18. РЯДЫ
18.1. Числовые ряды
18.1.1. Определение ряда и его суммы

Пусть дана бесконечная последовательность $u_1, u_2, ..., u_n, ...$.

Определение. Выражение $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ называется *рядом*, а числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ - членами ряда.

Краткая запись $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. u_n - *общий член* ряда.

Ряд считается заданным, если задана функция

$$u_n = f(n).$$

Если отбросить первые n членов ряда, то получится ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

называемый *остатком ряда*.

Примеры: 1) $u_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$.

2) $u_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$.

Иногда ряд задают рекуррентной формулой.

Пример: $u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}$. Тогда

$u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{12}$, и т.д.

Пусть дан ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$. Обозначим $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ - *частичная сумма* ряда. Образуем последовательность частичных сумм $\{S_n\}$:

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2,$

....

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$

....

Определение. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходящийся* и S - его сумма. Если последовательность $\{S_n\}$ не стремится к пределу, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходящийся.*

Последнее имеет место в двух случаях:

1) $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty;$ 2) не существует $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad \left(a \neq 0,\ |q| < 1\right); \quad S_n = a\dfrac{q^n - 1}{q-1},$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{a}{1-q} = S.$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0,\ q = 1); \quad S_n = na, \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0,\ q = -1);$

$S_1 = -a,\ S_2 = 0,\ S_3 = -a,\ \ldots; \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Свойства сходящихся рядов

1) Если ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то сходится ряд $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$.

2) Если ряды $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ сходятся и имеют суммы S' è S'', то сходится ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = S' \pm S''.$$

3) Если ряд сходится, то сходится и ряд, в котором выброшено конечное число членов.

Следствие. Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток.

18.1.2. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд

Необходимый признак. Если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится.

Пример: $\dfrac{1}{101}+\dfrac{2}{201}+\ldots+\dfrac{n}{100n+1}+\ldots,$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0.$ Ряд расходится.

Замечание. Вообще условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не означает сходимости ряда.

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

Запишем ряд в виде

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.$$

Новый ряд расходится. Значит, гармонический ряд расходится. Частичная сумма гармонического ряда $S_n=\ln n+C+\varepsilon_n$ (C - постоянная Эйлера: $C=0,5772\ldots;\ \varepsilon_n\to 0,\ n\to\infty$).

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$ (см. п. 18.1.3.4.).

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(\alpha=1/2<1)$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

18.1.3. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости ряда

18.1.3.1. Признаки сравнения

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ такой, что $\forall n \;\; u_n > 0.$

Лемма. Если частичные суммы ряда с положительными членами ограничены сверху $S_n < M$, то ряд сходится.

Если ряд сходится, то $S_n < S.$

Если ряд с положительными членами расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty.$

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; (1), \;\; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \;\; (2) \;\; \left(u_n > 0, \; v_n > 0\right) \text{ и } \forall n \;\; u_n \le v_n.$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится ряд(1);

2) если расходится ряд (1), то расходится ряд(2).

Признак справедлив, если условие $u_n \le v_n$ выполняется, начиная с какого-либо номера N, в силу 3-го свойства сходящихся рядов.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сравним с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$\forall n\ \ \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Предельный признак сравнения. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$,

то при $0 < A < +\infty$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся или

расходятся одновременно; при $A = 0$ из сходимости

ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$; при

$A = +\infty$ из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ следует

расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-1}$. Сравним с расходящимся

рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2-1}\cdot n = \frac{2}{3}$.

Значит, исходный ряд расходится.

18.1.3.2. Признак д'Аламбера.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n > 0)$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$ то

при $\rho<1$ - ряд сходится,

при $\rho>1$ - ряд расходится,

при $\rho=1$ - ряд может сходится или расходиться.

Примеры: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}.$ Применим признак д'Аламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}=\dfrac{1}{2}<1$, значит, ряд сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}.$ Применим признак д'Аламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+1\right)^2}=1$ - о сходимости ряда ничего сказать нельзя. Необходимо применить другой достаточный признак сходимости.

18.1.3.3. Радикальный признак Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ \left(u_n>0\right).$ Если существует

предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$ то при $l<1$ - ряд сходится,

при $l>1$ - ряд расходится,

при $l=1$ - ряд может сходится или расходиться.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$. Применим радикальный признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$ - ряд сходится.

18.1.3.4. Интегральный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n \quad (u_n>0)$, члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $u_1=f(1),...,u_n=f(n),...$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1,\infty)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ и расходится, если интеграл расходится.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ Применим интегральный признак Коши.

1) $\alpha\neq1$ $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{-\alpha+1}-1\right)$:

а) $\alpha>1$ $I=\frac{1}{\alpha-1}\Rightarrow$ ряд сходится;

б) $\alpha < 1$ $I = \infty \Rightarrow$ ряд расходится.

2) $\alpha = 1$, $I = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

Оценка ошибки при приближенных вычислениях суммы ряда.

$$S - S_n = r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \quad \forall n. \qquad r_n < \int\limits_n^{\infty} f(x)\, dx.$$

Примеры: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

$$r_n < \int\limits_n^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}}.$$

Для заданного ε можно оценить n из условия

$$r_n < \frac{1}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}} \le \varepsilon.$$

Для $\alpha = 2$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\frac{1}{n} \le 0{,}001$, $n = 1000$.

Данный ряд *медленно (плохо)* сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\alpha = 3$, $\varepsilon = 0{,}001$. $r_n < \frac{1}{2n^2} \le 0{,}001$, $n = 24$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $\alpha = 4$, $\varepsilon = 0{,}001$. $r_n < \frac{1}{3n^3} \le 0{,}001$, $n = 7$.

Чем «быстрее» члены ряда стремятся к нулю, тем быстрее ряд сходится.

18.1.3.5 Степенной признак

Если $u_n \sim c/n^{\alpha}$ при $n \to \infty,\ 0 < c < +\infty$, то при $\alpha > 1$ ряд сходится, при $\alpha \le 1$ - расходится.

18.1.3.6. Признак Абеля

Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограниченна, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.

19.1.3.7. Признак Дирихле

Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ограниченны, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ сходится.

18.1.3.8. Признак Раабе

Если $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r$, то при $r > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, при $r < 1$ - расходится.

18.1.4.8. Признак Гаусса

Если $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\ \varepsilon > 0$, то при $\lambda > 1$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; при $\lambda < 1$ - расходится; при $\lambda = 1,\ \mu > 1$ ряд сходится; при $\lambda = 1,\ \mu \le 1$- расходится.

18.1.4. Знакопеременные ряды

Знакопеременным называется ряд, члены которого имеют неодинаковые знаки

Пример знакопеременного ряда

$$1 + 2 - 3 - 4 - 5 + 6 + 7 - \ldots .$$

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то возможна перестановка бесконечного множества его членов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то при перестановке бесконечного множества его членов можно получить расходящийся ряд или изменится сумма ряда.

2) Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать и при этом их суммы складываются, вычитаются и умножаются.

Например $(a_1+a_2+...+a_n+...)(b_1+b_2+...+b_n+...)=$

$=a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+...+(a_nb_1+a_{n-1}b_2+...+a_1b_n)+...$.

Сумма полученного ряда равна произведению сумм исходных рядов.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{2^n}$ сходится абсолютно, т.к. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$, ибо $\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится.

18.1.5. Знакочередующиеся ряды

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\quad u_n\geq 0.$$

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде $u_1>u_2>...>u_n>...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится, причем $S<u_1$, $|r_n|<u_{n+1}$.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Ряд сходится по признаку Лейбница, т. к. $u_1>u_2>...>u_n>...$. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Но ряд сходится плохо (медленно), т. к. $|r_n|<\frac{1}{n}$.

18.1.6. Некоторые ряды

$$a\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q|<1; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} = 3; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

18.2. Функциональные ряды

18.2.1. Общие определения

Ряды

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где предполагается, что $\forall x \; u_n(x)$ определены и непрерывны, называют *функциональными*. Для одних значений x ряд может сходится, для других – расходиться. При значении $x = x_0$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если он сходится, то точка $x = x_0$ называется *точкой сходимости* функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* функционального ряда. Область сходимости – промежуток оси Ox.

Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Ряд сходится в области $x \in (-1,1)$.

При $|x| \geq 1$ ряд расходится.

Сумма ряда $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ есть функция независимой переменной x. В примере $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Эта функция есть сумма ряда только при значениях $x \in (-1,1)$.

Частичная сумма n первых членов ряда обозначается $S_n(x);$ остаток ряда - $r_n(x)$. Если ряд сходится при каком-либо x, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$

При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных.

18.2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в области D, если $\forall \varepsilon \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in D.$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D,$ если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ такой, что $\forall x \in D$ $\left|u_n(x)\right| \le v_n$. В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ называют *мажорантой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *мажорирующим рядом*.

Примеры: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$ $\forall x \in R$ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно в R .

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится $\forall x.$ Сумма ряда равна $S(x) = e^x.$
Эта сходимость равномерная для любой конечной области $D,$ т. к. $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \varepsilon.$ x^{n+1} растет медленнее $(n+1)!.$ Для всей числовой оси сходимость неравномерная, т. к. $\forall n$ можно найти такое $x,$ что $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} > \varepsilon.$

18.2.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Во всех теоремах предполагается, что область D сходимости ряда, есть интервал оси Ox.

Теорема 1. Если ряд из непрерывных функций равномерно сходится в D, то его сумма есть функция, непрерывная в этой области.

Пример: Мы показали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно $\forall x.$ Следовательно его сумма непрерывна. Другое дело, что сумму найти трудно. Возьмем n членов ряда. Их сумма равна $S_n(x).$ Оценим предельную абсолютную ошибку

$$\left|r_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left|\sin kx\right|}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = r_n.$$

Остаток ряда r_n зависит от n и не зависит от x.

Теорема 2. Если ряд из непрерывных функций равномерно сходится в D, то для $[a,b]\subset D$

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\ldots+\int_a^b u_n(x)dx+\ldots.$$

Теорема 2 справедлива и для переменного верхнего предела $\int_a^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(x)dx \quad a\le x\le b.$

Теорема 3. Если ряд из функций, имеющих непрерывные производные, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ сходится в D, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ сходится равномерно в D, то $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$

18.3. Степенные ряды

18.3.1. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости

Определение. *Степенным рядом* называют функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

Если $x_0=0,$ то имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

В дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, т.к. они сводятся к рядам вида первого вида подстановкой вместо x выражения $x - x_0$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0,$ то он сходится абсолютно в интервале $\left(-|x_0|, |x_0|\right).$

Следствие. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится $\forall x: |x| > |x_0|.$

Область сходимости. Возможны три случая:

1) Область сходимости состоит только из одной точки $x = 0.$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$

а) $\forall x \neq 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \left|n^n x^n\right| > 1$;

б) если $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n = 0$. Область сходимости: $x = 0$.

2) Область сходимости $D = \left(-\infty, \infty\right).$

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

$\forall x\ \exists N:\ \forall n>N\ \left|\frac{x}{n}\right|<1$ и для $n>N$ члены ряда меньше сходящейся геометрической прогрессии. Значит область сходимости $D=(-\infty,\infty)$.

3) Область D ограничена.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n,\ \ D=(-1,1)$.

Определение. *Радиусом сходимости* степенного ряда называется такое число R: $\forall x: |x|<R$ ряд сходится, $\forall x: |x|>R$ - расходится.

Интервал $(-R,R)$ называется *интервалом сходимости*.

В первом примере $R=0$, во втором - $R=+\infty$, в третьем - $R=1$.

Для определения радиуса сходимости нужно исследовать ряд. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$.

а) Применим признак д'Аламбера к знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n R^n\right|$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}R^{n+1}}{a_n R^n}\right|=R\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1.$$

Тогда радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

б) Если $\forall n\ \ a_n\neq 0$, то применяя радикальный признак Коши д’Аламбера к знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n R^n\right|$ получим радиус сходимости $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{np}$, $p=2,3,4,\ldots$. Применяя признак д’Аламбера к знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n R^{pn}\right|$, получим $R=\sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{N(n)}$, где $N(n)$ произвольная функция аргумента n. Для определения области сходимости применяют признак д’Аламбера.

В следующих примерах найти область сходимости степенных рядов.

Примеры: 1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty,\ \ x\in(-\infty,+\infty).$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$, $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. На «концах» интервала сходимости $x\in(-1,1)$: $x=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - ряд

расходится, $x=-1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - ряд сходится условно.

Окончательно $x\in[-1,1)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}$,

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n-1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=1.$$

На «концах» области сходимости $x\in(-1,1)$:

$x=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$ - ряд сходится,

$x=-1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ - ряд

сходится. Окончательно $x\in[-1,1]$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$, $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2.$

$|x-1|<R\Rightarrow\ |x-1|<2,\ -2<x-1<2,\ -1<x<3$.

$x=-1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - ряд сходится условно; $x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - ряд расходится.

Окончательно $x \in [-1,3)$.

18.3.2. Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (*)$$

имеющий радиус сходимости R $(R \le \infty)$. Сумма ряда $S(x)$ есть функция определенная внутри интервала сходимости, а также на тех концах интервала, где ряд сходится.

Лемма 1. Степенной ряд равномерно сходится в любом интервале $[-b,b] \subset (-R,R)$.

Лемма 2. Степенной ряд, составленный из производных ряда (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (**)$$

имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (*).

Если составить ряд из производных ряда (**), то у него тоже радиус сходимости равен R. Таким образом все степенные ряды, полученные последовательным дифференцированием ряда (*) имеют одинаковый радиус сходимости и равномерно сходятся в любом интервале, принадлежащим области сходимости.

Свойства. 1) Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.

Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$. Функция $S(x)$ непрерывна всюду, за исключением точки $x = 1$. Но она является суммой ряда только при $|x| < 1$ (см. пример в п.18.3.1.).

2) Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости и при этом

$$\int\limits_a^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости и при этом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \left(S(x)\right)'.$$

Действия над степенными рядами. Если R_1 - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, R_2 - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, α, β - числа, то

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha a_n + \beta b_n\right) x^n,$$

$|x| \le \min\{R_1, R_2\}$;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n,$$

$$|x| \le \min\{R_1, R_2\};$$

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} a_n t^n dt,\ [\alpha, x] \subset (-R_1, R_1);$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ |x| \le R_1.$$

18.4. Разложение функций в степенные ряды

18.4.1. Ряд Тейлора

Сумма степенного ряда непрерывна и бесконечное число раз дифференцируема в интервале сходимости. Рассмотрим обратный вопрос. Когда можно утверждать, что функция $f(x)$ является суммой некоторого ряда?

Определение. *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

относительно разности $(x - x_0)$, коэффициенты которого a_n выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

18.4.2. Условие разложимости функций в ряд Тейлора

При каких условиях ряд Тейлора для функции $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

сходится и его сумма равна $f(x)$?

Обозначим $P_n(x)$ - многочлен n-й степени (частичная сумма ряда Тейлора)

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Остаточный член ряда $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

Сходимость ряда к функции $f(x)$ означает, что

$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$ или

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x)-P_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0.$ $R_n(x)$ - ошибка аппроксимации функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$.

Пусть $f(x)$ - многочлен n-й степени. Продифференцируем n раз. Последующие производные равны нулю. Получим формулу Тейлора для многочленов

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=-3+x-x^2+2x^3$

по степеням $(x-1)$.

Решение. $x_0 = 1$.

$f(1) = -1,\ \ f'(1) = \left(1-2x+6x^2\right)\Big|_{x=1} = 5,$

$f''(1) = \left(-2+12x\right)\Big|_{x=1} = 10,\ \ f'''(1) = 12$,

$f^{(k)}(1) = 0\ \ (k = 4, 5, \ldots)$. Тогда

$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3$.

18.4.3. Остаточный член ряда Тейлора

Теорема. Если $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для всякой точки, принадлежащей интервалу, остаточный член равен

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{где}\ \xi \in (x_0, x).$$

Частные случаи

1) $n = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$. Это - формула Лагранжа.

2)

$n = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Это линейная аппроксимация.

Т. к. ξ - неизвестна, то $R_n(x)$ можно только оценить.

Пусть в области сходимости $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$.

Тогда для всякого x, принадлежащего области

сходимости, $\left|R_n(x)\right| < M_{n+1}\dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Если исследование остаточного члена $R_n(x)$ представляет затруднения, то:

1) разлагаем функцию в ряд Тейлора,
2) находим интервал сходимости,
3) доказываем, что $R_n(x) \to 0$ для всякого x, принадлежащего интервалу сходимости.

18.4.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Разложение функций проводится в два этапа:

1) Вычисляются производные $f(x_0),..., f^{(n)}(x_0),...$. Предполагается, что для n-ой производной можно получить общую формулу, зависящую от x и значения порядка производной. Составляется ряд Тейлора.
2) Находится интервал, где ряд Тейлора сходится, т. е. остаточный член ряда $R_n(x) \to 0$.

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0, абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом, то функция $f(x)$ в этом интервале разлагается в ряд Тейлора.

Особенно часто используют разложение при $x_0 = 0$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Этот ряд называется рядом Маклорена.

18.4.4.1. Разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

В частности, для $x=1$ $\quad e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

18.4.4.2. Разложение функции $f(x)=\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

18.4.4.3. Разложение функции $f(x)=\cos x$ в ряд Маклорена

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Замечание. *Нечетные функции* раскладываются по нечетным степеням. *Четные функции* раскладываются по четным степеням.

18.4.4.4. Биномиальный ряд

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n+\dots \qquad x\in(-1,1).$$

Если m - целое и больше нуля, то получим формулу бинома Ньютона.

Для $m=-1$ $\quad \dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad x\in(-1,1).$

Для разных m могут входить в область сходимости одна или обе границы.

18.4.4.5. Разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x\in(-1,1).$$

При $x=1$ ряд сходится условно. Поэтому окончательно $x\in(-1,1]$.

Пример: $\ln 2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}.$ Ряд сходится, но очень плохо. Из теоремы Лейбница видно, что для точности $\varepsilon=0{,}000001$ необходимо $n=100000$ членов ряда. Позже покажем, как улучшить сходимость.

18.4.4.6. Разложение функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в ряд Маклорена

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$x \in [-1,1]$.

18.4.4.7. Примеры

1) $$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$x \in (-\infty, \infty)$.

2) $$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

18.4.5. Приближенное вычисление значений функций

Пусть функция $f(x)$ представима рядом Тейлора в окрестности точки x_0. Тогда точное значение функции можно вычислить с помощью ряда Тейлора, а приближенное значение – по его частичной сумме. Ошибку можно оценить по остатку ряда $R_n(x)$. Рассмотрим на примерах.

Примеры: 1. $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. В интервале

$[0, M] \quad \forall n \quad f^{(n)}(x) \le e^M$. По теореме об оценке остаточного члена ряда $R_n(x) < e^M \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. При $M=1$

$$R_n(x) < e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon.$$ Если $\varepsilon = 10^{-5}$,

то $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 8.$

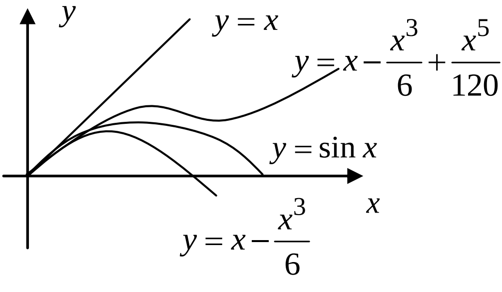
$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{8!} \approx 2,71828.$$

2. $\sin x, \quad \varepsilon = 0,0001.$

$$n=1, \quad \sin x \approx x, \quad |R_n(x)| < \frac{x^3}{6}, \quad x \in (0;0.08).$$

$$n=2, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad |R_n(x)| < \frac{x^5}{120}, \quad x \in (0;0.4).$$

$$n=3, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad |R_n(x)| < \frac{x^7}{5040}, \quad x \in (0;0.9).$$



3. $\ln 2, \quad \varepsilon = 0,000001.$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x\in[-1,1).$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} =$$

$$= 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right), \qquad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}+\ldots\right). \quad n=4.$$

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}++\frac{1}{7}\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\frac{1}{3^9}\right) \approx 0,693144.$$

18.4.6. Интегрирование функций

Пусть нужно найти $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx.$

Пусть известно разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора и пределы интегрирования лежат в интервале сходимости ряда. Тогда можно интегрировать почленно. В итоге получим ряд для функции $F(x)$, имеющий тот же интервал сходимости, что и исходный.

Если интеграл выражается через элементарную функцию, то получим ее разложение в ряд Тейлора. Если функция $F(x)$ в элементарных функциях не выражается, то найдем разложение неэлементарной функции в ряд Тейлора.

Зная оценку $R_n(x)$ для подынтегральной функции, можно получить оценку $R_n^*(x)$ для $F(x)$.

Пример: Интегральный синус $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$ представить степенным рядом.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!}, \ x \in (-\infty, \infty).$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - ..., \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Этот ряд не сходится ни к какой элементарной функции.

19. Ряд Фурье. Интеграл Фурье

19.1. Ряд Фурье в действительной форме

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, заданной на интервале $(-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi]$ кусочно монотонна и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода (т.е. удовлетворяет условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi]$ и сумма $S(x)$ этого ряда:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри интервала $(-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right]$, где x_0 - точка разрыва I рода;

3) $S(x) = \frac{1}{2}\left[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right]$ при $x = \pm\pi$.

Если функция $f(x)$ задана на интервале $(-l, l]$, то ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если $f(x)$ - четная функция, ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l},$$

где $$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Если $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi nx}{l},$$

где $$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, l]$, то для простоты разложения ее в ряд Фурье достаточно доопределить ее на интервале $(-l, 0)$ четным или нечетным образом.

19.2. Ряд Фурье в комплексной форме

Если функция $f(x)$ задана на интервале $(-l, l]$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее ряд Фурье в *комплексной форме* записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}},$$

где $$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{l}} dx .$$

19.3. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке оси Ox и абсолютно интегрируема вдоль всей оси ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ - сходится), то для нее справедлива *интегральная формула Фурье*: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du$.

Комплексная форма интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iz(u-x)} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{izu} du .$$

Для четной функции интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos zx dz \int_{0}^{\infty} f(u) \cos zu du ,$$

для нечетной: $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin zx dz \int_{0}^{\infty} f(u) \sin zu du$.

Преобразование Фурье

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}f(x)dx \quad \text{(прямое)},$$

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izx}F(z)dz \quad \text{(обратное)}.$$

Косинус-преобразование Фурье
(для четных функций)

$$F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos zxdx \quad \text{(прямое)},$$

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int^{\infty}F(z)\cos zxdz \quad \text{(обратное)}.$$

Синус-преобразование Фурье
(для нечетных функций)

$$F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin zxdx \quad \text{(прямое)},$$

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int^{\infty}F(z)\sin zxdz \quad \text{(обратное)}.$$