29 \neq 0 .$$

Следовательно rang$A$=3. Ранг расширенной матрицы не может быть больше 3. Значит $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$, т.е. по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

а) Найдем решение системы с помощью обратной матрицы. Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - 1 \cdot (-5) = -7 .$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - (-5) \cdot (-4)) = 12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - \left(-3\right)\left(-4\right) = -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = 20$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 1 \cdot (-4)) = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-3) = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\left(3 \cdot \left(-5\right) - 2 \cdot 2\right) = 19$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3) - 1\cdot 2 = -11$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -7 & 12 & -10 \\ -2 & 20 & -7 \\ 1 & 19 & -11 \end{pmatrix}.$$

Получим решение системы

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -7 & 12 & -10 \\ -2 & 20 & -7 \\ 1 & 19 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 0 \\ -29 \\ -58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

б) Найдем решение методом Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -29;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -58.$$

Решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

в) Применим метод Гаусса к решению системы. Для этого преобразуем расширенную матрицу к трапецивидному виду (прямой ход метода Гаусса).

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot I \\ -3\cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 11 & -7 & -3\end{array}\right)-11\cdot II \quad \sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -29 & -58\end{array}\right):(-29) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right), \qquad \text{где } I, II, III - \text{номер строки}.$$

В результате система приняла вид

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - x_3 \\ x_2 = 5 - 2x_3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Теперь можно последовательно получить значения неизвестных, проделав обратный ход метода Гаусса: $x_3 = 2$, $x_2 = 5 - 2\cdot 2 = 1$, $x_1 = -1 + 3\cdot 1 - 2 = 0$.

1.7. Системы *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными. Фундаментальная система решений

Общий вид системы *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

У однородной системы все $b_i = 0$; у неоднородной – хотя бы один свободный член b_i отличен от нуля.

Матричная запись системы имеет вид

$$AX=B,$$

где *A*– матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных, X и B – матрицы-столбцы из неизвестных $x_1, x_2, ... x_n$ и свободных членов $b_1, b_2, ... b_m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

По теореме Кронекера-Капелли система совместна (имеет решение), если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = r$. Случай $r=n$ рассмотрен в предыдущем пункте. Здесь рассмотрим случай $r<n$.

Общее решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид

$$X = X_{oo} + X_{чн},$$

где X_{oo} - общее решение системы однородных линейных алгебраических уравнений (СОЛАУ), $X_{чн}$ - какое-либо частное решение системы неоднородных линейных алгебраических уравнений (СНЛАУ).

В общем случае, если существует хотя бы одно ненулевое решение СОЛАУ, то имеем бесконечное множество решений. Число линейно независимых решений системы равно $p=n-r$. Линейно-независимые решения образуют *фундаментальную систему решений*: $X_1, X_2, ..., X_p$.

Любое решение СОЛАУ можно получить из линейной комбинацией этих решений:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_p X_p,$$ где $C_1, ..., C_p$ – произвольные постоянные.

Для получения фундаментальной системы решений необходимо преобразовать расширенную матрицу $\tilde{A}$ с помощью элементарных преобразований таким образом, чтобы в левом верхнем углу был минор r-го порядка, не равный нулю. После этого, решая систему, выражаем r *базисных* неизвестных через $p=n-r$ *свободных* неизвестных

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) \\ x_2 = x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n). \end{cases}$$

Задавая свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ произвольные линейно независимые значения и определяя базисные неизвестные $x_1, x_2, .., x_r$, получаем фундаментальную систему решений. При решении удобно использовать метод Гаусса. Свободным неизвестным обычно присваивают значения 0 и 1.

x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_n
1	0		0
0	1		0
...	...	...	...
0	0		1

Пример: Решить однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем матрицу системы с помощью элементарных преобразований к трапецевидной форме (прямой ход метода Гаусса)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\cdot I \\ -4\cdot I \\ -3\cdot I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3\cdot II \\ +2\cdot II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2.

После преобразования система приняла вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Примем за свободные неизвестные x_3 и x_4, а за базисные неизвестные примем x_1 и x_2. Выразим базисные неизвестные через свободные (обратный ход метода Гаусса)

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}.$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, получим $x_1 = 8$, $x_2 = -6$. В случае $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, имеем $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. Итак, фундаментальная система решений имеет вид

$$X_1^T = (8; -6; 1; 0), \quad X_2^T = (-7; 5; 0; 1).$$

Общее решение системы линейных алгебраических уравнений: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$.

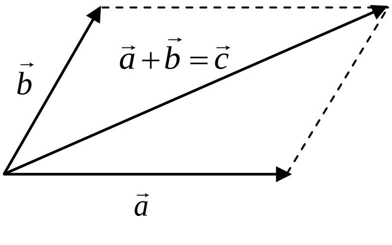
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Понятие о векторе

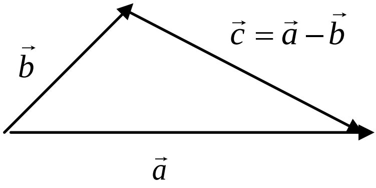
Вектор – отрезок прямой, имеющий определенную длину и направление (обозначается $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$). Далее рассматриваем *свободные* векторы.

Векторы, расположенные на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Векторы, лежащие на одной или параллельных плоскостях, называются *компланарными.*

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приложенных к одной точке, называется вектор $\vec{c}$, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с началом в данной точке.



Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, равный сумме вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного $\vec{b}$.



Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ такой, что

1) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|, |\vec{a}| -$ длины векторов;

2) $\vec{b}$ сонаправлен $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направлен при $\lambda < 0$ в противном случае.

2.2. Операции над векторами в координатной форме

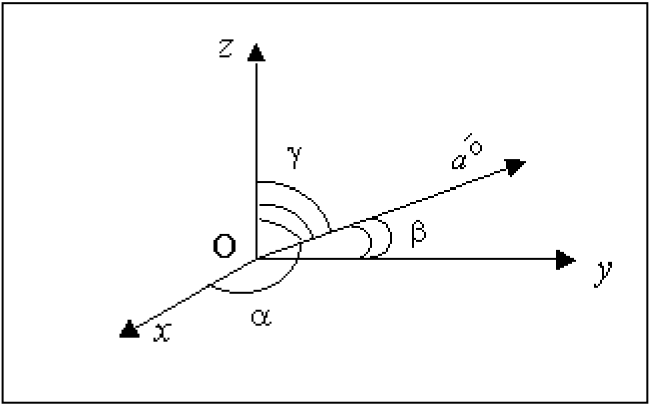
Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ - представление векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в декартовой системе координат по базису $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Другая форма записи: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Длина вектора есть $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^0$ - *орт* вектора $\vec{a}$, вектор

единичной длины, сонаправленный с $\vec{a}$.



Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются косинусы углов между ортом вектора $\vec{a}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, лежащих на осях системы координат (см рис 1)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на действительное число λ есть вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Пример: Вектор $\vec{r}$ составляет с осями координат равные острые углы, $|\vec{r}| = 2\sqrt{3}$. Определить координаты вектора $\vec{r}$.

Решение. Пусть α, β, γ - углы, которые составляет вектор $\vec{r}$ с осями координат. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и, так как $\alpha = \beta = \gamma$,

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ввиду того,что углы острые).

Имеем $r_x = r_y = r_z = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$ и $\vec{r} = (2, 2, 2)$.

2.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным прозведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Обозначается через $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

3) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ для ортогональных векторов, $|\vec{a}| \neq 0,\ |\vec{b}| \neq 0$,

5) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$,   6) $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$,

7) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль вектора $\vec{S}$ вычисляется по формуле $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатной форме $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, где a_i, b_j - координаты в прямоугольном декартовом базисе.

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Пример: Даны вершины треугольника *ABC*: $A(1,-1,2)$; $B(0,3,-2)$; $C(1,2,0)$. Найти угол при вершине *B* и проекцию $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$.

Решение. $\overrightarrow{BA} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right) = (1,-4,4)$, $\overrightarrow{AB} = (-1,4,-4)$, $\overrightarrow{BC} = (1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (0,3,-2)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1+4+8}{\sqrt{1+16+16}\sqrt{1+1+4}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{33}\sqrt{6}} = \frac{13}{\sqrt{198}} .$$

$$\text{óãî ë } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arccos \frac{13}{\sqrt{198}} .$$

$$np_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{0+12+8}{\sqrt{9+4}} = \frac{20}{\sqrt{13}} .$$

Пример: Вычислить работу силы $\vec{F} = (3, -2, -5)$ по перемещению точки вдоль прямой из точки $A(2, -3, 5)$ в точку $B(3, -2, -1)$.

Решение. $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, -6)$,

$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot (-6) = 31$.

2.4. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется правой, если кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ относительно наблюдателя, находящегося в конце $\vec{e}_3$, происходит против часовой стрелки.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$) называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin(\widehat{a, b})$

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку.

Свойства векторного произведения

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

2) $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

4) $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}\quad(\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0)$.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

В случае координатного задания векторов $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ имеем

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Если $\vec{F}$ вектор силы, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы, имеющий свое начало в точке *A*, то момент силы $\vec{F}$ относительно точки *A* вычисляется по формуле $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$.

Пример: Найти площадь треугольника *ABC*, $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$.

Решение. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$,

$\overrightarrow{AC} = (0,4,-3)$,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{225+144+256} = \frac{1}{2}\sqrt{625} = \frac{25}{2} .$$

2.5. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} == \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

3) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$

4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ для компланарных векторов

Модуль смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ **численно** равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если тройка векторов левая и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ для правой тройки.

Если векторы заданы координатами в прямоугольном декартовом базисе:

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример: Даны вершины пирамиды $A_1(2,-3,1)$, $A_2(-1,-4,2)$, $A_3(4,-1,2)$, $A_4(3,-4,2)$. Вычислить объем пирамиды.

Решение. Находим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Имеем $\overrightarrow{A_1A_2}=(-3,-1,1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(2,2,1)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(1,-1,1)$.

Объем пирамиды есть $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot|-12|=2.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой (L) в декартовой системе координат:

$$Ax+By+C=0,\quad A^2+B^2\neq 0.$$

Частные случаи общего уравнения:

(C=0) $Ax + By = 0$ (L) проходит через начало координат.

(A=0) $By + C = 0$ (L) параллельна оси OX.

(B=0) $Ax + C = 0$ (L) параллельна оси Oy.

(A=C=0) $By = 0$ (L) совпадает с осью Ox.

(B=C=0) $Ax = 0$ (L) совпадает с осью Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент, α - угол между прямой и положительным направлением оси Ox, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Если $x_1 = x_0$, то (L) $x = x_0$.

Если $y_1 = y_0$, то (L) $y = y_0$.

Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

$a \neq 0$, $b \neq 0$, a, b - отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, с учетом знака, (отсчитывают от начала координат).

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (L):

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Нормальный вектор прямой (L) – вектор, перпендикулярный прямой в любой точке.

Направляющий вектор прямой (L) – вектор, лежащий на прямой или на параллельной ей прямой.

Уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{N}=(A,B)$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}=(m,n)$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Условие параллельности прямых (L_1) и (L_2) с угловыми коэффициентами k_1,k_2 , нормальными векторами $\vec{N}_1,\vec{N}_2$ и направляющими векторами $\bar{a}_1,\bar{a}_2$ соответственно: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$; $k_1=k_2$; $\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$.

Условие перпендикулярности прямых (L_1) и (L_2) с угловыми коэффициентами k_1,k_2 , нормальными векторами $\vec{N}_1,\vec{N}_2$ и направляющими векторами $\bar{a}_1,\bar{a}_2$:

$$A_1A_2+B_1B_2=0;\quad k_1=-\frac{1}{k_2};\quad m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Угол между пересекающимися прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \text{ или } \cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\left|\bar{a}_1\right|\left|\bar{a}_2\right|}.$$

Пример: Составить уравнение прямой (L), проходящей через т. $M_0(2,-1)$ перпендикулярно прямой (L_1): $2x+3y-5=0$.

Решение. 1) С помощью угловых коэффициентов: (L_1): $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Следовательно, $k_1 = -\frac{2}{3}$. Тогда

$k = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}$ и (L): $y + 1 = \frac{3}{2}(x-2) = \frac{3}{2}x - 3$,

$3x - 2y - 8 = 0$. 2) С помощью нормального вектора. $\vec{N}_1 = (2,3)$. $\vec{N}_1 \cdot \vec{N} = 0$. Следовательно, $\vec{N} = (3,-2)$. Тогда (L): $3(x-2) - 2(y+1) = 0$, $3x - 2y - 8 = 0$.

3.2. Плоскость в декартовой системе координат

Общее уравнение плоскости (P) в декартовой системе координат: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Частные случаи общего уравнения (P):

D=0: (P) проходит через начало координат.

A=0: (P) параллельна OX.

B=0: (P) параллельна OY.

C=0: (P) параллельна OZ.

A=D=0: OX лежит в (P).
B=D=0: OY лежит в (P).
C=D=0: OZ лежит в (P).
B=A=0: (P) параллельна XOY.
A=C=0: (P) параллельна XOZ.
B=C=0: (P) параллельна YOZ.
A=B=D=0: (P) совпадает с XOY.
A=C=D=0: (P) совпадает с XOZ.
B=C=D=0: (P) совпадает с YOZ.

$\vec{N}=(A,B,C)$ - нормальный вектор плоскости (P) – вектор, перпендикулярный плоскости в каждой точке (P).

Уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$, с нормальным вектором $\vec{N}=(A,B,C)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или в векторной записи $\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, где $M(x,y,z)$ - текущая точка плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

или в векторной записи $\overrightarrow{M_0M}\,\overrightarrow{M_0M_1}\,\overrightarrow{M_0M_2}=0$.

Расстояние от т. $M_0(x_0, y_0)$ до плоскости (P):

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Для плоскостей (P_1) и (P_2) с нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ соответственно:

1) *угол между плоскостями*: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$;

2) *условие параллельности плоскостей*:

$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

3) *условие перпендикулярности*: $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ или

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Пример: Составить уравнения плоскости $\left(P_1\right)$, проходящей через точки $A_1(2;-3;1)$, $A_2(-1;-4;2)$, $A_3(4;-1;2)$, и плоскости $\left(P_2\right)$, проходящей через точку A_1 перпендикулярно вектору $\vec{a}(0;1;1)$. Найти угол между плоскостями $\left(P_1\right)$ и $\left(P_2\right)$.

Решение. Точки A_1, A_2, A_3 и точка M с текущими координатами $(x; y; z)$ лежат в плоскости $\left(P_1\right)$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ компланарны, т.е. векторное уравнение плоскости $\left(P_1\right)$ имеет вид $\overrightarrow{A_1M}\ \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3} = 0$. Переписав последнее соотношение в координатной форме, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 4-2 & -1+3 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 3x-5y+4z-25=0$$

- уравнение плоскости $\left(P_1\right)$ с нормальным вектором $\vec{N}_1(3;-5;4)$. Так как $\vec{a}$ является нормальным вектором плоскости $\left(P_2\right)$, то ее векторное уравнение есть $\overrightarrow{A_1M} \cdot \vec{a}$, где точка $M(x; y; z) \in \left(P_2\right)$. Перейдя к координатной форме, имеем

$$(x-2)\cdot 0 + (y+3)\cdot 1 + (z-1)\cdot 1 = 0,$$

или $y+z+2=0$ – уравнение плоскости $\left(P_2\right)$ с нормальным вектором $\vec{N}_2(0;1;1)$.

Угол φ между плоскостями $\left(P_1\right)$ и $\left(P_2\right)$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{3\cdot 0 + (-5)\cdot 1 + 4\cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = -\frac{1}{10},$$

откуда $\varphi = \pi - \arccos 0{,}1$.

3.3. Прямая в пространстве

Общие уравнения прямой (L):

$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ – пересечение двух различных и не параллельных плоскостей.

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m, n, p)$ – вектор, лежащий на прямой (L) или на параллельной ей прямой.

Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$:

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ - канонические уравнения прямой.

Параметрические уравнения прямой:

$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, $\quad -\infty < t < +\infty$, t – параметр.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Для прямых (L_1) и (L_2) с направляющими векторами $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ соответственно имеют место формулы:

1) *угол между прямыми*: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$.

2) *условие параллельности прямых*: $\vec{s}_1\times\vec{s}_2=0$

или $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

3) условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$ или $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$.

3.4 Взаимное расположение плоскости и прямой

Угол φ между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $\left(\vec{s}=(m,n,p)\right)$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ $\left(\vec{N}(A;B;C)\right)$ находится по формуле $\sin\varphi=\dfrac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}$.

Условие параллельности прямой и плоскости: $\vec{N}\,\vec{s}=0\Leftrightarrow\ Am+Bn+Cp=0$.

Координаты точки пересечения плоскости и прямой являются решением системы уравнений

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

Пример: Провести плоскость (*P*) через заданную прямую (*l*): $\frac{x}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ и точку $M_1(2;-1;3)$.

Решение. Точка M_1 не лежит на прямой *l*, так как $\frac{2}{-2}=\frac{-1+2}{-1}\neq\frac{3-1}{3}$. Направляющий вектор прямой $\vec{s}(-2;-1;3)$ и точка $M_0(0;-2;1)\in(l)$ принадлежат также и плоскости (*P*). Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка искомой плоскости; тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ компланарны. Уравнение плоскости (*P*) получаем из условия равенства нулю смешанного произведения: $\overrightarrow{M_0M}\ \overrightarrow{M_0M_1}\ \vec{s}$ =0. Записав его в координатной форме, получим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ 2-0 & -1+2 & 3-1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\text{, т.е. } x-2y-4=0$$

- искомое уравнение плоскости.