14 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1 Криволинейный интеграл по длине (1 – го рода)

Дифференциал длины дуги в плоском случае для линии, заданной уравнением $y = y(x)$ равен

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

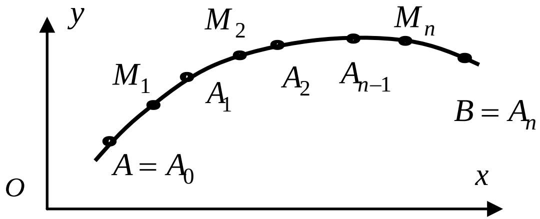
Дифференциал длины дуги в пространственном случае для линии, заданной уравнениями $y = y(x),\ z = z(x)$ равен

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx.$$

При параметрическом задании линии $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ дифференциал длины дуги в плоском случае равен $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$ а в пространственном случае

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Определение. Криволинейным интегралом 1-го рода $\int\limits_K f(x, y)\, ds$ от функции двух переменных $f = f(x, y)$, взятым по отрезку $K = AB$ плоской кривой, называется число, получаемое следующим образом:



1) Дуга AB разбивается на n элементарных дуг произвольно выбранными точками $A_1, ..., A_{n-1}$, идущими от начала дуги $A = A_0$ до конца $B = A_n$.
2) Внутри (или на границе) каждой элементарной дуги $A_{i-1}A_i$ выбирается одна произвольная точка M_i с координатами x_i, y_i.
3) Значения функции $f\left(x_i, y_i\right)$ в этих выбранных точках умножаются на длины дуг $A_{i-1}A_i = \Delta s_i$ (эти длины считаются положительными).
4) Все полученные n произведений $f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i$ складываются.

5) Вычисляется предел суммы $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i$.

Если этот предел существует и не зависит от выбора точек A_i, M_i, то он называется криволинейным интегралом 1-го рода

$$\int\limits_K f\left(x, y\right) ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, взятый по отрезку K пространственной кривой

$$\int_K f(x, y, z)\,ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y)$ или $f(x, y, z)$ непрерывна, а кривая на отрезке K непрерывна и имеет непрерывную касательную, то криволинейный интеграл 1-го рода существует.

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Оно сводится к вычислению определенного интеграла:

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ (для пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), $t \in [t_0, t_1]$, то

$$\int_K f(x, y)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt,$$

$$\int_K f(x, y, z)\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Здесь значение параметра t_0 берется для точки A, значение параметра t_1 берется для точки B. Точки A

и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $t_0 < t_1$.

2) Если уравнение пути интегрирования задано в явном виде $y = y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y = y(x),\ z = z(x)$), то

$$\int\limits_K f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

$$\int\limits_K f(x,y,z)\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b f\left(x, y(x), z(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2+\left(z'(x)\right)^2}\,dx.$$

Здесь значение $x = a$ берется для точки A, значение $x = b$ берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $a < b$.

Приложения криволинейного интеграла 1-го рода

1) Длина криволинейного отрезка $K : L = \int\limits_K ds.$

2) Масса тяжелого неоднородного криволинейного отрезка K переменной плотности $\gamma = \gamma(x,y,z)$:

$$M = \int\limits_K \gamma(x,y,z)\,ds.$$

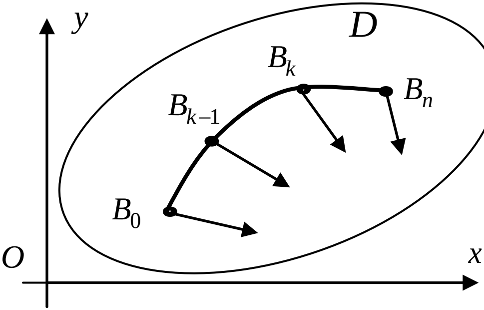
14.2. Криволинейный интеграл по координатам (2 – го рода)

Задача о работе силового поля

Предположим, что в области D задано плоское силовое поле. Тогда на материальную точку в D в поле действует сила $\vec{F}$, определенная для всякой точки $(x,y)\in D,\quad \vec{F}=\vec{F}(x,y).$ Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени t)

$$\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}.$$

Пусть материальная точка движется по линии L.



Вычислим работу по перемещению материальной точки по линии L из B_0 в B_n. Разобьем линию на n частей точками $B_0,\ B_1,...,\ B_n$. Работа на отрезке $\overrightarrow{B_{k-1}B_k}=\Delta x_k\vec{i}+\Delta y_k\vec{j},\ k=1,...,n$ равна $\Delta A_k=\left|\vec{F_k}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_{k-1}B_k}\right|\cos\alpha_k$ или $\Delta A_k=\vec{F_k}\cdot\overrightarrow{B_{k-1}B_k}$. Тогда $\Delta A_k=P(x_k,y_k)\Delta x_k+Q(x_k,y_k)\Delta y_k$. Просуммируем по всем отрезкам $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P(x_k,y_k)\Delta x_k+Q(x_k,y_k)\Delta y_k.$

Выражение в правой части называется интегральной суммой по линии $L.$ Пусть $\Delta s_k = \left|B_{k-1}B_k\right|$ - длина частичного участка разбиения кривой $L.$ Переходя к пределу при $\max \Delta s_k \to 0 \ (n \to \infty),$ получим истинную величину работы

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода по линии L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k =$$

$$= \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

В частности, если $Q(x, y) \equiv 0,$ то интеграл примет вид $\int_L P(x, y)dx$ и называется криволинейным интегралом по координате $x.$

Если $P(x, y) \equiv 0,$ то интеграл примет вид $\int_L Q(x, y)dy$ и называется криволинейным интегралом по координате $y.$

Работа силового поля $\vec{F}$ по кривой L есть $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$ где $P(x, y),\ Q(x, y)$

проекции $\vec{F}$ на оси координат.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода. Оно сводится к вычислению определенных интегралов.

Правило. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от точки B до точки C по линии L: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_B, t_C]$ производится по формуле

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$\int_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

Следовательно, криволинейный интеграл 2-го рода всегда существует, если $P(x,y),\ Q(x,y)$ непрерывны, а $x(t),\ y(t)$ непрерывны со своими производными.

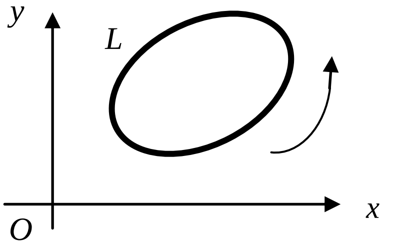
Если уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$, то, полагая $x = t,$ имеем

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{x_B}^{x_C} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\Big)dx.$$

Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.

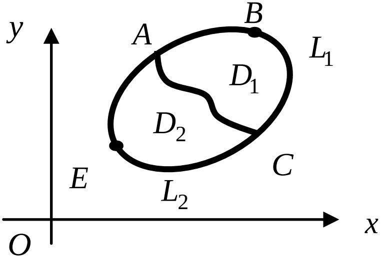
14.3. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру



Рассмотрим замкнутый контур L на плоскости Oxy. Положительным направлением обхода контура будем считать направление против часовой стрелки. Криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру L обозначается $\oint\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$

$$\oint\limits_{-L} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=-\oint\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

Теорема. Если область D, ограниченную замкнутой кривой L, разбить на две части D_1 и D_2, то криволинейный интеграл по всей линии L равен сумме интегралов по линиям L_1 : $CBAC$ и L_2 : $AECA$.



$$D = D_1 + D_2$$

$$L = L_1 + L_2$$

14.4. Формула Грина

Теорема. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области $S,$ ограниченной контуром $L,$ то

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

14.5. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Это означает, что величина работы силового поля по перемещению материальной точки не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек.

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$

непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области $S.$ Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл 2-го рода

$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от линии

интегрирования, лежащей в $S,$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall (x, y) \in S$ выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Равносильные утверждения:

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$ взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области $S,$ равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющих две данные точки.

3) Во всех точках области S $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

14.6. Криволинейные интегралы 2-го рода по пространственным линиям

Работа силового поля

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

по перемещению материальной точки по линии L равна $A = \int\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$

Трехмерная область Ω называется *поверхностно односвязной*, если на любой простой кусочно-гладкий контур, принадлежащий Ω , можно натянуть поверхность, целиком лежащую в Ω .

Примеры.

Односвязная область: шар, эллипсоид.

Не односвязная область: тор.

Теорема. Пусть функции P, Q, R непрерывны вместе со своими производными в поверхностно односвязной области Ω. Тогда равносильны утверждения:

1) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz,$ взятый по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от линии интегрирования.

3) $\forall (x, y, z) \in \Omega$ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}.$

14.7. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \left| dx = ds\cos\alpha, \ dy = ds\cos\beta, \right.$$

$$\left. dz = ds\cos\gamma \right| = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) ds \text{, где}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы контура L.

15. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $F(x, y, z)$ - непрерывная функция и $z = f(x, y)$ - гладкая поверхность S , где $f(x, y)$ задана в некоторой области D плоскости xOy .

Поверхностным интегралом I *рода* называется предел интегральной суммы при условии, что $\max d_k \to 0$:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z) dS,$$

где ΔS_k - площадь k-го элемента поверхности S, точка $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$ принадлежит этому элементу, d_k - диаметр этого элемента, $F(x, y, z)$ определена в каждой точке поверхности S.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой производится интегрирование.

Поверхностный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\iint_S F(x, y, z) dS =$$

$$= \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Рассмотрим двустороннюю поверхность S и выберем на ней определенную сторону S^+. Функция $F(x, y, z)$ определена в точках данной поверхности. Предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \Delta \Pi_k(x, y)$, где $\Delta \Pi_k(x, y)$ - проекция на плоскость xOy k-го элемента поверхности S, имеющего площадь ΔS_k, при условии

$\max d_k \to 0$ называется *поверхностным интегралом* II *рода,* распространенным на выбранную сторону поверхности S, и обозначается символом

$$I = \iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\,\Delta\Pi_k(x,y).$$

Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ - непрерывные функции и S^+ - сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $\vec{n} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, то соответствующий поверхностный интеграл II рода выражается так:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\lambda)\,dS.$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет знак на противоположный.

Если поверхность S задана уравнением в неявном виде $\Phi(x,y,z) = 0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

где знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности.