21. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

21.1. Основные свойства оригиналов и изображений

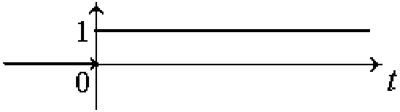
Определение. Функцией – оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

- для любого отрезка $[a, b]$ $\int_a^b |f(t)|\,dt < \infty$ (локальная интегрируемость $f(t)$);
- $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- найдутся такие $M > 0$ и $s \in R$, что $|f(t)| \le M \cdot e^{st}$ ($|f(t)|$ может расти не быстрее некоторой показательной функции). Нижняя грань s_0 чисел s, удовлетворяющих указанному неравенству, называется *показателем роста* оригинала $f(t)$

Замечание. Для локальной интегрируемости $f(t)$ достаточно, чтобы $f(t)$ была кусочно-непрерывной, то есть на каждом отрезке имела не более чем конечное число разрывов I рода.

Примером оригинала является функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



Ее показателем роста является $s_0 = 0$. Произведения $e^{at} \cdot \eta(t)$, $\sin at \cdot \eta(t)$, $t^n \cdot \eta(t)$ $(n \in N)$ также являются оригиналами. Их показатели роста равны соответственно a, 0, 0 (напомним, что степенные функции при достаточно больших значениях переменной растут медленнее любой показательной функции). Функции $e^{t^2}\cdot\eta(t),\quad \operatorname{tg} t\cdot\eta(t),\quad \frac{1}{t}\cdot\eta(t)$ оригиналами не являются.

Замечание. Оригиналы вида $g(t)\cdot\eta(t)$, где $g(t)$ элементарная функция, принято записывать как $g(t)$, подразумевая, что множитель $\eta(t)$ всегда присутствует. Тогда, в частности, функцию Хевисайда можно записать как 1, $1=\eta(t)$. Аналогично $\sin t=\sin t\cdot\eta(t)$ и т. д.

Определение. Если $f(t)$ – оригинал, то комплексная функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\omega$, определяемая равенством

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\,,$$

называется преобразованием Лапласа для $f(t)$ или ее изображением. Соответствие оригинала и изображения принято обозначать так: $f(t)\ \div\ F(p)$;

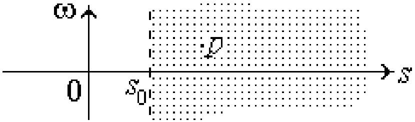
$$f(t),\ \ t\in(-\infty,\infty)\quad\div\quad F(p),\ \ p\in C.$$

Изображения функций удобно обозначать той же буквой, что и функцию-оригинал, только заглавной. Например, $f(t)\div F(p)$; $g(t)\div G(p)$, $h(t)\div H(p)$ и т.д.

Теорема. Пусть $f(t)$ – оригинал и s_0 – его показатель роста. Тогда

а) его изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $Re\ p > s_0$, то есть в точках $p = s + i\omega$, для которых $s > s_0$;

б) $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0.$



Свойства изображений

Пусть $f(t) \div F(p),\ g(t) \div G(p)$. Тогда имеет место:

1. Линейность (α, β - числа):
$\alpha f(t) + \beta g(t) \div \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2. Теорема подобия (a > 0):
$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad f\left(\frac{t}{a}\right) \div aF(ap).$$

3. Дифференцирование оригинала: если $f(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и $f'(t)$ – оригинал, то
$f'(t) \div pF(p) - f(0)$.
Аналогично, если $f'(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и $f''(t)$ – оригинал, то
$f''(t) \div p(pF(p) - f(0)) - f'(0)$,

т.е.

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

и т.д. Здесь под $f(0),\ f'(0),\ \ldots$ понимается предел справа $f(+0),\ f'(+0),\ \ldots$.

4. Дифференцирование изображения:
$$\frac{d}{dp} F(p) \div -t \cdot f(t) \ ,$$

или вообще

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n \cdot f(t).$$

5. Интегрирование оригинала:
$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

(Напомним, что смысл интеграла в левой части таков:

$\int_0^t f(\tau)d\tau$ - это интеграл с переменным верхним пределом, он является первообразной для подынтегральной функции $f(t)$).

6. Интегрирование изображения: если $\frac{f(t)}{t}$ - оригинал, то

$$\int_p^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t} \ .$$

7. Теорема запаздывания (запаздывающий оригинал равен нулю при $t < a$; $a > 0$; его график получается смещением графика оригинала $f(t)$ на a единиц вправо):

$$f(t-a) \ \div \ e^{-ap} \cdot F(p).$$

8. Теорема смещения (изображения) ($a \in$ C):

$$F(p-a) \div e^{at} \cdot f(t) \ \ , \ \ , \ F(p+a) \div e^{-at} \cdot f(t) \ .$$

9. Изображение свертки оригиналов f и g

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot f(t-\tau)d\tau$$

(напомним, что $f*g = g*f$):

$$\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau \ \div \ F(p) \cdot G(p).$$

10. Изображение произведения:

$$f(t) \cdot g(t) \ \div \ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z)G(p-z)dz, \ \ s > s_0.$$

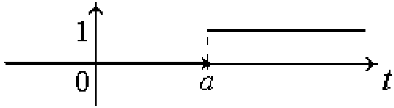
Здесь s_0 – показатель роста произведения; интеграл берется по прямой s = const.

Примеры оригиналов и их изображений

Таблица

	$f(t)$	$F(p)$		$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\mathrm{sh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	8	$\mathrm{ch}\, \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	10	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$

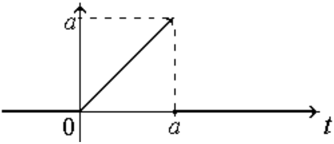
Таблица

	$f(t)$	$F(p)$
10		По свойству 7 (запаздывание) из формулы 1 таблицы

	$f(t) = \eta(t - a)$	$F(p) = e^{-ap} \cdot \frac{1}{p}$.

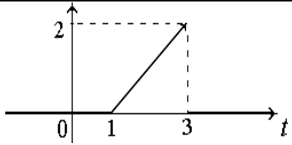
Заметим, что умножением функции $g(t)$ на $\eta(t - a)$ мы превращаем ее в нуль при $t < a$, оставляя ее неизменной в других точках (не путать с запаздыванием, то есть с параллельным переносом графика).

Таблица

	$f(t)$	$F(p)$
11	 $f(t) = t - t\cdot\eta(t - a) =$ $= t - (t - a)\cdot\eta(t - a) -$ $- a\cdot\eta(t - a)$.	По свойствам 1 (линейность) и 7 (запаздывание) из формулы 2 и 1 таблицы $F(p) =$ $= \frac{1}{p^2} - e^{-ap} \cdot \frac{1}{p^2} -$ $- a\cdot e^{-ap} \cdot \frac{1}{p}$.

Таблица

	$f(t)$	$F(p)$

<table>
<tr>
<td>12</td>
<td>
$f(t)$ рассмотрим как запаздывающий на 1 оригинал $f_1(t)$ из примера 11 (a = 2), $f_1(t) = t - t\cdot\eta(t - 2)$.</td>
<td>Применим свойство 7 (запаздывание) к оригиналу из примера 10 при a = 2:

$$F(p) = e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} - e^{-2p}\cdot\frac{1}{p^2} - - a\cdot e^{-2p}\cdot\frac{1}{p}\right).$$</td>
</tr>
</table>

21.2. Отыскание оригинала по изображению

а) Теорема обращения и ее следствие. Нахождение оригинала с помощью теории вычетов

Теорема обращения преобразования Лапласа. Если $f(t)$ – оригинал, являющийся дополнительно на каждом отрезке кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной функцией, и s_0 – его показатель роста, то для всех точек t, в которых $f(t)$ непрерывна,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \quad s > s_0;$$

интеграл берется по прямой s = const.

С помощью теоремы обращения можно доказать следующую теорему.

Теорема. Любая правильная рациональная дробь $F(p) = \dfrac{M_m(p)}{M_n(p)}$, где $M_m(p)$ и $M_n(p)$ – многочлены степеней m и n соответственно ($m < n$), является изображением некоторого оригинала, который можно найти по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}];$$

вычеты берутся по всем особым точкам функции $F(p)e^{pt}$.

б) Нахождение оригинала с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа

В основе этого метода нахождения оригинала лежит применение свойств изображений к известному изображению более простого оригинала в процессе последовательного его преобразования в заданный оригинал. Особо отметим, что в случае, когда изображение является правильной рациональной дробью, т.е. $F(p) = \dfrac{M_m(p)}{M_n(p)}$, где $M_m(p)$ и $M_n(p)$ – многочлены степеней m и n соответственно ($m < n$), можно использовать возможность разложения $F(p)$ в сумму более простых слагаемых. Приведем соответствующую теорему.

Теорема. Каждая правильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей четырех видов:

I. $\dfrac{A}{p-a}$. II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$, $k \in N$, $k \geq 2$.

III. $\dfrac{Bp+C}{p^2+bp+c}$, $b^2-4c<0$.

IV. $\dfrac{Bp+C}{\left(p^2+bp+c\right)^k}$, $b^2-4c<0$, $k \in N$, $k \geq 2$.

Найдем оригиналы для дробей первых трех видов, используя свойства линейности и смещения.

$$\frac{A}{p-a} \div Ae^{at}; \qquad \frac{A}{(p-a)^k} \div Ae^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!};$$

в дроби III сначала выполним преобразования

$$\frac{Bp+C}{p^2+bp+c}=\frac{Bp+C}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}}$$

и введем обозначения

$$\frac{b}{2}=a, \quad c-\frac{b^2}{4}=\omega^2.$$

Получим

$$\frac{Bp+C}{p^2+bp+c}=\frac{Bp+C}{(p+a)^2+\omega^2}=\frac{B(p+a)+C-Ba}{(p+a)^2+\omega^2}=$$

$$=B\cdot\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}+\frac{(C-Ba)}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}.$$

Отсюда

$$\frac{Bp+C}{p^2+bp+c} \;\div\; Be^{-at}\cos\omega t+\frac{C-Ba}{\omega}e^{-at}\sin\omega t.$$

21.3. Дифференциальные уравнения и системы. Решение операторным методом

Уравнение

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t), \qquad y=y(t)$$

запишем кратко

$$L[y]=f(t),$$

где $L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а функция $f(t)$ – оригинал. Обозначим

$$y(t) \;\div\; Y(p), \qquad f(t) \;\div\; F(p).$$

Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$y'(t) \;\div\; pY(p)-y(0),$$

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0),$$

$$y^{(n)}(t) \div p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0).$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим

$$a_0[p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0)] + ...$$
$$... + a_{n-1}[pY(p) - y(0)] + a_nY(p) = F(p)$$

или

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n\right)Y(p) + G(p) = F(p).$$

Здесь $G(p)$ – многочлен, определяемый начальными условиями $y(0)$, $y'(0)$, …, $y^{(n-1)}(0)$. Если все эти условия нулевые, $G(p) \equiv 0$. Обозначим

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = L(p),$$

тогда

$$L(p)Y(p) + G(p) = F(p); \qquad Y(p) = \frac{F(p) - G(p)}{L(p)}.$$

Уравнение решено в изображениях. Остается перейти к оригиналу $y(t)$.

Замечание. В случае нулевых начальных условий можно избежать нахождения изображения для правой части $f(t)$. В этом случае $G(p) = 0$ и $Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)}$. Если найти оригинал $h(t)$ для $\frac{1}{L(p)}$, то оригинал для $Y(p)$ можно найти как свертку оригиналов $h(t)$ и $f(t)$ (используем свойство 9 изображений):

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad \text{или} \quad y(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau .$$

Эта формула называется формулой Дюамеля.