9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ $(x \in X \subset R)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема $\forall x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Операция отыскания $F(x)$ называется интегрированием. Интегрирование – операция обратная дифференцированию.

Совокупность $F(x)+C$ (C - постоянная) всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C$.

9.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

2) $\int dF(x) = F(x)+C$; 3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$;

4) $\int\left(f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx\pm\ldots\pm\int f_n(x)dx$;

5) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$;

6) **Инвариантность формул интегрирования.** Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если

переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Rightarrow\; \int f(u)\,du = F(u) + C$$

$(u = u(x))$.

9.3. Основные правила интегрирования

1) $\left(\int f(u)\,du\right)' = f(u)$; 2) $d\left(\int f(u)\,du\right) = f(u)\,du$;

3) $\int dF(u) = F(u) + C$; 4) $\int af(u)\,du = a\int f(u)\,du$;

5) $\int \left(f_1(u) \pm \ldots \pm f_n(u)\right)du = \int f_1(u)\,du \pm \ldots \pm \int f_n(u)\,du$;

6) $\int f(au+b)\,du = \dfrac{1}{a}F(au+b) + C$.

9.4. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$; 2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$; 4) $\int e^u du = e^u + C$;

5) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$; 6) $\int \cos u\,du = \sin u + C$;

7) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; 8) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

9) $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$;

10) $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$;

11) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

12) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C;$

14) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

15) $\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \sqrt{u^2 \pm a^2} + C;$

16) $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2-u^2} + C;$

17) $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C;$

18) $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\ln\left|\cos u\right| + C;$ 19) $\int \mathrm{ctg}\,u\,du = \ln\left|\sin u\right| + C;$

20) $\int \mathrm{sh}\,u\,du = \mathrm{ch}\,u + C;$ 21) $\int \mathrm{ch}\,u\,du = \mathrm{sh}\,u + C;$

22) $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2\,u} = \mathrm{th}\,u + C;$ 23) $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2\,u} = -\mathrm{cth}\,u + C;$

24) $\int \mathrm{th}\,u\,du = \ln\left|\mathrm{ch}\,u\right| + C;$ 25) $\int \mathrm{cth}\,u\,du = \ln\left|\mathrm{sh}\,u\right| + C.$

9.5. Основные методы интегрирования

1) Замена переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на множестве T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

2) Подведение множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du .$$

3) Интегрирование по частям. $\int udv = uv - \int vdu$.

9.6. Интегрирование простейших рациональных дробей

1) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$

3) $\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| p^2 - 4q < 0 \right| =$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2\left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C ;$$

4) $\int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \ \ p^2-4q<0, \ \ n>1,$ заменой

$x+\frac{p}{2}=t$ сводится к линейной комбинации интегралов

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C$$

и $I_n=\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$.

Для вычисления I_n существует рекуррентная формула

$$I_n=\frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$$

9.7. Интегрирование рациональных дробей

Рациональная дробь вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0}, \ (n,m\in N)$$

называется правильной, если $n<m$, иначе – неправильной.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=Z_{n-m}(x)+R_1(x)$,

где $Z_{n-m}(x)$ - многочлен степени $(n-m)$,

$R_1(x)=\dfrac{p_k(x)}{Q_m(x)}$ - правильная дробь.

Для этого достаточно поделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.

Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей

$$\frac{p_k(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_l}{(x-a)^l}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots,$$

где l -кратность корня a знаменателя.

Для определения коэффициентов A_i, M_i, N_i используются метод неопределенных коэффициентов или метод частных значений.

Интегрирование дробей этого вида изложено в предыдущем пункте.

Пример: Представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей $\dfrac{3x^2+5}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)^3}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}+$

$$+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^3}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{Kx+M}{\left(x^2+4\right)}.$$

Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла от рациональной функции

Если $P(x)/Q(x)$ - правильная дробь, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_1(x) = НОД\left(Q(x), Q'(x)\right)$; $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$; $P_1(x), P_2(x)$ - многочлены; (степень $P_1(x)$) $\le$ (степени $Q_1(x)$ -1); (степень $P_2(x)$) $\le$ (степени $Q_2(x)$ -1).

Если $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \ldots$, то

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1-1} \cdot \ldots,$$

$$Q_2(x) = (x-a_1) \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right) \cdot \ldots .$$

9.8. Интегрирование тригонометрических выражений

1) Универсальная тригонометрическая подстановка

Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R - рациональная функция своих аргументов, заменой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ сводится к интегрированию рациональной дроби от аргумента t. При этом $x = 2\operatorname{arctg} t$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В частных случаях возможны более простые подстановки:

а) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\cos x = t$;

б) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\sin x = t$;

в) если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\operatorname{tg} x = t$. При этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Интегрирование рационально-гиперболических функций $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

реализуется подстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t$ ($\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$,

$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$).

В частных случаях возможны более простые подстановки:

а) если $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то применяют подстановку $\operatorname{ch} x = t$;

б) если $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то применяют подстановку $\operatorname{sh} x = t$;

в) если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то применяют подстановку $\operatorname{th} x = t$.

2) Интеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$. При интегрировании этого вида интегралов применяют следующие подстановки:

а) если m - нечетное положительное число, то применяют подстановку $\cos x = t$;

б) если n - нечетное положительное число, то применяют подстановку $\sin x = t$;

в) если сумма $m+n$ - четное положительное число, то понижают порядок по формулам тригонометрии:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

3) Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$,

$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx, \ \int \sin mx \cdot \sin nx dx.$$

При интегрировании этих интегралов понижают порядок подынтегральной функции по формулам тригонометрии: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$,

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

4) Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x dx$, $\int \mathrm{ctg}^m x dx$ $(m - \textit{целое})$.

При интегрировании этого вида интегралов используют формулы: $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$; $\mathrm{ctg}^2 x = \mathrm{cosec}^2 x - 1$;

$$\left(\sec x = \frac{1}{\cos x},\ \mathrm{cosec} = \frac{1}{\sin x} \right).$$

9.9. Интегрирование иррациональных функций

Соответствующей подстановкой подынтегральное выражение приводится к рациональной дроби.

1) Для интегралов $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots \right) dx$,

где R - рациональная функция, $m_1/n_1, m_2/n_2, \ldots$ - несократимые дроби, применяется подстановка $ax + b = t^s$, где s - наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots$.

2) Для интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx$ применяют подстановки Эйлера:

а) $a > 0$, подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$;

б) $c \ge 0$, подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;

в) $b^2 - 4ac > 0,\ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_i)$, где $i = 1$ либо $i = 2$.

3) Интегрирование иррациональностей от дробно-линейной функции

$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx,\ m \in N,\ m>1,\ \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ -

подстановка $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^m$.

4) Интегрирование биномиальных

дифференциалов $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ реализуется в

конечном виде лишь в трех случаях:

а) $p \in Z$, подстановка $x=t^k$, где k - общий

знаменатель m и n, Z - множество целых чисел.

б) $\frac{m+1}{n} \in Z$, подстановка $a+bx^n=t^k$, где k -

знаменатель p.

в) $\frac{m+1}{n}+p \in Z$, подстановка $ax^{-n}+b=t^k$, где k -

знаменатель p.

9.10. Тригонометрические подстановки

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$; подстановка $x=a\sin t$

$\left(x=a\cos t\right)$.

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$; подстановка $x=a\,\mathrm{tg}\,t$

$\left(x = a\operatorname{ctg} t,\ x = a\operatorname{sh} t\right)$.

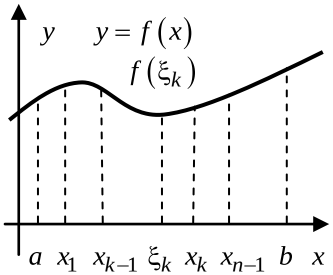
3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$; подстановка $x = a\sec t$

$\left(x = a\operatorname{cosec} t,\ x = a\operatorname{ch} t\right)$.

10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена и ограниченна на отрезке $[a,b]$ $(a < b)$.



Разобьем $[a,b]$ произвольным образом на n отрезков точками $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ и обозначим это разбиение через τ_n.

$\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n \mid a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ - длина частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$,

$k = 1, ..., n$. На каждом отрезке выберем произвольным образом точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k==1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

Это интегральная *сумма Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующая разбиению τ_n отрезка

$[a,b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k = 1,...,n$. Пусть $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$.

Если существует конечный предел интегральной суммы σ_n при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* (интегралом Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ ,$$

где $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

x - переменная интегрирования;

a, b - нижний и верхний пределы интегрирования.

Класс интегрируемых функций (по Риману):

1) непрерывные на $[a,b]$;

2) ограниченные на $[a,b]$ с конечным числом точек разрыва I-го рода;
3) монотонные ограниченные.

10.2. Основные свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. 2) $\int\limits_a^b dx = b - a$.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. 4) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$.

5) $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

7) Если $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \ (a < b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

8) Если для интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется $f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a,b]$,

то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

9) Если m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b] \quad (a < b)$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

10) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $\xi\in[a,b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

10.3. Основные методы вычисления определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница. Значение определенного интеграла на отрезке $[a,b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x=b$ и $x=a$:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Замена переменной. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$, причем $\varphi([t_1,t_2])=[a,b]$ и $\varphi(t_1)=a,$ $\varphi(t_2)=b,$ то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_2}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$

10.4. Несобственные интегралы.

Если в определенном интеграле промежуток интегрирования не конечен или $f\left(x\right)$ не принадлежит к классу интегрируемых функций, то приходим к несобственным интегралам.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода)

$$\int_a^{\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f\left(x\right)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f\left(x\right)dx.$$

Если пределы существуют, то *интегралы сходятся*. Если пределы не существуют или равны $\pm\infty$, то *интегралы расходятся*.

Критерии сходимости:

1. Если на промежутке $\left[a;\infty\right)$ определены две неотрицательные функции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $\left[a;b\right]$, причем $0\le f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ $\forall x\ge a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} g\left(x\right)dx$ следует сходимость интеграла

$\int_a^{\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

2. Если на промежутке $[a;\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;b]$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0$, то несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если на промежутке $[a;\infty)$ функция $y=f(x)$ меняет знак и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится также и $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

4. Если $f(x)\sim c/x^{\alpha}$ при $x\to+\infty,\ 0<c<+\infty$, то при

$\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, при $\alpha \le 1$ - расходится.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го рода). Пусть функция терпит разрыв второго рода на отрезке интегрирования $[a,b]$. Тогда, если функция терпит разрыв второго рода в точке $x=b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$,

если функция терпит разрыв второго рода в точке $x=a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$,

если функция терпит разрыв второго рода в точке $x=c$ $(c\in(a,b))$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx .$$

Если пределы существуют, то *интегралы сходятся*. Если пределы не существуют или равны $\pm\infty$, то *интегралы расходятся*.

Критерии сходимости:

1. Пусть в левой (правой) окрестности точки b (точки a) определены две неотрицательные функции $f(x)$ и

$g(x)$, причем $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

2. Пусть положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;b)$, точка b - точка бесконечного разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. . Если $f(x) \sim c/(b-x)^{\alpha}$ при $x \to b-0$, то при $\alpha < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, при $\alpha \ge 1$ - расходится.

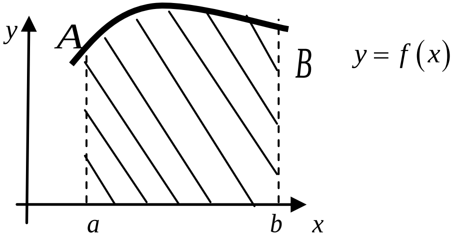
Замечание. Подобные критерии имеют место, если $x = a$ - точка бесконечного разрыва функции.

10.5. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

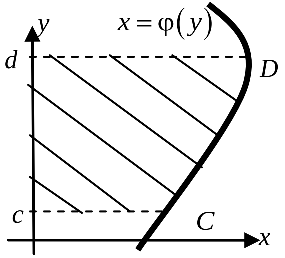
Вычисление площади плоской фигуры

а) Если $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, то площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс на отрезке $[a,b]$, равна $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx$. Если $f(x) \leq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, то

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b ydx .$$



а) Если фигура ограничена линиями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то $S = \int\limits_c^d \varphi(y)\,dy$.

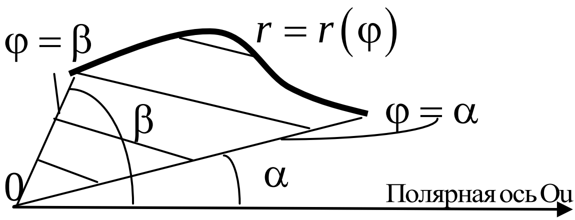


б) В случае параметрического задания линии $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt \right|.$$

в) Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат, ограниченного линиями $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$



Вычисление длины дуги кривой

а) Линия задана уравнением $y = f(x)$, $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx .$$

б) В параметрическом случае задания кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, где $x(t)$, $y(t)$ непрерывные, дифференцируемые функции, длина кривой вычисляется по формуле $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$.

в) Для пространственной кривой, заданной параметрически: ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$), где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - непрерывные, дифференцируемые функции, длина кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt\ .$$

г) В полярной системе координат ($r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$) длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi\,.$$

Вычисление объемов пространственных тел

а) Пусть задана площадь поперечного сечения тела непрерывной функцией $S(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда объем тела определяется формулой $V=\int_a^b S(x)\,dx$.

б) Пусть тело образовано вращением линии $y=f(x)$, не имеющей разрывов второго рода, вокруг оси Ox на отрезке $[a,b]$. Тогда объем тела определяется формулой

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\,.$$

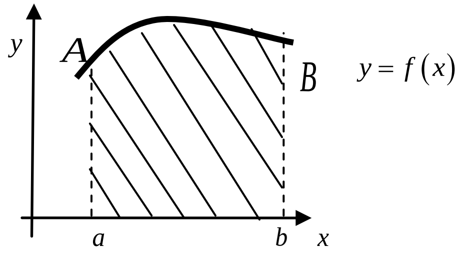
в) Пусть тело образовано вращением линии $x=\varphi(y)$, не имеющей разрывов второго рода, вокруг оси Oy на отрезке $[c,d]$. Тогда объем тела определяется формулой $$V=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2\,dy.$$

Вычисление площади поверхности вращения.

а) Дуга гладкой кривой $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ вращается вокруг оси Ox. Площадь поверхности вращения, описываемая данной кривой, вычисляется по формуле
$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

б) В параметрическом случае задания кривой ($x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$), где $x(t)$, $y(t)$ - непрерывные, дифференцируемые функции, площадь поверхности вращения вычисляется по формуле
$$S_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Вычисление моментов инерции центров масс.



Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. По этой трапеции непрерывно с плотностью $\rho = \rho(x, y)$ распределена масса.

Моменты инерции криволинейной трапеции определяются по формулам:

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3 dx, \quad I_y = \frac{1}{2}\int_a^b \rho x^2 y dx, \quad I_0 = I_x + I_y.$$

Центр тяжести криволинейной трапеции определяются по формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M}, \quad y_C = \frac{M_x}{M},$$

где $M = \int_a^b \rho y dx$, $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^2 dx$, $M_y = \frac{1}{2}\int_a^b \rho xy dx$.