17. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

17.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

17.1.1. Общие понятия. Теорема существования

Определение. Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x функцию $y(x)$ и ее производную y'.

Дифференциальные уравнения для функции одной переменной называются обыкновенными.

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение, превращает его в тождество.

Примеры: 1) $y' = y$. Решение $y = Ce^{x}$, где C - произвольная постоянная.

2) $y' = -y$. Решение $y = Ce^{-x}$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений, которые обычно определяются формулой $y = \varphi(x, C)$, содержащей одну произвольную постоянную. Такое множество решений называют *общим решением* дифференциального уравнения. Придавая C определенные (допустимые) значения, получим *частное решение*.

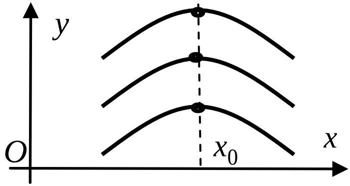
При решении конкретных задач нас будет интересовать частное решение, определяемое начальным условием. Обычно начальное условие задается парой значений (x_0, y_0) или $y\big|_{x_0} = y_0$.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения при начальном условии называется *задачей Коши.*

Теорема Коши о существовании и единственности решения

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y\big|_{x_0} = y_0$ $\left(y(x_0) = y_0\right)$. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в открытой области, содержащей точку $P(x_0, y_0)$, то в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ это уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

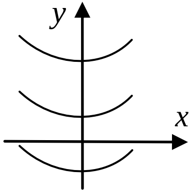
График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Общее решение – семейство интегральных кривых.



Чтобы отыскать частное решение, нужно в общее решение $y=\varphi(x,C)$ подставить (x_0,y_0) и разрешить уравнение относительно C.

Пример: Дифференциальное уравнение $y'=2x$.

Общее решение $y=x^2+C$.



Начальное условие $y\big|_{x=1}=2$. Подставим начальное условие в общее решение дифференциального уравнения. Получим алгебраическое уравнение для определения произвольной постоянной C: $2=1+C$. Следовательно $C=1$. Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию будет $y=x^2+1$.

Общее решение дифференциального уравнения не обязательно должно быть получено в явном виде,

$F(x,y,C)=0$ также является общим решением дифференциального уравнения.

17.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение $f(y)dy=g(x)dx$. Проинтегрировав, получим общее решение $\int f(y)dy=\int g(x)dx+C$.

Если $y\big|_{x_0}=y_0$, то получим частное решение

$$\int\limits_{y_0}^{y} f(y)dy=\int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Пример: $3y^2dy=2xdx.\ \ y^3=x^2+C,\ \ y=\sqrt[3]{x^2+C}$.

Определение. Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(x)}{g(y)},\ \ \int g(y)dy=\int f(x)dx+C$.

2) $P(x)Q(y)dy+M(x)N(y)dx=0,$

$$\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy+\int\frac{M(x)}{P(x)}dx=C.$$

Внимание! Может произойти потеря частного решения.

Пример: Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0\ .$$

Решение. Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение

$$\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{y}{y+1}dy=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\ln C\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-y+\ln|y+1|=\ln C\Rightarrow\ Ce^y=(y+1)\sqrt{x^2+1}\ .$$

При делении на $y+1$ мы могли потерять частное решение $y=-1$, но оно содержится в общем интеграле, если $C=0$.

17.1.3. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Нет общего метода составления дифференциальных уравнений. Каждая задача требует своего подхода и знания законов физики.

1) Радиоактивный распад. Экспериментально установлено, что скорость распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. Определить период полураспада вещества, если в момент $t_0=0$ масса равна $M=M_0$.

Решение. $\dfrac{dM}{dt}=-kM$, $(k>0)$, $\dfrac{dM}{M}=-kdt$,

$\ln M=-kt+\ln C$, $M=Ce^{-kt}$, $M\big|_{t=0}=M_0$, $C=M_0$,

$M = M_0 e^{-kt}$. Период полураспада T. Тогда
$\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \Rightarrow e^{kT} = 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{k}$. ($k$ - определяется экспериментально).

2) Охлаждение тела. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела T и температурой окружающей среды T_c. Найти формулу для расчета температуры тела, если $T\big|_{t_0=0} = T_0$.

Решение. $\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_c\right)$, $\left(k > 0\right)$. $\frac{dT}{T - T_c} = -kdt$,

$\ln\left(T - T_c\right) = -kt + \ln C$, $\left(T > T_c\right)$. $T = T_c + Ce^{-kt}$,

$T\big|_{t=0} = T_0$: $T_0 = T_c + C$, $C = T_0 - T_c$.

Окончательно $T = T_c + \left(T_0 - T_c\right)e^{-kt}$.

17.1.4. Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f\left(x, y\right)$ называется *однородным*, если функция $f\left(x, y\right)$ может быть представлена, как функция отношения своих аргументов $f\left(x, y\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Пример. $\left(xy-y^2\right)dx-\left(x^2-2xy\right)dy=0$.

Решение. $$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}.$$

Функция $f\left(x,y\right)$ называется *однородной функцией измерения* m, если $f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^m f\left(x,y\right)$.

Примеры: 1) $f\left(x,y\right)=4x+y$ - 1-й порядок однородности:

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=4\lambda x+\lambda y=\lambda\left(4x+y\right)=\lambda f\left(x,y\right).$$

2) $f\left(x,y\right)=x^2+4xy+5y^2$ - 2-й порядок однородности:

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^2 f\left(x,y\right).$$

3) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+7xy}$ - нулевой порядок однородности (просто однородная функция):

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^0 f\left(x,y\right)=f\left(x,y\right).$$

Пример приведения функции:

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-y^2}{xy+y^2}=\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Введем вспомогательную функцию $t(x) = \frac{y}{x}$ или $y = tx$ Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - однородная функция нулевого измерения, можно преобразовать к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, $y' = t'x + t$.

Тогда $t'x + t = \varphi(t)$, $t'x = \varphi(t) - t$, $\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| + C.$$

Вычислив интеграл, и перейдя от t к $y = tx$, получим $F(x, y) = \ln|x| + C$. Предполагается, что $\varphi(t) - t \neq 0$.

Если $\varphi(t) - t \equiv 0$, то $t' = 0 \Rightarrow t = C \Rightarrow \frac{y}{x} = C \Rightarrow y = Cx$.

Пример: $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

Решение. $y = tx$, $t'x + t = \frac{t - t^2}{1 - 2t}$,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{t - t^2}{1 - 2t} - t \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{t^2}{1 - 2t}.$$

Тогда $\frac{1-2t}{t^2}dt = \frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим

$\frac{1}{t} + 2\ln|t| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ или $\ln\left(e^{\frac{1}{t}}t^2\right) = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

Окончательно $t^2 e^{\frac{1}{t}} = \frac{C}{x}$ или $\frac{y^2}{x}e^{\frac{x}{y}} = C$.

17.1.5. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right).$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $aB - bA \neq 0,$ производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x - x_0, \\ \overline{y} = y - y_0, \end{cases}$$

где x_0, y_0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ Ax+By+C=0, \end{cases} \quad x_0 = -\frac{cB-bC}{aB-bA}, \; y_0 = -\frac{aC-cA}{aB-bA}.$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению.

2) Если $aB - bA = 0,$ производят замену переменных

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = ax+by. \end{cases}$$

В результате дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

17.1.6. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернули

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, т.е. линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y', называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением.

Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: *метод Лагранжа* и *метод Бернулли.*

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

$y' + p(x)y = q(x)$. Рассмотрим *однородное* дифференциальное уравнение $y' + p(x)y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Пусть общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией $C = C(x)$, подлежащей определению, т.е. $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Найдем производную $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$ и подставим в исходное неоднородное уравнение y и y'.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) +$$

$$+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x),\ \ C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx},$

$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1.$ Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1\right).$

Метод Бернулли (метод замены переменной)

$y'+p(x)y=q(x).$

Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y=uv,\ \ y'=u'v+uv'.$ Подставим в исходное уравнение y и $y'.$ Получим

$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$ или $u'v+u\big(v'+p(x)v\big)=q(x).$

Потребуем, чтобы функция v была такой, что выражение $\big(v'+p(x)v\big)$ тождественно равнялось нулю. Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными: $v'+p(x)v=0$ и $u'v=q(x).$ Решим их последовательно.

1) $v'+p(x)v=0,\ \ \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx,\ \ \ln|v|=-\int p(x)dx,$

$$v=e^{-\int p(x)dx}.$$

2) $u'v=q(x),\ \ u'e^{-\int p(x)dx}=q(x),\ \ du=q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$

$$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C,$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right).$$

Уравнение Бернулли

$$y'+p(x)y=q(x)y^m,\ m\neq 0,\ m\neq 1.$$

Пример: 1) Метод Лагранжа.

$$3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3.$$

Решаем однородное уравнение

$$xy'+y=0,\ x\frac{dy}{dx}=-y,\ \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+\ln C,\ \ln|y|=-\ln|x|+\ln C,\ y=\frac{C}{x}.$$

Для исходного уравнения варьируем C:

$$y=\frac{C(x)}{x},\ y'=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}.$$

$$3\left(x\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}\right)=x\frac{C^2(x)}{x^2},\ 3C'(x)=\frac{C^2(x)}{x},$$

$$3\int\frac{dC(x)}{C^2(x)}=\int\frac{dx}{x}+\ln C_1,\ -3\frac{1}{C(x)}=\ln|C_1x|.$$

Тогда $y=-\dfrac{3}{x\ln|C_1x|},\ 3=-\dfrac{3}{\ln|C_1|},\ \ln|C_1|=-1,$

$$C_1=e^{-1},\ y=-\frac{3}{x(\ln|x|-1)}.$$

2) Метод Бернулли. $3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3.$

$$y = uv,\ \ y' = u'v + uv'.$$

$$3xu'v + 3xuv' + 3uv = xu^2v^2,\ 3xu'v + 3u\left(xv' + v\right) = xu^2v^2.$$

а) $xv' + v = 0,\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln|v| = -\ln|x|,\ v = \frac{1}{x}.$

б) $3xu'v = xu^2v^2,\ 3xu'\frac{1}{x} = xu^2\frac{1}{x^2},\ \ 3u' = \frac{u^2}{x},$

$3\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C,\ -3\frac{1}{u} = \ln|Cx|,\ \ u = -\frac{3}{\ln|Cx|}.$

$$y = -\frac{3}{x\ln|Cx|},\ 3 = -\frac{3}{\ln|C|},\ \ln|C| = -1,$$

$$C = e^{-1},\ y = -\frac{3}{x\left(\ln|x| - 1\right)}.$$

17.1.7 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Если левая часть уравнения $P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции $u\left(x,y\right),$ то это уравнение называется *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*.

Это выполняется, если $P\left(x,y\right),\ Q\left(x,y\right)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда $\qquad P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = du\left(x,y\right),$

$$du(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y)=C,$$

При этом $u=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=C$

или $u=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C$,

где (x_0,y_0) принадлежат области определения P и Q.

Примеры: 1) $\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cos y\right)dy=0.$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),$$

$$u=\int\left(e^x+y+\sin y\right)dx+C(y)=e^x+xy+x\sin y+C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y)=Q(x,y)=x+x\cos y+e^y,$$

$$C'(y)=e^y,\ C(y)=e^y,\quad e^x+xy+x\sin y+e^y=C_1.$$

2) $(x+y-1)dx+\left(e^y+x\right)dy=0.\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=C.$$

Положим $x_0 = y_0 = 0$. $\int\limits_0^x (x+y-1)\,dx + \int\limits_0^y e^y dy = C,$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2} + yx - x\right)\right|_0^x + \left.e^y\right|_0^x = C, \quad \frac{x^2}{2} + yx - x + e^y - 1 = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + yx - x + e^y = C.$$

Интегрирующий множитель

Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вводят интегрирующий множитель

$\mu = \mu(x, y)$ такой, что $\dfrac{\partial \mu P}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu Q}{\partial x}$.

1) Если $\mu = \mu(x)$, то $\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx}$.

2) Если $\mu = \mu(y)$, то $\mu = e^{-\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{P} dy}$.

Замечание. Случаи 1) и 2) реализуются, если подынтегральное выражение в 1) и 2) зависят только от x для 1) или только от y для 2).

Пример: $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q}=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}=1,$$

$$\mu=e^{\int\frac{\left(\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x\right)}{Q}dx}=e^{\int dx}=e^{x}.$$

Умножим исходное уравнение на множитель $\mu=e^{x}$.

$$e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0.$$

$$P_1=e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right),\ \ Q_1=e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right),$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=e^{x}\left(x\cos y+\cos y-y\sin y\right),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}=e^{x}\left(x\cos y-y\sin x\right)+e^{x}\cos y\ ,\ \frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Значит, полученное уравнение, есть уравнение в полных дифференциалах. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right),$$

$$u=\int e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+C\left(x\right)=$$

$$=xe^{x}\sin y+ye^{x}\cos y-e^{x}\sin y+C\left(x\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\sin y+xe^{x}\sin y+e^{x}y\cos y-e^{x}\sin y+C'\left(x\right)=$$

$$=e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right),\qquad C'\left(x\right)=0,\ C=\text{const}.$$

$$u=xe^{x}\sin y+ye^{x}\cos y-e^{x}\sin y=C.$$

17.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

17.2.1 Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение. Уравнения вида $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'', имеет вид

$$y'' = f\left(x, y, y'\right).$$

Пример: $y'' = x.$

Решение. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма. Дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$, содержащей две произвольные постоянные. Это множество решений называется *общим решением*.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пример: $y'' = x, \;\; y\big|_{x=2} = 2, \; y'\big|_{x=2} = 3.$

Решение. Это задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1,\ y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Используем начальные условия

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \quad C_1 = 1,\ C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

Геометрический смысл начальных условий:

Помимо точки (x_0, y_0), задаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке x_0 численно равный $y'(x_0)$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Если функция $f(x, y, y')$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений (x_0, y_0, y'_0), то дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2,\ y'\big|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение. Если задать начальные условия при $x_0 = 0,$ то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть уравнения имеет особенность.

Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают <u>граничные условия</u> (краевые условия) $y\big|_{x=x_1} = y_1,\ y\big|_{x=x_2} = y_2$ (сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.). В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений. Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример: $y'' = x,\ \ y\big|_{x=1} = 0,\ y\big|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,\ \ \frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0,\ \ \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6},\ C_2 = 1.\ \ y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

17.2.2. Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right).$$

1) Правая часть не содержит y и y'. $\quad y'' = f\left(x\right).$

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1, \quad y = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит y явно. $\quad y'' = f(x, y').$

Замена $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'.$ $\quad z' = f(x, z).$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка, решение которого $z = \varphi(x, C_1)$. Тогда $y' = z,$

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

Пример: $y'' + \dfrac{y'}{x} = x.$

Решение. Введем новую переменную $y' = z(x),$

$z' + \dfrac{z}{x} = x$ - линейное дифференциальное уравнение; его

решение $z = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x}.$

Тогда $y' = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x},$ $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$

3) Правая часть не содержит x явно. $\quad y'' = f(y, y').$

Замена $\dfrac{dy}{dx} = z(y) \Rightarrow y''_{xx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = z'_y z.$ $\quad zz'_y = f(y, z).$

Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1), \quad \int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = x + C_2.$$

Пример: $2yy'' + y'^2 = 0.$

Решение. $y'_x = z(y)$, $y''_{xx} = z'_y z$. $2yz'_y z = -z^2$,

1) $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dy}{2y}$, $\ln|z| = -\dfrac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|$,

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}},\ (y>0).\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},\quad \frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1 x + C_2;$$

2) $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$.

17.2.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

…………………………………

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

$$f_n(x) = \int\int\ldots\int f(x)\,dx^n.$$

$$y = f_n(x) + \tilde{C}_1 x^{n-1} + \ldots + \tilde{C}_{n-1}x + \tilde{C}_n.$$

Пример: $y'' = xe^{-x}$.

Решение. $y' = \int xe^{-x}dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$,

$$y = \int\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right)dx + C_2 = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

2) Уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$ не содержит явно $y,\ y', ..., y^{(k-1)}$. Подстановка $y^{(k)} = z(x)$ понижает порядок уравнения на k: $F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0.$

3) Уравнения вида $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ не содержит явно x. Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1:

$$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dz}{dy}y'\frac{dz}{dy} + z\frac{d^2z}{dy^2}y' = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right] \text{ и т. д.}$$

17.2.4 Дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной $y^{(n)}$ имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема о существовании и единственности решения

Если функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ и ее производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в окрестности значений $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, то дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ в достаточно малом интервале $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

17.3. Линейные дифференциальные уравнения

17.3.1. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка называется дифференциальное уравнение 1-й степени относительно неизвестной функции y и ее производных

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x).$$

Функция $f(x)$ называется правой частью дифференциального уравнения. Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение называется *однородным*, в противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Если $\forall x \in (a,b)$ $f(x),\ a_1(x),\ a_2(x)$ непрерывны, то $\forall\ \left(y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \right)$ $x_0 \in (a,b)$ существует единственное решение $y = y(x),$ удовлетворяющее заданным начальным условиям.

17.3.2. Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0.$$

Считаем, что $a_1(x),\ a_2(x)$ непрерывны на $(a,b).$ Тривиальное решение $y \equiv 0.$

Теорема 1. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0\,, \qquad (*)$$

то их линейная комбинация $y = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ также является решением уравнения (*) для любых $C_1,\ C_2$.

Теорема 2. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$$

и $\frac{y_2}{y_1} \neq const$ (т.е. $y_1(x)$, $y_2(x)$ - линейно

независимы), то $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ общее решение дифференциального уравнения.

17.3.3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Теорема. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x).$$

есть сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

17.3.4. Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = e^{rx}$, где $r = \alpha + \beta i$ - действительное $(\beta = 0)$ или комплексное число. Тогда

$$y' = re^{rx}, \ y'' = r^2 e^{rx}.$$

Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение

$$e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0, \ e^{rx} \neq 0.$$

Получили *характеристическое уравнение*

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 .$$

Корни характеристического уравнения равны r_1, r_2.

Рассмотрим 3 варианта решения этого уравнения.

1) $r_1 \neq r_2$ действительные числа.

Получили два решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = e^{r_2 x}. \; \frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x} \neq \text{const}.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2$ - произвольные постоянные.

Пример. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -5.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - r - 2 = 0$.

$$r_1 = 2, \; r_2 = -1. \; y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5. \end{cases} \; C_1 = -1, \; C_2 = 3. \; y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) $r_1 = r_2$ действительное число. $y_1 = e^{r_1 x}$.

Покажем, что $y_2 = xe^{r_1 x}$.

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}, \quad y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

Подставим в левую часть уравнения $y_2, \; y_2', \; y_2''$:

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + a_1 \left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x} \right) + a_2 x e^{r_1 x} =$$

$$= e^{r_1 x} \left[x \left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 \right) + \left(2r_1 + a_1 \right) \right] = e^{r_1 x} \left(2r_1 + a_1 \right).$$

По теореме Виета $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a_1$, т.е. $\left(2r_1 + a_1 \right) = 0.$

Следовательно $y = \left(C_1 + C_2 x \right) e^{r_1 x}$.

Пример: $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Решение. $r^2 - 6r + 9 = 0, \; r_1 = r_2 = 3. \; y = \left(C_1 + C_2 x \right) e^{3x}.$

3) $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \; \beta \neq 0. \; y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}.$

Если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u(x) + iv(x)$, то каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является действительным решением уравнения.

По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$u = e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\ v = e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

Тогда $$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Пример. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Решение. $r^2 - 4r + 13 = 0,\ r_{1,2} = 2 \pm 3i$,

$$y = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$$

17.3.5. Неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = y_{oo} + u_{чн}$, где y_{oo} - общее решение однородного уравнения, $u_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения или

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_{÷í}\,.$$

Найдем $u_{чн}$. Рассмотрим частные случаи.

I) Правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{px}$, где $P_n(x)$ - многочлен n -й степени. Решение $u_{чн} = x^k Q_n(x)e^{px}$, где: $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$,

k - кратность показателя p среди корней характеристического уравнения (если такого корня нет, то $k=0$).

Коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим методом неопределенных коэффициентов.

Примеры: 1) $y''-2y'+y=x+1,\ y\big|_{x=0}=2,\ y'\big|_{x=0}=-3.$

Решение. $y=y_{oo}+u_{чн}.$

а) Находим y_{oo}. $y''-2y'+y=0,\ r^2-2r+1=0.$

$r_{1,2}=1,\ \alpha=1,\ \beta=0,$ кратность корня $s=2.$

$y_{oo}=(C_1+C_2x)e^x.$

б) Ищем $u_{чн}$. Показатель правой части $p=0$. Поэтому $k=0,$ т.к. среди корней характеристического уравнения нет такого корня. В правой части уравнения стоит

$$P_1(x)=x+1.$$

Поэтому $u_{чн}=Q_1(x)=A+Bx,\ u'_{чн}=B,\ u''_{чн}=0.$

Подставим в дифференциальное уравнение

$-2B+A+Bx=x+1.$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \begin{cases}-2B+A=1,\\ B=1.\end{cases} \\ x^1 & \end{array} \qquad A=3. \qquad u_{чн}=3+x.$$

$y=(C_1+C_2x)e^x+3+x,\ y'=C_2e^x+(C_1+C_2x)e^x+1.$

Из начальных условий имеем

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_2 + C_1 + 1. \end{cases} \quad C_1 = -1, \; C_2 = -3.$$

$$y = -(1+3x)e^x + 3 + x.$$

2) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Решение $\quad y = y_{oo} + u_{чн}$.

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $r^2 - 4r + 3 = 0$.

$r_1 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $s = 1$. $r_2 = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $s = 1$.

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

б) Правая часть имеет вид $f(x) = P_0 e^{px} = 3e^{2x}$.

Показатель правой части $p = 2$, $\quad k = 0$.

$$u_{чн} = Q_0 e^{px} A e^{2x}, \; u'_{чн} = 2Ae^{2x}, \; u''_{чн} = 4Ae^{2x}.$$

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x}, \quad A = -3.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3) $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение. $y = y_{oo} + u_{чн}$.

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $r^2 - 4r + 3 = 0$.

$r_1 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $s = 1$. $r_2 = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $s = 1$.

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

б) Показатель правой части: $p = 1$, $\quad k = 1$.

$$u_{чн} = x(Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$

$$u'_{чн} = (2Ax+B)e^x + \left(Ax^2+Bx\right)e^x,$$

$$u''_{чн} = 2Ae^x + 2(2Ax+B)e^x + \left(Ax^2+Bx\right)e^x.$$

$$2Ae^x + 2(2Ax+B)e^x + \left(Ax^2+Bx\right)e^x - 4\left((2Ax+B)e^x +\right.$$

$$\left.+\left(Ax^2+Bx\right)e^x\right) + 3\left(Ax^2+Bx\right)e^x = e^x(-4Ax+2A-2B) =$$

$$= xe^x.$$

$$\begin{array}{c|} x^0 \\ x^1 \end{array} \begin{cases} 2A-2B=0, \\ -4A=1. \end{cases} \qquad A=-\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4}.$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}\left(x^2+x\right)e^x.$$

II) Правая часть имеет вид $f(x) = a\cos qx + b\sin qx.$

а) Если iq не является корнем характеристического уравнения, то

$$u_{чн} = A\cos qx + B\sin qx.$$

б) Если iq является корнем характеристического уравнения, то

$$u_{чн} = x(A\cos qx + B\sin qx).$$

Примеры: 1) $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x.$

Решение. $y = y_{оо} + u_{чн}.$

а) $y'' + 4y' + 13y = 0,\ r^2 + 4r + 13 = 0.$

$$r_{1,2} = -2 \pm 3i,\ \alpha = -2,\ \beta = 3,\ s = 1.$$

$$y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

б) Показатель правой части:

$q = 2, \quad k = 0 \ \left(2i \neq -2 \pm 3i\right).$

$$u_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x, \ u'_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$u''_{чн} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \ .$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) +$$

$$+13\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = 5\sin x \ .$$

$$\begin{array}{l|} \sin 2x \\ \cos 2x \end{array} \begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0. \end{cases} \qquad A = -\frac{8}{29}, \ B = \frac{9}{29}.$$

$$u_{чн} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

2) $y'' + \omega^2 y = a\sin qx. \quad y = y_{oo} + u_{чн}.$

$$y'' + \omega^2 y = 0, \ r^2 + \omega^2 = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm\omega i, \ \alpha = 0, \ \beta = \omega, \ s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

а) $q \neq \omega.$

Показатель правой части $q, \quad k = 0 \ \left(iq \neq \pm\omega i\right).$

$$u_{чн} = A\cos qx + B\sin qx, \ u'_{чн} = -qA\sin qx + qB\cos qx,$$

$$u''_{чн} = -q^2 A\cos qx - q^2 B\sin qx \ .$$

$$-q^2 A\cos qx - q^2 B\sin qx + \omega^2\left(A\cos qx + B\sin qx\right) = a\sin qx.$$

$$\begin{array}{l|} \cos qx \\ \sin qx \end{array} \begin{cases} \left(\omega^2 - q^2\right)A = 0, \\ \left(\omega^2 - q^2\right)B = a. \end{cases} \qquad A = 0,\ \ B = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)}.$$

$$u_{чн} = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)}\sin qx.$$

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x + \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2\right)}\sin qx.$$

б) $q = \omega$. Показатель правой части q, $\quad k = 1\ \left(iq = \omega i\right)$.

$u_{чн} = x\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)$,

$u''_{чн} = 2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)$.

$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) +$

$+x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) = a\sin\omega x$,

$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) = a\sin\omega x.$

$$\begin{array}{l|} \sin\omega x \\ \cos\omega x \end{array} \begin{cases} -2\omega A = a, & A = -\dfrac{a}{2\omega}, \\ 2\omega B = 0. & B = 0. \end{cases} \qquad u_{чн} = -\frac{a}{2\omega}\cos\omega x.$$

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x - \frac{a}{2\omega}x\cos\omega x.$$

III) Правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{px}\left(P_1(x)\cos qx + P_2(x)\sin qx\right),$$

где $P_1(x), P_2(x)$ - многочлены степени n, m соответственно. $l = \max(n, m)$. Возможны два случая.

а) $p + qi$ - не есть корень характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$u_{чн} = e^{px}\left(R_1(x)\cos qx + R_2(x)\sin qx\right)$, где

$R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени l.

б) $p + qi$ - есть корень характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид $u_{чн} = xe^{px}\left(R_1(x)\cos qx + R_2(x)\sin qx\right)$, где

$R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени l.

Случай (I) получается, если $q = 0$, случай (II) получается, если $p = 0$. Степени одного из многочленов $R_1(x), R_2(x)$ могут получиться меньше l.

Пример: $y'' + y = 4x\sin x$.

Решение. $y = y_{оо} + u_{чн}$. $y'' + y = 0$, $r^2 + 1 = 0$.

$r_{1,2} = \pm i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $s = 1$. $y_{оо} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Показатель правой части: $p + iq = 0 + i$, $k = 1$.

$u_{чн} = x\left((Ax + B)\cos\omega x + (Cx + D)\sin\omega x\right)$,

$$u''_{чн}=\left(-Ax^2+(4C-B)x+(2A+2D)\right)\cos x+$$
$$+\left(-Cx^2-(4A+D)x+(2C-2B)\right)\sin x\,.$$
$$\left(-Ax^2+(4C-B)x+(2A+2D)\right)\cos x+$$
$$+\left(-Cx^2-(4A+D)x+(2C-2B)\right)\sin x+$$
$$+x\left((Ax+B)\cos\omega x+(Cx+D)\sin\omega x\right)=4x\sin x,$$
$$\left(2Cx+(A+D)\right)\cos x+\left(-2Ax+(C-B)\right)\sin x=2x\sin x.$$
$$2C=0,\ A+D=0,\ -2A=2,\ C=B=0.$$
$$A=-1,\ B=0,\ C=0,\ D=1.\qquad u_{чн}=x(\sin x-x\cos x).$$
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(\sin x-x\cos x).$$

Теорема. Пусть правая часть дифференциального уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$. равна сумме двух функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Пусть $u_{чн1}$ - частное решение при $f_1(x)$, $u_{чн2}$ - частное решение при $f_2(x)$. Тогда $u_{чн}=u_{чн1}+u_{чн2}$.

17.3.6. Метод вариации произвольных постоянных

Дано линейное дифференциальное уравнение

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \qquad (*)$$

$$y=y_{oo}+u_{чн}.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2.$$

Будем искать частное неоднородного решение уравнения в виде $u_{чн}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2.$ Далее везде примем обозначение $C_1(x)=C_1,\ C_2(x)=C_2.$

$$u'_{чн}=C'_1y_1+C'_2y_2+C_1y'_1+C_2y'_2.$$

Т.к. определению подлежат две функции $C_1(x),\ C_2(x),$ то одним соотношением между ними распорядимся произвольно. Наиболее целесообразно подчинить $C_1,\ C_2$ условию $C'_1y_1+C'_2y_2=0.$ Тогда $u'_{чн}=C_1y'_1+C_2y'_2,\ u''_{чн}=C'_1y'_1+C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2.$ Подставим $u_{чн},u'_{чн},u''_{чн}$ в неоднородное уравнение (*)

$$C'_1y'_1+C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2+a_1C_1y'_1+a_1C_2y'_2+a_2C_1y_1+$$

$$+a_2C_2y_2=C'_1y'_1+C'_2y'_2+C_1\left(y_1''+a_1y'_1+a_2y_1\right)+$$

$$+C_2\left(y''_2+a_1y'_2+a_2y_2\right)=f(x)\Rightarrow$$

$$C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x).$$

Получили систему дифференциальных уравнений для определения

$$C_1(x),\ C_2(x).\ \begin{cases}C'_1y_1+C'_2y_2=0,\\ C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x),\end{cases}\quad \begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Пример: $y''+y=\operatorname{tg}x.$

Решение. $y=y_{oo}+u_{чн}.\ \ y''+y=0,\ r^2+1=0.$

$$r_{1,2}=\pm i,\ \alpha=0,\ \beta=1,\ s=1.\ \ y_{oo}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

$$y_1=\cos x,\ y_2=\sin x.$$

$$u_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \operatorname{tg} x, \end{cases} \Rightarrow \quad C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \; C_2' = \sin x.$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)dx =$$

$$= \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right), \quad C_2 = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)\cos x -$$

$$-\cos x \sin x, \quad y = C_1\cos x + C_2\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos x.$$

17.3.7 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Выше изложенное в пп. 17.3.2-17.3.6 переносится на дифференциальные уравнения порядка $n > 2$:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Сначала рассмотрим *однородное* уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Линейно независимые системы функций.

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$. Линейной комбинацией их будет

$C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,\ldots,C_n$ - постоянные.

Определение. Система функций $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ называется *линейно независимой*, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, т.е. ни для какого i $(i=1,...,n)$ не может выполняться равенство

$$\varphi_i(x)=C_1\varphi_1(x)+...C_{i-1}\varphi_{i-1}(x)+C_{i+1}\varphi_{i+1}(x)+...+C_n\varphi_n(x).$$

В частности $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ линейно независимы, если

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\neq const.$$

Если $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

Пример:

$$\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ \varphi_3(x)=x^3,\ \ \varphi_4(x)=2x-x^2.$$

$\varphi_4(x)=2\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, т. е. $\varphi_1,...,\varphi_4$ - линейно зависимы.

Теорема. Если $y_1,...,y_n$ суть n частных линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения, то общим решением этого уравнения будет

$$y=C_1y_1+...+C_ny_n.$$

Если $y_1,...,y_n$ - линейно зависимые решения, то, по крайней мере, одно из них выразится через остальные $(n-1)$ и функция y будет зависеть не от n, а от $(n-1)$ произвольных постоянных. Она не даст общего решения дифференциального уравнения.

Условием линейной независимости частных решений дифференциального уравнения является отличие от нуля *вронскиана* функций $y_1, y_2, ..., y_n$

$$W\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если заданы начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

то, для получения из общего решения $y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n$ частного решения, надо решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + ... + C_n y_{n0} = y_0, \\ ...., \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

n линейно независимых решений дифференциального уравнения n - го порядка образуют *фундаментальную систему решений*.

Общее решение *неоднородного* дифференциального уравнения $y = y_{oo} + u_{чн}$.

Теорема. Если $y_1, ..., y_n$ - фундаментальная система решений дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0,$$

то решением дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x)$$

является функция $C_1(x) y_1 + ... + C_n(x) y_n$, где

$C_1(x),...,C_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + ... + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + ... + C_n' y_n' = 0, \\ ...., \\ C_1' y_1^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Определитель системы есть определитель Вронского (вронскиан).

17.3.8 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

А) Однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ (a_i = \text{const},\ i = 1,...,n).$$

Характеристическое уравнение

$$r^n + a_1 r^{(n-1)} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

1) Каждому действительному корню r кратности s соответствует s линейно независимых решений

$$e^{rx},\ xe^{rx},...,x^{s-1}e^{rx}.$$

2) Каждой паре комплексно сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s соответствует $2s$ линейно независимых решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,...,x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,...,x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Порядок дифференциального уравнения есть n, поэтому линейно независимых решений будет n.

Пример: $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

Решение. $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0.$

$r_1=-1,\ r^4+2r^2+1=0.$

$r_1=-1, \alpha=-1,\ \beta=0,\ s=1.$

$r_{2,3,4,5}=\pm i,\ \alpha=0,\ \beta=1,\ s=2.$

$y=C_1e^{-x}+\left(C_2+C_3x\right)\cos x+\left(C_4+C_5x\right)\sin x.$

Б) Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f\left(x\right),$ где

$f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left(P_1\left(x\right)\cos\beta x+P_2\left(x\right)\sin\beta x\right)$ - правая часть специального вида, $P_1\left(x\right)$ - многочлен степени $m,\ \ P_2\left(x\right)$ - многочлен степени $n.$

Частное решение имеет вид

$u_{чн}=x^ke^{\alpha x}\left(R_1\left(x\right)\cos\beta x+R_2\left(x\right)\sin\beta x\right),$ где

$R_1\left(x\right), R_2\left(x\right)$ - многочлены степени $l=\max\left(m,n\right),\ \ k$ - кратность $r=\alpha+\beta i$ среди корней характеристического уравнения. Неопределенные коэффициенты многочленов $R_1\left(x\right), R_2\left(x\right)$ ищем способами , аналогичными рассмотренным для уравнения 2-го порядка (см. п.17.3.5).

17.4. Системы дифференциальных уравнений

17.4.1. Общие определения. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса. Далее t -

независимая переменная; $x_1(t),...,x_n(t)$ (или $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, если функций не больше трех) - неизвестные функции.

Определение. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.

Примеры: 1) $\begin{cases} x' = 2x + y + t + 1, \\ y' = 3x - 4y + 6t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} tx_1'' + 3x_2' - 2x_1x_3 = 0, \\ 2x_2'' + x_3'' - 2tx_1 = 0, \\ x_3' + 2x_1 + tx_2 = 0. \end{cases}$

Решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций $x_1 = x_1(t),...,x_n = x_n(t)$, которая при подстановке в уравнения превращает их в тождества.

Определение. *Нормальной* системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида $\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1,...,x_n), \\ .... \\ x_n' = f_n(t, x_1,...,x_n). \end{cases}$

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

Пример: $\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(3x - 2y + 2t), \\ y' = \dfrac{1}{5}(x + y - t). \end{cases}$

Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе. Их рассматривать не будем.

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

Пример. $\begin{cases} x_1'' + tx_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$ Введем дополнительные функции $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -tx_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$

Одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пример: $x''' = f\left(t, x, x', x''\right)$. $y = x'$, $z = y' = x''$.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f\left(t, x, y, z\right). \end{cases}$$

Нормальная система дифференциальных уравнений, обычно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

Пример: $\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases}$

$$x'' = y' = z,\ x''' = z' = x - y + z,\ \Rightarrow\ x''' = x - x' + x''.$$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = \left(r^2 + 1\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

$r_{1,2} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1.\ \ r_3 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$

$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$

$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,\ \ z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$

Обратный случай, когда система дифференциальных уравнений не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

Пример: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение не зависит от остальных. Поэтому имеем два уравнения $x' = x,\ y'' = z' = y.$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t},\ z = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t},\ x = C_3 e^t.$$

Теорема. Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

имеет вид $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, ..., C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, ..., C_n), \end{cases}$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные.

$C_1, ..., C_n$ могут входить не во все решения.

Задание начальных условий

$x_1\big|_{t=t_0} = x_{10}, ...,\ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$ дает частное решение системы дифференциальных уравнений, при этом

$C_i \ \left(i=1,...,n\right)$ находятся из условий

$$\begin{cases}\varphi_1\left(t_0,C_1,...,C_n\right)=x_{10},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \varphi_n\left(t_0,C_1,...,C_n\right)=x_{n0}.\end{cases}$$

Теорема. Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений t_0, x_{10}, $x_{20},...,$ x_{n0}, то в достаточно малом интервале $\left(t_0-h,t_0+h\right)$ существует единственная система функций $x_1\left(t\right),...,x_n\left(t\right)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.

17.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений

А) *Однородная* система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}\left(t\right)x_1+...+a_{1n}\left(t\right)x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ x_n'=a_{n1}\left(t\right)x_1+...+a_{nn}\left(t\right)x_n.\end{cases}$$

1) Если известно частное решение $x_{11}\left(t\right),...,x_{n1}\left(t\right)$ системы линейных дифференциальных уравнений, то $C_1x_{11}\left(t\right),...,C_1x_{n1}\left(t\right)$ тоже является решением системы, где C_1 - произвольная постоянная.

2) Если известны два частных решения системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}\left(t\right),...,x_{n1}\left(t\right)$ и $x_{12}\left(t\right),...,x_{n2}\left(t\right)$, то

$x_{11}(t)+x_{12}(t),...,x_{n1}(t)+x_{n2}(t)$ тоже является решением системы.
3) Если известны n частных линейно независимых решений системы $x_{11}(t),...,x_{n1}(t);\ \ldots;$ $x_{1n}(t),...,x_{nn}(t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + ... + C_n x_{1n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = C_1 x_{n1} + ... + C_n x_{nn} \end{cases}$$

является общим решением однородной системы линейных дифференциальных уравнений**.**

Совокупность линейно независимых решений $x_{11}(t),...,x_{n1}(t);\ \ldots;\ x_{1n}(t),...,x_{nn}(t)$ образует фундаментальную систему решений

Б) Общее решение *неоднородной* системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

При заданных начальных условиях $x_1\big|_{t=t_0} = x_{10},...,x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$ получают частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо подставить начальные условия в общее решение системы. Получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 x_{1,1} + \ldots + C_n x_{1,n} = x_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{n,1} + \ldots + C_n x_{n,n} = x_{n0} \end{cases}.$$

Решая систему, получим частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы система алгебраических уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

17.4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad a_{ij} = const. \qquad (*)$$

Будем искать решения в виде $x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt}$, где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные.

Дифференцируя решения и подставляя в (*), имеем

$$\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11}k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n}k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_n r e^{rt} = a_{n1}k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn}k_n e^{rt}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + \ldots + a_{1n}k_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}k_1 + \ldots + (a_{nn} - r)k_n = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-r) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn}-r) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим характеристическое алгебраическое уравнение n -й степени.

А) Предположим, что корни характеристического уравнения действительные и простые. Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений. Пусть корень характеристического уравнения равен r_1. Тогда из (**)

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-r_1)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33}-r_1)k_3 = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

Определитель системы равен нулю. Если r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений (***) следует из остальных.

Пусть первые два уравнения линейно независимы. Тогда одно из решений будет

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 \\ a_{22}-r_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{22}-r_1 \\ C_2 & a_{12} \end{vmatrix},$$

$$k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11}-r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r_1 \end{vmatrix},$$

где C_1, C_2 произвольные постоянные.

Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную. Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&k_1^{(1)}e^{r_1t},\ k_2^{(1)}e^{r_1t},\ k_3^{(1)}e^{r_1t};\\
&k_1^{(2)}e^{r_2t},\ k_2^{(2)}e^{r_2t},\ k_3^{(2)}e^{r_2t};\\
&k_1^{(3)}e^{r_3t},\ k_2^{(3)}e^{r_3t},\ k_3^{(3)}e^{r_3t}.
\end{aligned}$$

Эти решения линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
x_1 &= C_1k_1^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_1^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_1^{(3)}e^{r_3t},\\
x_2 &= C_1k_2^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_2^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_2^{(3)}e^{r_3t},\\
x_3 &= C_1k_3^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_3^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_3^{(3)}e^{r_3t}.
\end{aligned}$$

Пример: $\begin{cases} x' = z,\\ y' = -4x - y - 4z,\\ z' = -y. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} -rk_1 + k_3 = 0,\\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 = 0,\\ -k_2 - rk_3 = 0. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1\\ -4 & -(1+r) & -4\\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = \left(4 - r^2\right)(r+1) = 0.$$

$r_1 = -1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 2.$

Возьмем 1-е и 3-е уравнения.

$$r_1 = -1,\ \begin{cases} k_1^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \\ -k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \end{cases}\ k_1^{(1)} = 1,\ k_2^{(1)} = -1,\ k_3^{(1)} = -1.$$

$$x_1 = e^{-t},\ y_1 = -e^{-t},\ z_1 = -e^{-t}.$$

$$r_2 = -2,\ \begin{cases} 2k_1^{(2)} + k_3^{(2)} = 0, \\ -k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases}\ k_1^{(2)} = 1,\ k_2^{(2)} = -4,\ k_3^{(2)} = -2.$$

$$x_2 = e^{-2t},\ y_2 = -4e^{-2t},\ z_2 = -2e^{-2t}.$$

$$r_3 = 2,\ \begin{cases} -2k_1^{(3)} + k_3^{(3)} = 0, \\ -k_2^{(3)} - 2k_3^{(3)} = 0, \end{cases}\ k_1^{(3)} = 1,\ k_2^{(3)} = -4,\ k_3^{(3)} = 2.$$

$$x_3 = e^{2t},\ y_3 = -4e^{2t},\ z_3 = 2e^{2t}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{2t}, \\ y = -C_1e^{-t} - 4C_2e^{-2t} - 4C_3e^{2t}, \\ z = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} + 2C_3e^{2t}. \end{cases}$$

Б) Если среди простых корней характеристического уравнения есть комплексно сопряженные, то решение будет в виде комплексных функций действительной переменной. Чтобы перейти к действительной форме, используют следующее: если $x_1 + ix_2,\ y_1 + iy_2,\ z_1 + iz_2$

являются решением, то (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) тоже решения.

Пример: $\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$

Решение. $\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37 = 0.$

$r_{1,2} = -6 \pm i.$

$r_1 = -6 + i,\ (-1-i)k_1 + k_2 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1 + i.$

$$\begin{cases} x = e^{(-6+i)t} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t, \\ y = (1+i)e^{(-6+i)t} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$$

$x_1 = e^{-6t}\cos t,\ y_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$
$x_2 = e^{-6t}\sin t,\ y_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$

$r_2 = -6 - i$ приведет к тем же решениям или линейно зависимым с ними. В итоге общее решение:

$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t),$
$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)).$

Подбор частного решения для системы неоднородных уравнений можно производить сведя систему к одному уравнению высшего порядка и используя методы, изложенные ранее (см. п.17.3.5., 17.3.6, 17.3.8).

17.4.4. Случай кратных корней характеристического уравнения

Для кратных корней решение усложняется. Если для одного уравнения можно сразу написать структуру общего решения, то здесь иначе. Покажем на примерах.

Примеры: 1. $\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 3x + 3y - 2z. \end{cases}$

Решение. $\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 3 & 3 & -2-r \end{vmatrix} = -r\left(r^2 - 2r + 1\right) = 0.$ Из

(**) при $r_1 = 0$ имеем

$r_1 = 0,\ \begin{cases} 2k_1^{(1)} + k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \\ k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} - k_3^{(1)} = 0, \end{cases}\ k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 1,\ k_3^{(1)} = 3.$

$x_1 = C_1,\ y_1 = C_1,\ z_1 = 3C_1.$

Для кратного корня $r_{2,3} = 1$ система уравнений (**)

сводится к одному уравнению $k_1^{(2)} + k_2^{(2)} - k_3^{(2)} = 0.$

Произвольно можно задать две величины

$k_1 = C_2,\ k_2 = C_3,\ k_3 = C_2 + C_3.$

Тогда $x = C_2 e^t,\ y = C_3 e^t,\ z_1 = \left(C_2 + C_3\right) e^t$, т.е.

$x_2 = e^t,\ y_2 = 0,\ z_2 = e^t;$
$x_3 = 0,\ y_3 = e^t,\ z_3 = e^t.$

Получили фундаментальную систему решений, т.к.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ e^t & 0 & e^t \\ o & e^t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0.$$

Общее решение $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t, \\ y = C_1 + C_3 e^t, \\ z = 3C_1 + \left(C_2 + C_3\right) e^t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - y + 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1-r & -1 & 0 \\ 4 & -1-r & 2 \\ 0 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = -\left(1-r^2\right)\left(1+r\right) = 0.$

$r_1 = -1,\ r_{2,3} = 1.$ Из (**) при $r_1 = -1$, имеем

$\begin{cases} 2k_1^{(1)} - k_2^{(1)} = 0, \\ 4k_1^{(1)} + 2k_3^{(1)} = 0, \end{cases}$ $k_1^{(1)} = 1,\ k_2^{(1)} = 2,\ k_3^{(1)} = -2$,

$x_1 = e^{-t},\ y_1 = 2e^{-t},\ z_1 = -2e^{-t}.$ Из (**) при $r_{2,3} = 1$

$\begin{cases} -k_2^{(2)} = 0, \\ 4k_1^{(2)} - 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} = 0, \end{cases}$ $k_1^{(2)} = 1,\ k_2^{(2)} = 0,$

$k_3^{(2)} = -2$, $x_2 = e^t,\ y_2 = 0,\ z_2 = -2e^t.$

Третье решение таким способом получить не удастся. Будем искать решение в виде

$x = \left(\alpha_1 + \beta_1 t\right)e^t,\ y = \left(\alpha_2 + \beta_2 t\right)e^t,\ z = \left(\alpha_3 + \beta_3 t\right)e^t,$

где α_i, β_i определяются методом неопределенных коэффициентов. Продифференцируем x, y, z и подставим в систему дифференциальных уравнений.

После сокращения на e^t, получим

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 t+\beta_1=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2+\beta_2 t,\\ \alpha_2+\beta_2 t+\beta_2=4\left(\alpha_1+\beta_1 t\right)-\alpha_2-\beta_2 t+2\left(\alpha_3+\beta_3 t\right),\\ \alpha_3+\beta_3 t+\beta_3=2\left(\alpha_2+\beta_2 t\right)+\alpha_3+\beta_3 t.\end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$\beta_1+\alpha_2=0,\ -4\alpha_1+2\alpha_2+\beta_2-2\alpha_3=0,\ \beta_3-2\alpha_2=0,$$
$$\beta_2=0,\ -4\beta_1+2\beta_2-2\beta_3=0,\ -2\beta_2=0.$$

Полагая $\alpha_1=C_2,\ \alpha_2=C_3,$ имеем

$\beta_1=-C_3,\ \beta_2=0,\ \beta_3=2C_3,\ \alpha_3=-2C_2+C_3.$ Итак

$$\begin{cases}x=\left(C_2-C_3 t\right)e^t,\\ y=C_3 e^t,\\ z=\left(-2C_2+C_3+2C_3 t\right)e^t.\end{cases}$$

Решение с индексом 2 получается, если $C_2=1,\ C_3=0.$

Если положить $C_2=0,\ C_3=1,$ получим третье

решение $x_3=-te^t,\ y_3=e^t,\ z_3=\left(1+2t\right)e^t.$

Три решения образуют фундаментальную систему решений.

Правило. Если характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений имеет корень r кратности m, то ему отвечает решение, зависящее от m произвольных постоянных

$x_1=P_1\left(t\right)e^{rt},...,x_n=P_n\left(t\right)e^{rt},$ где $x_i=P_i\left(t\right)e^{rt}$ - многочлены степени не выше $m-1$.

17.4.5. Матричная форма записи однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n. \end{cases}$$

Пусть $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X' = AX \tag{1}$$

- матричная запись системы.

Частные решения $$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение $X = C_1X_1 + \ldots + C_nX_n$.

Определение. Система векторных функций X_i называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 X_1(t) + \ldots + \lambda_n X_n(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Это выполняется, если определитель

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

не равен нулю для всякого t.

Для однородной системы с *постоянными коэффициентами* решение ищем в виде:

$$X(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{rt} \\ \cdots \\ \cdots \\ k_ne^{rt} \end{pmatrix}=e^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}. \text{ Тогда } X'(t)=re^{rt}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Подставим $X(t)$ и $X'(t)$ в систему дифференциальных уравнений (1)

$$re^{rt}K=Ae^{rt}K, \text{ где } K=\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

$$rK=AK\Rightarrow(A-rE)K=0, \qquad (2)$$

где E - единичная матрица, r - *собственное число* матрицы A, K - *собственный вектор* матрицы A.

Характеристическое уравнение

$$|A-rK|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{11}-r & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-r \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Из (3) находим собственные числа матрицы (корни характеристического уравнения), а из (2) – собственные векторы.