20. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ФКП)

20.1. Комплексные числа и операции над ними

Комплексным числом z называется пара действительных чисел (x, y), записанных в определенном порядке: $z = (x, y)$. Множество комплексных чисел будем обозначать C. Одним из обозначений служит запись вида

$$z = x + i\,y,$$

называемая *алгебраической* формой записи комплексного числа z. В этой записи x называется действительной, y - мнимой частями комплексного числа z (для этого употребляется также запись $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$); i называется «мнимой единицей»: $i^2 = -1$. *Тригонометрическая* форма записи комплексного числа имеет вид:

$$z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right).$$

Здесь величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа; аргумент комплексного числа $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,\ \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ определяется из равенств $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{|z|}$. Главное значение аргумента комплексного числа $(\arg z)$ заключено в промежутке $-\pi < \arg z \le \pi$ и вычисляется по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \textit{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \operatorname{sign} y, & \textit{если} \quad x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} y, & \textit{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Показательная форма записи комплексного числа

$$z = |z| e^{i(\arg z + 2\pi n)}.$$

Арифметические действия над комплексными числами:

Равенство комплексных чисел $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Сложение $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Вычитание $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Умножение $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$, в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right).$$

Деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \dfrac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$, в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right).$$

Сложение и умножение комплексных чисел подчиняются законам:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (ассоциативность сложения);

3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения);
4. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (ассоциативность умножения);
5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Определение. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Свойства операции сопряжения:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

3) $\overline{(\bar{z})} = z$, 4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, 5) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Вычисление корня из комплексного числа:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = 0, 1, ..., n-1$. Здесь $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа z. Корни w_k расположены на комплексной плоскости в вершинах правильного n-угольника, вписанный в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке $O(0,0)$.

Возведение в степень. Формула Муавра.

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad \varphi = \operatorname{Arg} z .$$

20.2. Элементарные функции комплексного переменного

Определение. В области D определена функция комплексного переменного z: $w = f(z)$, если

$\forall z \in D \subset C$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений $w \in C$. Пусть $w = u + v$. Тогда

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z).$$

Функция комплексного переменного не имеет графика: она соответствует заданию двух действительных функций переменных x и y:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y).$$

Геометрический смысл ее состоит в осуществлении отображения точек комплексной плоскости (z) на соответствующие точки комплексной плоскости (w).

Показательная функция e^z:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty.$$

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty.$$

Справедливы формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$,…, $\operatorname{cth} z$:

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,; \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,;$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,; \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\,.$$

Имеют место соотношения:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z;$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z;$$

$$e^{z} = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z; \qquad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z;$$

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z \quad (z \neq 0)$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right);$$

$$\operatorname{Arc}\cos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

Обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right); \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}; \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{z - 1}.$$

Общая степенная функция $w = z^a$ **и общая показательная функция** $w = a^z$ **:**

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}; \quad a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} \qquad (a, z - \textit{комплексные числа}).$$

20.3. Дифференцирование ФКП. Аналитические функции

Определение. Однозначная функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \quad (z+\Delta z \in D).$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z. Обозначается $f'(z)$, $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись условия Коши-Римана (д'Аламбера-Эйлера)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитическая в каждой точке данной области.

Формулы дифференцирования ФКП аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

20.4. Интегрирование ФКП. Интегральные формулы Коши

Интеграл по кривой и его вычисление.

Пусть однозначная функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ определена и непрерывна в области D; L - кусочно-гладкая кривая, лежащая в D. Тогда вычисление интеграла сводится к вычислению (обычных) криволинейных интегралов второго рода

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy$$

Если контур L задан параметрическим уравнением $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'(t)\,dt\,.$$

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром L и внутренними контурами $\gamma_1,...,\gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то (контур $L+\gamma_1+...+\gamma_k$ обходится в положительном

направлении)

$$\oint_{L+\sum\limits_{m=1}^{k}\gamma_m} f(z)\,dz = 0\,.$$

Или в другой формулировке (все контуры обходятся в одном направлении):

$$\oint_L f(z)\,dz = \sum_{m=1}^{k}\oint_{\gamma_m} f(z)\,dz\,.$$

Интегральные формулы Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в D, $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ - контур, охватывающий точку z_0, то

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)dz}{z-z_0},\ \left(z\in\gamma\right).$$

При этом функция $f\left(z\right)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}\left(z_0\right)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}.$$

20.5. Ряды в комплексной области

Числовые ряды

Для сходимости ряда с комплексными членами

$$z_1+z_2+...+z_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}z_n \quad \left(z_n=x_n+iy_n\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$.

Вопрос о сходимости рядов с комплексными членами решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Ряды Лорана

Определение. Рядом Лорана называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ ;$$

при этом ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ называется главной

частью ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ - правильной частью.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 \le r < |z-a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана, коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (r < \rho < R;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций (символ $z \in (z)$ означает, что ряд сходится во всех точках комплексной плоскости (z)):

1) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}, \ z \in (z);$

2) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in (z);$

3) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in (z);$

4) $\ln\left(1+z\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{z^{n}}{n},\ |z|<1;$

5) $\left(1+z\right)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!}z^{n},\quad |z|<1,\ \alpha\in R$

6) $\operatorname{arctg} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1;$

7) $\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}z^{n},\quad |z|<1;$

8) $\dfrac{1}{\left(1+z\right)^{n}}=\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\cdot\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\dfrac{1}{1+z}\right).$

20.6. Вычеты ФКП в изолированных особых точках

Определение 1. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f\left(z\right)$, если существует окрестность $0<\left|z-z_0\right|<\delta$ этой точки с исключенной точкой z_0, в которой $f\left(z\right)$ аналитическая, кроме самой точки z_0.

Определение 2. Точка z_0 называется устранимой особой точкой, если разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит главной части.

Определение 3. Точка z_0 называется полюсом кратности n функции, если в разложении ее в ряд Лорана в окрестности этой точки главная часть содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является

c_{-n} $\left(c_{-n} \neq 0\right)$. Если кратность равна единице $(n=1)$, то точка z_0 называется простым полюсом.

Определение 4. Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечное число членов.

Определение 5. Вычетом функции $f(z)$ относительно точки z_0 (обозначается $\operatorname{res} f\left(z_0\right)$ или $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$) называется число, равное

$$\operatorname{res} f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz,$$

где L - простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0.

В качестве L удобно брать окружность $\left|z-z_0\right|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения следует, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $z-z_0$: $\operatorname{res} f\left(z_0\right)=c_{-1}$. Отсюда следует, что вычет в устранимой особой точке равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе равен

$$\operatorname{res} f\left(z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\left(z-z_0\right)\right).$$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе z_0 порядка m равен

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(f(z)(z-z_0)^m\Big).$$

Если z_0 – существенно особая точка функции z_0, то для определения $\operatorname{res} f(z_0)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ - аналитическая на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$

20.7. Вычисление некоторых действительных интегралов с помощью вычетов

А) Если рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} R(a_k),$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ - полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z > 0)$.

Б) Пусть $R(\sin x, \cos x) = F(z)$, если положить $e^{ix} = z$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\pi \cdot \sigma,$$

где σ есть сумма вычетов функции $F(z)/z$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z| = 1$.