11. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной не охватывают *все* зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

11.1. Функции двух переменных

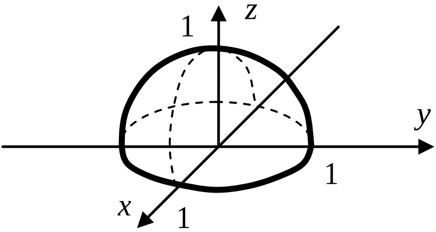
11.1.1. Основные понятия

Пусть дано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x, y)$ или $f : D \to R$. При этом x, y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z - *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Функцию $z = f(x, y)$, где $(x; y) \in D$, можно понимать как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют *границей области*. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними*. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*. Область с присоединенной к ней границей называется *замкнутой*, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 \le 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке $O(0;0;0)$ и радиусом $R = 1$.



11.1.2. Предел функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Записывают

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ или } A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к

M_0

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется такая δ - окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что во всех ее точках $M(x;y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z=f(x,y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

11.1.3. Непрерывность функции двух переменных

Функция $z=f(x,y)$ (или $f(M)$) называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x, y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*.

11.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

11.2.1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Так как x и y - независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое назовем *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов: $z'_x, \ \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ f'_x, \ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Частные производные по x в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$

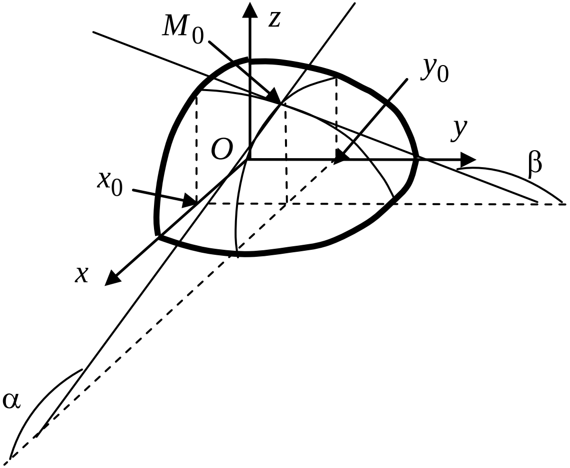
обозначаются символами $f'_x\left(x_0, y_0\right), \ f'_x\big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f\left(x, y\right)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из независимых переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f\left(x, y\right)$ находятся по формулам и по правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считаются постоянной величиной).

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных



Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность. График функции $z = f(x, y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α - угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$.

Аналогично $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

11.2.2. Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ называются *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x;y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x,y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и высших порядков.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*. Так, например,

z''_{xy}, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

Теорема (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11.2.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых представляет собой *главную часть приращения функции*.

Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y\ .$$

Выражения $A\Delta x$ и $B\Delta y$ называют *частными дифференциалами*. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Т.е.

$$dz = Adx + Bdy\,.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f\left(x, y\right)$ дифференцируема в точке $M\left(x; y\right)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A,\ \frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M\left(x; y\right)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

11.2.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f\left(x, y\right)$ следует, что при достаточно малых $\left|\Delta x\right|$ и $\left|\Delta y\right|$ имеет место приближенное равенство: $\Delta z \approx dz$.

Т. к. полное приращение

$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$, это равенство можно переписать в виде:

$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + f'_x\left(x, y\right)\Delta x + f'_y\left(x, y\right)\Delta y$.

Этой формулой пользуются в приближенных расчетах.

11.2.5. Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал функции называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет непрерывные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Символически это записывается так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z .$$

В общем случае:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z .$$

11.2.6. Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f\left(x, y\right)$ - функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t),\ y = y(t)$. В этом случае функция $z=f\left(x(t),y(t)\right)$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y - *промежуточные переменные*.

Теорема. Если $z=f\left(x,y\right)$ - дифференцируемая в точке $M\left(x;y\right)\in D$ функция и $x=x(t),\ y=y(t)$ - дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z=f\left(x(t),y(t)\right)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Частный случай: $z=f\left(x,y\right)$, где $y=f\left(x\right)$, т. е. $z=f\left(x,y(x)\right)$ - сложная функция одной независимой переменной x.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Общий случай: $z=f\left(x,y\right)$, где $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$. Тогда $z=f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ - сложная функция независимых переменных u и v.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

11.2.7. Дифференцирование неявно заданной функции

Функция $z = f(x, y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z. Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \ \left(F'_z \neq 0\right).$$

Неявная функция $y = f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x, y) = 0$. Для нее

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, \ \left(F'_y \neq 0\right).$$

11.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$ некоторой области $D \in R^2$. Уравнение касательной плоскости к графику функции в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнения нормали в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(x_0;y_0;z_0)$ имеют соответственно вид:

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0)(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

11.4. Экстремум функции двух переменных

11.4.1. Основные понятия

Понятия максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям для функции одной независимой переменной.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D, точка $M(x_0;y_0)\in D$.

Точка $(x_0;y_0)$ называется *точкой максимума* функции $z=f(x,y)$, если существует такая δ - окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x,y)<f(x_0,y_0)$.

Аналогично определяется *точка минимума* функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$, из δ - окрестности выполняется неравенство:

$$f(x,y)>f(x_0,y_0).$$

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом (минимумом)* функции. Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами*.

В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке $(x_0; y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0; y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

11.4.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $M(x_0; y_0) \in D$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:
$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, называется *стационарной точкой* функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются *критическими точками*.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.
Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке $(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$. Тогда:

1) если $\Delta>0$, то функция $z=f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A<0$; минимум, если $A>0$;

2) если $\Delta<0$, то функция $z=f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ не имеет экстремума.

В случае $\Delta=0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

11.4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\bar{D}$ своего наибольшего

M и наименьшего m значений. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\bar{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений в области $\bar{D}$ функции $z = f(x, y)$ состоит в следующем:

1) найти все критические точки функции, принадлежащие $\bar{D}$, и вычислить значения функции в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области;
3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.