16. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

16.1.Скалярное поле

Определение. Скалярное поле определяется скалярной функцией точки $u = u(M) = u(x, y, z) = u(\vec{r})$, где $M(x, y, z)$ - точка пространства, $\vec{r}(x, y, z)$ - ее радиус - вектор.

Поверхности уровня $u(x, y, z) = C,\ C$ - const.

Линии уровня плоского скалярного поля

$$u(x, y) = C,\ C \text{ - const.}$$

Оператор Гамильтона (линейный дифференциальный оператор ∇ *(набла)):* $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Градиент. Градиент скалярного поля – вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},\ \operatorname{grad} u = \nabla u.$$

Свойства градиента

$\operatorname{grad} c = \vec{0},\ c - const$,

$\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u,\ c - const$,

$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$,

$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$,

$\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$,

$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$,

$\operatorname{grad} u^n = n u^{n-1} \operatorname{grad} u$,

$\operatorname{grad}|\vec{r}| = \vec{r} / |r'|$.

Градиент скалярного поля в цилиндрических координатах

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z .$$

Градиент скалярного поля в сферических координатах

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi .$$

Производная скалярного поля u по направлению

$$\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} u \cdot \vec{l}\right) = |\operatorname{grad} u| \cos\left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right).$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = |\operatorname{grad} u|$, если $\vec{l}$ имеет направление $\operatorname{grad} u$.

16.2. Векторное поле

Определение. Векторное поле определяется векторной функцией точки

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(\vec{r}) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

где $M(x,y,z)$ - точка пространства; $\vec{r} = (x,y,z)$ - ее радиус-вектор.

Векторная линия (силовая линия, линия тока) поля – решение системы $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Дивергенция (расходимость) векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\vec{F}.$$

Свойства дивергенции

$\operatorname{div}\vec{c}=0,\ c-const$, $\operatorname{div}\vec{r}=3$,

$\operatorname{div}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=\operatorname{div}\vec{F}_1+\operatorname{div}\vec{F}_2$,

$\operatorname{div}\left(c\vec{F}\right)=c\operatorname{div}\vec{F},\ c-const$,

$\operatorname{div}\left(u\vec{F}\right)=u\operatorname{div}\vec{F}+\vec{F}\cdot\operatorname{grad}u$,

$\operatorname{div}\left(u\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u,\ \vec{c}-const$,

Дивергенция векторного поля в цилиндрических координатах $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho F_\rho\right)+\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$.

Дивергенция векторного поля в сферических координатах

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F_\rho\rho^2\sin\theta\right)+\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\theta\sin\theta\right)+\rho\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

Ротор (вихрь) векторного поля

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

или в символическом виде

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left[\nabla,\vec{F}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Свойства ротора

$\operatorname{rot}\vec{c}=\vec{0},\ c-const$, $\operatorname{rot}\vec{r}=\vec{0}$,

$\operatorname{rot}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=\operatorname{rot}\vec{F}_1+\operatorname{rot}\vec{F}_2$,

$\operatorname{rot}\left(u\vec{F}\right)=u\operatorname{rot}\vec{F}+\left[\operatorname{grad}u,\vec{F}\right]$,

$\operatorname{div}\left[\vec{F}_1,\vec{F}_2\right]=\vec{F}_2\operatorname{rot}\vec{F}_1-\vec{F}_1\operatorname{rot}\vec{F}_2$.

Поток векторного поля $\vec{F}(M)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\vec{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$,

$$\mathit{П}=\iint\limits_S\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)dS=\iint\limits_S F_n dS=$$

$$=\iint\limits_S\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS=$$

$$=\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy\ ,$$

где F_n - величина проекции вектора $\vec{F}$ на направление вектора $\vec{n}$.

Если поверхность S задана уравнением $z=f(x,y)$ $(x,y)\in D$, поток через верхнюю сторону поверхности можно вычислить по формуле

$$\mathit{П}=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}P\left(x,y,f(x,y)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}Q\left(x,y,f(x,y)\right)+R\left(x,y,f(x,y)\right)\right)dxdy$$

Если уравнение поверхности S есть $\vec{r} = \vec{r}\left(u,v\right)$, $\left(u,v\right) \in G$, то

$$\Pi = \iint\limits_{G} \vec{F}\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right] dudv .$$

Линейный интеграл от вектора $\vec{F}$ по линии l

$$\int\limits_{l} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{l} F_S ds = \int\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz ,$$

где F_S - проекция вектора $\vec{F}$ на касательную к l. Линейный интеграл выражает работу векторного поля $\vec{F}$ вдоль линии l.

Циркуляция векторного поля $\vec{F}$ вдоль контура l - линейный интеграл вдоль замкнутой линии l

$$\oint\limits_{l} \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

Формула Стокса

$$\oint\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

или в векторной форме $\oint\limits_{l} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S} \left(\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}\right) dS$,

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S, направление которого таково, что при обходе контура l поверхность S остается слева.

Формула Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + \right.$$

$$\left. + R\cos\gamma \right) dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdy + Rdxdy$$

или в векторной форме $\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}dV = \iint\limits_S F_n dS$,

где S - внешняя сторона поверхности, ограничивающей тело V ; $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к ней.

Векторное поле $\vec{F}$ - *потенциальное*, если $\vec{F} = \operatorname{grad} u$. Функция u называется *потенциалом векторного поля* $\vec{F}$. Поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ потенциально в поверхностно односвязной области тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ или $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Потенциал в этом случае можно найти по формуле
$u(x, y, z) =$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{x_0}^{x} R(x, y, z)dz + C \cdot$$

Векторное поле $\vec{F}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Оператор Лапласа $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими.*

Операции второго порядка

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left[\nabla, \nabla u\right] = \vec{0}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \cdot \left[\nabla, \vec{F}\right] = 0$,

$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \left[\nabla, \left[\nabla, \vec{F}\right]\right] = \nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) - \left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{F} =$$

$$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F},$$

где $\Delta\vec{F} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$.