§1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ, ЕГО ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события.

Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

События будем обозначать буквами *A, B, C,* .... Если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условии, то оно называется *достоверным;* если же оно не может произойти— *невозможным.*

Если событие A при реализации комплекса условий может произойти, а может и не произойти, то оно называется *случайным.*

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, будем называть *суммой (объединением)* событии A и B и обозначать $A+B$ или $A \cup B$.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, будем называть *произведением (совмещением)* событии A и B и обозначать AB или $A \cap B$.

События называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пусть, например, нас интересует появление определенного числа очков на грани при одном бросании игральной кости: i = 1,2,3,4,5,6. Выпадение конкретного числа очков назовем *элементарным событием (исходом),* которое обозначим ω_i. Таким образом, для каждого связанного с этим опытом события A можно выделить совокупность тех элементарных исходов ω, наступление которых влечет за собой наступление события A.

Пусть событие A состоит в появлении нечётного числа очков на грани. Этому событию благоприятствуют элементарные события ω_1,

ω_3, ω_5, т.е. некоторое подмножество множества всех элементарных исходов ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Совокупность элементарных событий обозначается Ω и называется *пространством элементарных событий.*

Элементарные события взаимно исключают друг друга и, в результате данного опыта, обязательно произойдет одно из них. Пространство элементарных событий образует так называемую *полную группу попарно несовместных событий,* так как появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными.* Для противоположных событий одновременно выполняются два условия: $A+\overline{A}$ – достоверное событие и $A+\overline{A}$ – невозможное событие.

Для количественной оценки возможности появления случайного события *A* вводится понятие вероятности.

Вероятностью события *A* называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A)=m/n$$

(классическое определение вероятности).

В рассмотренном примере вероятность выпадения грани с нечётным числом очков составляет $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Приведём аксиоматическое определение вероятности, предложенное А.Н. Колмогоровым.

1°. Каждому случайному событию *A* из поля событий ставится в соответствие неотрицательное число *P(A),* называемое вероятностью.

2°. $P(\Omega) = 1$.

3°. Аксиома сложения. *Если события A_1, A_2, …, A_k, попарно несовместны, то $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$.*

Отсюда следует, что:

1) вероятность невозможного события равна нулю;

2) для любого события A $\quad P(A)=1-P(\overline{A}),$ где $\overline{A}$ – противоположное событие;

3) каково бы ни было случайное событие A, $0 \le P(A) \le 1$.

Используя эти аксиомы, свойства вероятностей выводят в качестве теорем.

К числу основных понятий теории вероятностей также относится *частота* события, под которой понимают отношение числа испытании, в которых это событие произошло, к общему числу фактически произведенных испытаний. Частоту события называют *статистической вероятностью.* Для вычисления частоты события необходимо произвести в действительности испытания (опыт), что не требуется для определения вероятности.

Массовые случайные события обладают свойством *устойчивости частоты*: наблюдаемые в различных сериях однородных испытаний (с достаточно большим числом испытаний в каждой серии) значения частоты данного случайного события колеблются от серии к серии в довольно тесных пределах и стремятся (по вероятности) к некоторому постоянному числу. При этих условиях частоту можно принять за приближенное значение вероятности.

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа m и n для вычисления вероятностей событий, и поэтому непосредственно пользоваться формулой $P(A)== m/n$ не удаётся. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т. е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Пусть, например, па плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. При этом выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области g пропорциональна мере (*mes*) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$p = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}$$

(геометрическое определение вероятности).

§2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Теорема сложения вероятностей. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется *зависимым от* события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A/B)$.

Условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A/B) = P(A)$, а условие зависимости – в виде $P(A/B) \neq P(A)$.

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:*

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B)\cdot P(A/\text{B}).$$

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A; тогда

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Условная вероятность события A_k определённая в предположении, что осуществились события $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, обозначается $P(A_k/A_1A_2\ldots A_{k-1})$.

Вероятность произведения нескольких, событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все преды-

дущие имели место:

$$P(A_1A_2...A_k) = P\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_k/A_1A_2...A_{k-1}).$$

В случае независимых событий справедлива формула

$$P\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i).$$

§3. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того что событие A появится в этих n испытаниях m раз, выражается *формулой Бернулли*

$$P_{m,n} = C_m^n p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$. Таким образом,

$$P_{0,n} = q^n,\ P_{1,n} = npq^{n-1},\ P_{2,n} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} p^2 q^{n-2},\ \ldots,\ P_{n,n} = p^n.$$

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом* наступления события A в n испытаниях, если значение $P_{m,n}$ при $m = m_0$ не меньше остальных значений $P_{m,n}$, т. е. $P_{m_0,n} \ge P_{m_i,n}$ при $m_i \ne m_0$.

Если $p \ne 0$ и $p \ne 1$, то число m_0 можно определить из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Разность граничных значений в этом двойном неравенстве равна 1. Если $np + p$ не является целым числом, то двойное неравенство определяет лишь одно наивероятнейшее значение m_0. Если же $np + p$ – целое число, то имеются два наивероятнейших значения: $m_0' = np - q$ и $m_0'' = np + p$.

§4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Если известно, что событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n (гипотез), образующими полную группу попарно несовместных событий, то событие A можно представить как объединение событий AH_1, AH_2, ..., AH_n, т. е. $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. Вероятность события A можно определить по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.*

Условная вероятность события H_i; в предположении, что событие A уже имеет место, определяется по *формуле Бейеса:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A/H_j)P(H_j)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вероятности $P(H_i/A)$, вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез.*

§5. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЗАКОН ЕЁ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если каждому элементарному событию ω из некоторого множества событий Ω можно поставить, в соответствие определенную величину $X = X(\omega)$ говорят, что задана *случайная* величина. Случайную величину X можно рассматривать как функцию события ω с областью определения Ω.

Случайная величина может принять то или иное значение из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины принято обозначать большими буквами X, Y,

…, а принимаемые ими значения – соответствующими строчными буквами x, y, …

Если значения, которые может принимать данная случайная величина X, образуют дискретный (конечный или бесконечный) ряд чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то и сама случайная величина X называется *дискретной.*

Если же значения, которые может принимать данная случайная величина X заполняют конечный или бесконечный промежуток $(a,\ b)$ числовой оси Ox, то случайная величина называется *непрерывной.*

Каждому значению случайной величины дискретного типа x_n отвечает определенная вероятность p_n; каждому промежутку $(a,\ b)$ из области значений случайной величины непрерывного типа также отвечает определённая вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной, попадёт в этот промежуток.

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задаётся *рядом распределения:*

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

При этом $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, где суммирование распространяется на всё (конечное или бесконечное) множество возможных значений данной случайной величины X. Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать с помощью так называемой *функции плотности вероятности* $f(x)$. Вероятность $\mathrm{P}(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной X, попадет в промежуток $(a,\ b)$, определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

График функции $f(x)$ называется *кривой распределения*. Геометрически вероятность попадания случайной величины в промежуток

(a, b) равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Функция плотности вероятности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1°. $F(x) \geq 0$.

2°. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(если все значения случайной величины X заключены в промежутке (a, b), то последнее равенство можно записать в виде $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$).

Рассмотрим теперь функцию $F(x) = P(X < x)$. Эта функция называется *функцией распределения вероятности* случайной величины X. Функция $F(x)$ существует как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Если $f(x)$ – функция плотности распределения вероятности непрерывной случайной величины X, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x) = F'(x).$$

Иногда функцию $f(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения вероятности,* а функцию $F(x)$ – *интегральной функцией распределения вероятности.*

Отметим важнейшие свойства функции распределения вероятности:

1°. $F(x)$ – неубывающая функция.

2°. $F(-\infty) = 0$,

3°. $F(+\infty) = 1$.

Понятие функции распределения является центральным в теории вероятностей. Используя это понятие, можно дать другое определение непрерывной случайной величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если её интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна.

§6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности этих значений

Если случайная величина X характеризуется конечным рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

то математическое ожидание $M(X)$ определяется по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n, \text{ или } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Так как $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1,$ то

$$M(X) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Таким образом, $M(X)$ является взвешенной средней арифметической случайной величины $x_1, x_2, ... \, x_n$ при весах $p_1, p_2, ... \, p_n$.

Если $n = \infty,$ то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ (при условии, что ряд абсолютно сходится).

Понятие математического ожидания распространяется и на непрерывную случайную величину. Пусть $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X. Тогда *математическое ожидание непрерывной случайной величины X* определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

(при условии, что интеграл абсолютно сходится).

Геометрически математическое ожидание как непрерывной, так и дискретной случайной величины равно абсциссе центра тяжести площади, ограниченной кривой (или полигоном) распределения и осью абсцисс. Поэтому при симметрии кривой (или полигона) распределения относительно некоторой прямой, параллельной оси ординат, математическое ожидание совпадает с абсциссой точки пересечения этой оси симметрии с осью абсцисс.

Точка оси *Ox,* имеющая абсциссу, равную математическому ожиданию случайной величины, часто называется *центром распределения* этой случайной величины.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Если ввести обозначение $M(X) = m,$ то формулы для вычисления дисперсии дискретной случайной величины X запишутся в виде

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2 \text{ (при } n = \infty\text{)},$$

а для непрерывной случайной величины X – в виде

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx.$$

Для дисперсии случайной величины справедлива формула

$$D(X) = M[(X - a)^2] - [M(X) - a]^2, \text{ или } D(X) = M[(X - a)^2] - [m - a]^2,$$

где a – произвольное число. Этой формулой часто пользуются для вычисления дисперсии случайной величины, так как вычисление по этой формуле обычно проще.

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется величина $\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$

Среднее квадратичное отношение есть мера рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания.

§7. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Равномерным называется распределение таких случайных величии, все значения, которых лежат на некотором отрезке $[a, b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке. Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ h, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Так как $h(b-a)=1,$ то $h=1/(b-a)$ и, следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1/(b-a), & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

§8. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАКОН ПУАССОНА

Если вероятность наступления случайного события в каждом испытании равна p, то, как известно, вероятность того, что при n испытаниях событие осуществится m раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m} \text{ (где } q = 1-p).$$

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать $n + 1$ значение $(0, 1,..., n)$, описываемый формулой Бернулли, называется *биномиальным.*

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать любые целые неотрицательные значения $(0, 1, 2, ..., n)$, описываемый формулой

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

носит название *закона Пуассона.*

Закон Пуассона является законом распределения вероятностей, например, для следующих случайных величин.

а) Пусть на интервале $(0, N)$ оси Ox случайно размещаются n точек независимо друг от друга, причем события, заключающиеся в попадании одной точки на любой наперед заданный отрезок постоянной (например, единичной) длины, равновероятны.

Если $N \to \infty$, $n \to \infty$ и $a = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{n}{N}$, то случайная величина X, равная числу точек, попадающих на заданный отрезок единичной длины (которая может принимать значения 0, 1, ..., m, ...), распределяется по закону Пуассона.

б) Если n равно среднему числу вызовов абонентов, поступающих за один час на данную телефонную станцию, то число вызовов, поступающих за одну минуту, приближенно распределяется по закону Пуассона, причем а = n/60.

Математическое ожидание и дисперсия случайных величин, распределенных по биномиальному закону и закону Пуассона, определяются по следующим формулам:

для биномиального закона: $M(X) = np$; $D(X) = npq$;

для закона Пуассона: $M(X) = a$; $D(X) = a$.

§9. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ (ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ФУНКЦИЯ НАДЕЖНОСТИ

Аналогом закона Пуассона для непрерывных случайных величин служит *показательный (экспоненциальный)* закон, функция плотности распределения которого имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – постоянный параметр.

Функция распределения (интегральная функция) показательного закона

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} xe^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x},$$

т. е.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha,\ \beta)$ составляет

$$P(\alpha < X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)=(1-e^{-\lambda\beta})-(1-e^{-\lambda\alpha})=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

т. е.

$$P(\alpha < X < \beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Определим числовые характеристики показательного закона распределения:

математическое ожидание

$$M(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty=\frac{1}{\lambda},$$

дисперсия

$$D(X)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\left[M(X)\right]^2=\left[-x^2e^{-\lambda x}-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda},\ \text{т.е. } M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Если T – непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность времени безотказной работы какого-либо элемента, а λ – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени), то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределённой по показательному закону с функцией распределения $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$, которая определяет вероятность отказа элемента за время t.

Функция надежности $R(t)$ определяет вероятность безотказной работы элемента за время t: $R(t)=e^{-\lambda t}$.

§10. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ФУНКЦИЯ ЛАПЛАСА

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нетрудно видеть, что функция $f(x)$ удовлетворяет двум условиям, предъявляемым к плотности распределения: 1) $f(x) > 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Кривая $y = f(x)$ симметрична относительно прямой *x* = *m,* максимальная ордината кривой (при *x* = *m)* равна $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ и ось абсцисс является асимптотой этой кривой. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = m,$ то параметр *m* является математическим ожиданием случайной величины *X. C* другой стороны, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \sigma^2,$ откуда, $D(x) = \sigma^2,$ т. е. (σ является средним квадратичным отклонением величины *X*).

Введем обозначение

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt.$$

Функция Φ(*x*) называется *функцией Лапласа,* или *интегралом вероятностей.* Эту функцию называют также *функцией ошибок* и обозначают erf *x.*

Иногда используются и другие формы функции Лапласа, например, $\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ (*нормированная функция Лапласа*), которая связана с функцией ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ соотношением $\bar{\Phi}(x) = 0,5\,\Phi(x/\sqrt{2}),$ или $\bar{\Phi}(x\sqrt{2}) = 0,5\,\Phi(x).$

Для вычисления значений функции Лапласа пользуются специальной таблицей.

Вероятность попадания в интервал (a, b) случайной величины X, подчинённой нормальному закону, определяется через значения функции Лапласа по формуле

$$P(a < X < b) = 0,5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Отметим следующие свойства функции Лапласа.

1°. $\Phi(0) = 0$, так как $\int\limits_0^0 e^{-t^2}dt = 0$;

2°. $\Phi(+\infty) = 1$, поскольку $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$;

3°. $\Phi(x)$ – нечётная функция.

Справедлива также формула

$$P(|X - m| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

С помощью этой формулы можно находить вероятность попадания случайной величины, подчинённой нормальному закону, в интервал, симметричный относительно точки m.

§11. ТЕОРЕМА МУАВРА – ЛАПЛАСА

Если производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, то частота m/n появлений события является случайной величиной, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание и дисперсия которой равны соответственно p и $\sqrt{pq/n}$. Случайная величина $\tau_n = \frac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}}$, математическое ожидание которой равно нулю, а дисперсия – единице, носит название *нормированной* частоты случайного события (её распределение – также биномиальное).

Теорема Муавра-Лапласа устанавливает, что *при неограниченном возрастании числа n испытаний биномиальный закон распределения нормированной частоты в пределе превращается в нормальный с тем* *же математическим ожиданием (равным* 0) *и дисперсией (равной* 1). В силу этого при больших значениях n для вероятностей неравенств, которым должна удовлетворять частота (или число наступлений) случайного события, можно использовать приближенную оценку с помощью интеграла вероятностей (функции Лапласа), а именно, справедливы следующие приближённые формулы:

$$P\left(a < \frac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}} < b\right) = P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \left(\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

§12. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами: X_1, X_2, …, X_n. В этом случае принято говорить, что указанные случайные величины образуют систему $(X_1, X_2, …, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки $(X; Y)$ в область D, принято обозначать в виде $(X; Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин может быть задан с помощью таблицы

X \ Y	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

где $x_1 < x_2 < … < x_m$, $y_1 < y_2 < … < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин

(X, Y) будем задавать с помощью функции плотности вероятности $f(x, y)$.

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется равенством

$$P\left[(X, Y) \subset D\right] = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1°. $f(x, y) \geq 0$.

2°. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

Если все случайные точки (X, Y) принадлежат конечной области D, то последнее условие принимает вид $\iint_D f(x, y)dxdy = 1$.

Математические ожидания дискретных случайных величии X и Y, входящих в систему, определяются по формулам

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

а математические ожидания непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy, \quad m_y = M(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dxdy.$$

Точка (m_x; m_y) называется *центром рассеивания* системы случайных величин (X, Y).

Математические ожидания m_x и m_y можно найти и проще, если случайные величины X и Y независимы. В этом случае из законов распределения этих случайных величин можно определить математические ожидания m_x и m_y по формуле, приведенной в §6.

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются по формулам

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Дисперсии же непрерывных случайных величии X и Y, входящих в систему, находятся по формулам

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)dxdy,\quad D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-m_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)},\quad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X)=M(X)^2-[M(X)]^2,\quad D(Y)=M(Y)^2-[M(Y)]^2,$$

Важную роль в теории систем случайных величин играет так называемый *корреляционный момент (ковариация)*

$$C_{xy}=M[(X-m_x)(Y-m_y)].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$C_{xy}=\sum_m\sum_n(x_n-m_x)(y_m-m_y)\,p_{nm},$$

а для непрерывных—по формуле

$$C_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)dxdy.$$

Корреляционный момент можно также найти по формуле

$$C_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y).$$

Здесь

$$M(XY)=\sum_m\sum_n x_m y_n p_{mn}$$

для дискретных случайных величин X и Y и

$$M(XY)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xyf(xy)dxdy$$

для непрерывных величин.

Случайные величины X и Y называются *независимыми,* если вероятность одной из них принять значение, лежащее в любом промежутке области её значений, не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В этом случае

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y);\ C_{xy}=0.$$

Для характеристики связи между величинами X и Y рассматривается так называемый *коэффициент корреляции*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

являющийся безразмерной величиной.

Если случайные величины X *и* Y независимы, то $r_{xy} = 0$. Если же случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y = aX + b,$ то $r_{xy} = \operatorname{sign} a,$ т.е. $r_{xy} = 1$ при $a > 0$ и $r_{xy} = -1$ при а < 0.

Вообще же коэффициент корреляции удовлетворяет условию – $-1 \le r_{xy} \le 1.$