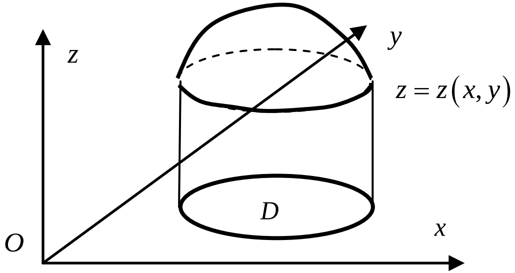
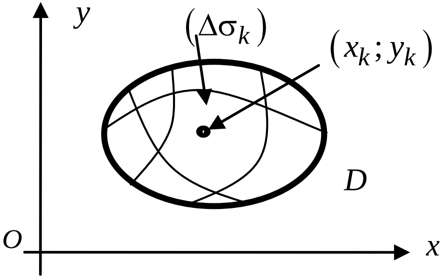
12 ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл



Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью D плоскости Oxy, поверхностью $z = z(x, y)$, где функция $z = z(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей – границей области D. Разобьем область D на n произвольных частичных областей $(\Delta\sigma_k)$ $(k \in (1,...,n))$.



Выберем в каждой из частичных областей произвольную точку с координатами (x_k, y_k). Объем цилиндрического тела между опорной плоскостью Oxy и поверхностью $z = z(x, y)$ над частичной областью $(\Delta\sigma_k)$ площадью $\Delta\sigma_k$ равен $\Delta V_k \approx z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$. Объем всего цилиндрического тела равен

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k .$$

Устремим наибольший диаметр частичных областей $(\Delta\sigma_k)$ к нулю, при этом $\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k) \to 0$, $n \to \infty$ и рассмотрим предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k .$$

Если этот предел существует, то

$$V=\lim_{\substack{\max\operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n} z(x_k,y_k)\Delta\sigma_k .$$

Определение. Двойным интегралом от функции $z=z(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей

$$\lim_{\substack{\max\operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n} z(x_k,y_k)\Delta\sigma_k=\iint_D z(x,y)\,d\sigma .$$

Здесь $z(x,y)d\sigma$ – подынтегральное выражение;

$z(x,y)$ – подынтегральная функция;

$d\sigma$ - элемент площади;

D – область интегрирования.

Таким образом

$$V=\iint_D z(x,y)\,d\sigma .$$

Теорема существования двойного интеграла

Если $z(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D**,** то ее интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел не зависит от способа разбиения области на частичные области $\Delta\sigma_k$ и выбора в них точек (x_k,y_k).

Свойства двойных интегралов

1) $\iint\limits_D \left(z_1(x,y) \pm \ldots \pm z_n(x,y)\right) d\sigma =$

$$= \iint\limits_D z_1(x,y)\, d\sigma \pm \ldots \pm \iint\limits_D z_n(x,y)\, d\sigma .$$

2) $\iint\limits_D cz(x,y)\, d\sigma = c\iint\limits_D z(x,y)\, d\sigma, \quad c = const.$

3) $D = D_1 \bigcup D_2$, $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$. Тогда

$$\iint\limits_D z(x,y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} z(x,y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\, d\sigma .$$

4) Если $\forall (x,y) \in D \quad z_1(x,y) \geq z_2(x,y)$, то

$$\iint\limits_D z_1(x,y)\, d\sigma \geq \iint\limits_D z_2(x,y)\, d\sigma .$$

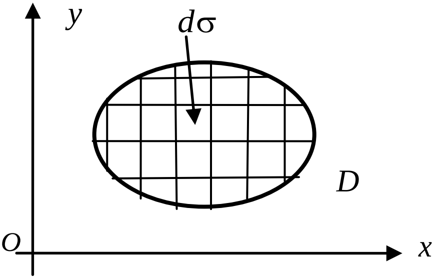
5) Если $m = z_{наим}$ *в* D, $M = z_{наиб}$ *в* D, то

$mS \leq \iint\limits_D z(x,y)\, d\sigma \leq MS$, где $S = \iint\limits_D d\sigma$.

6) $\iint\limits_D z(x,y)\, d\sigma = z(\xi,\eta) S$, $(\xi,\eta) \in D$. $z(\xi,\eta)$ - среднее значение z в области D.

Вычисление двойных интегралов.

Разобьем область D с помощью линий, параллельных осям координат с шагом dx и dy соответственно.

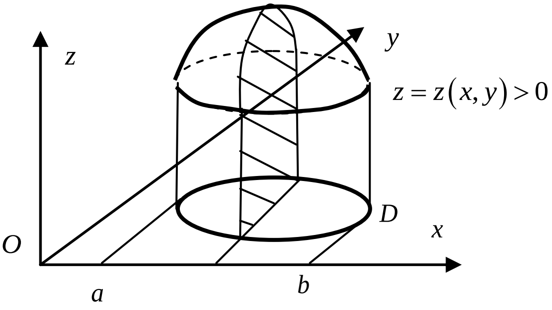


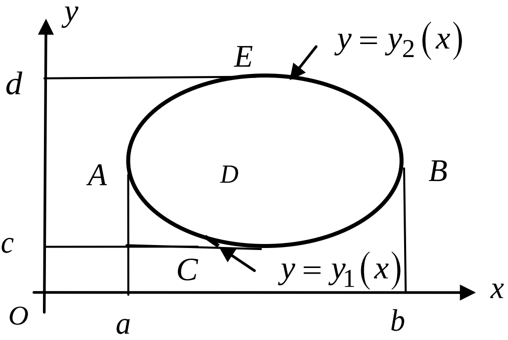
Тогда $d\sigma = dxdy$ и, следовательно,

$$\iint_D z(x,y)\,d\sigma = \iint_D z(x,y)\,dxdy\,.$$

Пусть D - *правильная* в направлении Oy, т.е. всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку D параллельно Oy, пересекает границу D ровно в двух точках. Тогда $D:\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного, т. е. вычисляется сначала внутренний интеграл по y (x предполагается постоянной), а





$$V = \iint\limits_D z(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy \right) dx =$$

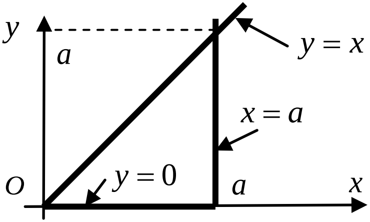
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\,dy\ .$$

Если область D - правильная в направлении Ox, то $D:\{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ и тогда

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx .$$

Правые части формул называются повторными (или двукратными) интегралами. Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному.

Пример:



Область D ограничена линиями $y = x$, $y = 0$, $x = a$, она правильная и в направлении Oy и в направлении Ox. Поэтому

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x z(x,y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a z(x,y)\,dx .$$

12.2 Замена переменных в двойном интеграле

При переходе от переменных x, y к переменным u, v

$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$

двойной интеграл примет вид

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} z\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|\,dudv$$

где J - функциональный определитель Якоби (якобиан).

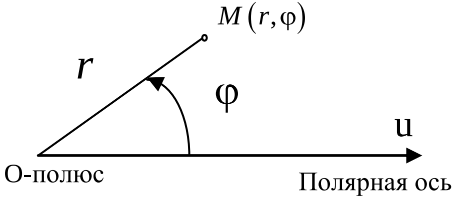
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Итак,

1. область D заменяем на D^*;
2. $d\sigma = |J|\,dudv$ - элемент площади в координатах u, v.

Предполагается, что функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ непрерывны со своими частными производными в D, D^* и устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками D и D^*, за исключением, может быть, отдельных точек.

12.3 Двойной интеграл в полярных координатах



$r(M) = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус.

$\varphi(M)$ - полярный угол.

Положение любой точки определяется заданием r, φ

$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ или $(-\pi < \varphi < 2\pi)$.

Связь декартовых и полярных координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Вычислим якобиан:

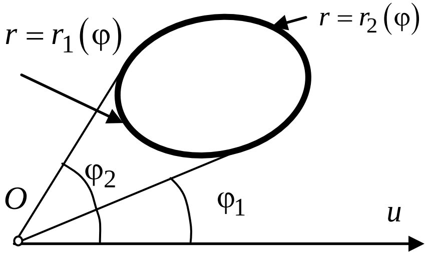
$$J = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D в полярных координатах примет вид:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Элемент площади в полярных координатах вычисляется по формуле $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$.

Пример:

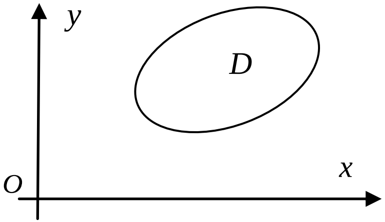


$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r dr .$$

12.4 Приложения двойных интегралов

1) Масса плоской пластинки.

Поверхностная плотность $\mu=\mu\left(x,y\right)$.



Элемент массы равен $dM=\mu\left(x,y\right)d\sigma$.

Масса всей пластинки равна $M=\iint\limits_{D}\mu\left(x,y\right)d\sigma$.

2) Статические моменты инерции и центр тяжести пластинки.

$$M_x=\iint\limits_{D} y\mu\left(x,y\right)d\sigma ,\ M_y=\iint\limits_{D} x\mu\left(x,y\right)d\sigma .$$

$$x_{ц.т.}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_{D} x\mu\left(x,y\right)d\sigma}{\iint\limits_{D}\mu\left(x,y\right)d\sigma},$$

$$y_{ц.т.}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}.$$

3) Моменты инерции пластинки

$$I_x=\iint\limits_D y^2 d\sigma,\quad I_y=\iint\limits_D x^2 d\sigma.$$

Центробежный момент инерции

$$I_{xy}=\iint\limits_D xy\,d\sigma.$$

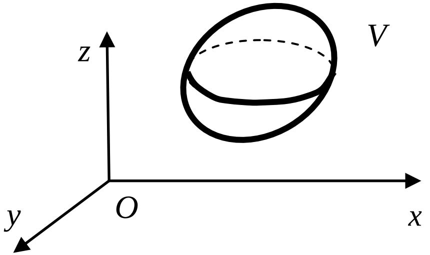
Полярный момент инерции относительно оси Oz

$$I_0=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)d\sigma=I_x+I_y.$$

13. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл

Рассмотрим тяжелое тело (V) с переменной плотностью $\gamma=\gamma(x,y,z)$.



Разобьем тело произвольным образом на n частей $(V_1),\ (V_2),\ ...,(V_n)$ объемами $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$.

Выберем в каждой части (V_k) произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Масса части (V_k) приближенно равна

$$\Delta M_k \approx \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Просуммируем массу всех частей

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой. Устремим наибольший диаметр элементарных объемов к нулю и рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{\max\{\varnothing\Delta V_k\}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Если этот предел интегральной суммы существует, то, очевидно, он равен массе тела и называется тройным интегралом от функции $\gamma = \gamma(x, y, z)$ по области V

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_V \gamma(x, y, z)\,dV.$$

Вообще, тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралы:

1) $\iiint_V \left(f_1(x, y, z) \pm \ldots \pm f_n(x, y, z)\right) dV =$

$$= \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \pm \ldots \pm \iiint\limits_V f_n(x,y,z)\,dV.$$

2) $\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$

3) $V = V_1 \bigcup V_2$, $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV.$$

4) Если $\forall (x,y,z) \in V \quad f_1(x,y,z) \ge f_2(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \ge \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\,dV.$$

5) Если $m = f_{наим}$ *в* V, $M = f_{наиб}$ *в* V, то

$$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \le MV \text{, где } V = \iiint\limits_V dV.$$

6) $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = f(\xi,\eta,\varsigma)V,\ (\xi,\eta,\varsigma) \in V.$

$f(\xi,\eta,\varsigma)$ - среднее значение f в области V.

13.2. Вычисление тройных интегралов

1) Декартовы координаты.

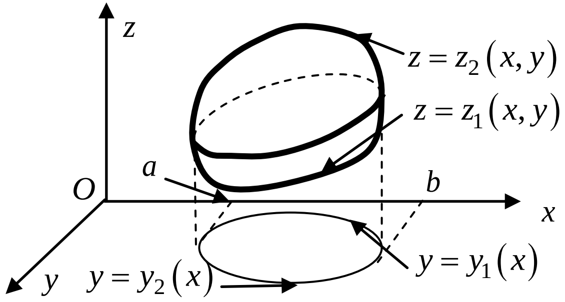
Пусть дан тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$$

Разобьем область интегрирования V на элементарные части плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен $dV = dxdydz.$ Следовательно

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Правило вычисления тройного интеграла



$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2) Цилиндрические координаты.

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,$

$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\right).$

Якобиан преобразования равен $J = r.$

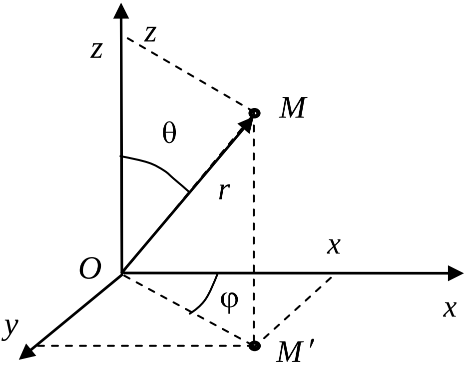
Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r d\varphi dr dz.$$

3) Сферические координаты.

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$

$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right).$



Якобиан преобразования вычисляется по формуле

$$J = r^2 \sin\theta.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f\left(x, y, z\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta d\varphi dr d\theta.$$

13.3. Приложения тройных интегралов

Пусть дано тело V переменной плотности $\gamma\left(x, y, z\right)$.

Массу тела M можно вычислить по формуле

$$M = \iiint\limits_V \gamma\left(x, y, z\right) dv.$$

1) Статические моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dv,\quad M_{xz}=\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)\,dv,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)\,dv.$$

2) Координаты центра тяжести:

$$x_{цт}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv},$$

$$y_{цт}=\frac{M_{xz}}{M}=\frac{\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv},$$

$$z_{цт}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dv}.$$

Если тело однородно, т. е. $\gamma(x,y,z)=const,$ то

$$x_{цт}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iiint\limits_V x\,dv}{V},\quad y_{цт}=\frac{M_{xz}}{M}=\frac{\iiint\limits_V y\,dv}{V},$$

$$z_{цт}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint\limits_V z\,dv}{V}.$$

3) Моменты инерции тела относительно координатных осей:

$$J_x = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_y = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right)dv.$$

4) Центробежные моменты инерции тела:

$$J_{xy} = \iiint\limits_V xy\gamma(x, y, z)\,dv, \quad J_{xz} = \iiint\limits_V xz\gamma(x, y, z)\,dv,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_V yz\gamma(x, y, z)\,dv.$$

5) Полярный момент инерции тела:

$$J_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dv.$$