5. ПРЕДЕЛЫ
5.1. Числовая последовательность и ее предел

Если $\forall n \in N$ поставлено в соответствие $u_n = f(n)$, то говорят, что на N задана числовая последовательность $f: N \to R$ обозначается $\{u_n\}$.

$u_n = f(n)$ - формула общего члена последовательности.

Свойства последовательностей

1) $\{u_n\}$ - ограничена снизу $\Leftrightarrow \exists m \in R : u_n \geq m \ \forall n \in N$;

2) $\{u_n\}$ - ограничена сверху $\Leftrightarrow \exists M \in R : u_n \leq M \ \forall n \in N$;

3) $\{u_n\}$ - ограничена $\Leftrightarrow \exists m, M \in R : m \leq u_n \leq M \ \forall n \in N$;

4) $\{u_n\}$ - возрастает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} < u_{n_2}$;

5) $\{u_n\}$ - убывает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} > u_{n_2}$;

6) $\{u_n\}$ - не убывает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} \leq u_{n_2}$;

7) $\{u_n\}$ - не возрастает $\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} \geq u_{n_2}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными.*

Предел числовой последовательности

Число A называют пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - A| < \varepsilon.$$

Пишут $A = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - A| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся.*

Теоремы о числовых последовательностях:

1. Если последовательность сходится, то она ограничена (необходимый признак сходимости).
2. Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится (достаточный признак сходимости).
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и $\forall n\ x_n \le y_n$, то $x \le y$.
5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Теорема. Если последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b,$ то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n \pm v_n\right) = a \pm b;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c \cdot u_n\right) = c \cdot a;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n \cdot v_n\right) = a \cdot b;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \left|\lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n\right) \neq 0\right| = \frac{a}{b}.$

Некоторые пределы

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \ \left(q < 1\right),\ \ \lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \ \left(q < 1\right),$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 1/n\right)^n = e,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^a / a^n\right) = 0 \ \left(|a| > 1\right),$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n / n!\right) = 0 \ \left(|a| > 1\right),\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\ln n\right)/n\right) = 0,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n} = 1,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\ln^a n\right)/n^a\right) = 0 \ \left(a > 0\right),$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \ \left(a > 0\right),\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1/\sqrt[n]{n!}\right) = 0,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n/\sqrt[n]{n!}\right) = e,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k} = \frac{a_0}{b_o} \ \left(b_0 \neq 0\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$ (формула Валлиса).

5.2. Предел числовой функции

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ в точке x_0 $(x\to x_0)$ (обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0:\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Число A называется *левым пределом функции* (левосторонний предел) $y=f(x)$ в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0:\ \forall x:\ 0<x_0-x<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Число A называется *правым пределом функции* (правосторонний предел) $y=f(x)$ в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0:\ \forall x:\ 0<x-x_0<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Функция имеет предел в точке x_0, если существуют и равны односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A.$$

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при*

$x \to +\infty$ *(* $x \to -\infty$ *)* (обозначается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$)), если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0:\ \forall x > M\ \left(x < -M\right) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0.$

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b,$

то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot a;$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b;$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \left| b \neq 0 \right| = \dfrac{a}{b}.$

При вычислении $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right)$, в случае бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, теорема о пределе суммы (разности) функций непосредственно не применима. В этом случае говорят, что выражение $\left(f(x) \pm g(x) \right)$ при $x \to x_0$, представляет собой *неопределенность* вида $\{\infty \pm \infty\}$.

Аналогично возникают неопределенности вида $\left\{ \dfrac{\infty}{\infty} \right\}$, $\left\{ \dfrac{0}{0} \right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$ и т. д. Вычисление пределов в этих случаях называется *раскрытием неопределенности.*

5.3. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad e = 2{,}71829\ldots .$$

Часто используются следующие формулы, являющиеся следствиями *замечательных пределов:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ (a>0,\ a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0,\ a\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Некоторые пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a,\ \lim_{x\to +0}x^a\ln x=0\ (a>0),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^a}{e^x}=0,\ \lim_{x\to +0}x^x=1.$$

5.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или *бесконечно малой*) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (или *бесконечно большой*) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

а) Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) = 1$, то они называются *эквивалентными* при $x \to x_0$ или *асимптотически равными*.

Пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

б) Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка малости* по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Пишут $\alpha(x) \sim o(\beta(x))$ при $x \to x_0$.

в) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то при $x \to x_0$ справедливо:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x), \ \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\alpha(x),$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x).$$

Некоторые эквивалентности (при $x \to 0$): $\sin x \sim x$, $\mathrm{tg}\,x \sim x$, $1-\cos x \sim x^2/2$, $\arcsin x \sim x$, $\mathrm{arctg}\,x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\mathrm{sh}\,x \sim x$, $\mathrm{ch}\,x - 1 \sim x^2/2$, $a^x - 1 \sim x\ln a$,

$\ln(1+x)\sim x$, $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sim x$, $(1+x)^a-1\sim ax$.

Формула Стирлинга: $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ при $n\to\infty$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,

$\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

6. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Непрерывность функции в точке и на множестве

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в окрестности точки* x_0, если выполняются три условия:

1) $x_0\in D(f)$; 2) $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$, непрерывная во всех точках множества $D(f)$, называется *непрерывной на этом множестве.*

6.2. Точки разрыва функции и их классификация

Если хотя бы одно из условий п. 6.1. не выполнено, то x_0 - *точка разрыва функции*.

1). Если условие 2) выполнено, но $x_0 \notin D(f)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то в точке x_0 *устранимый разрыв.*

2). Если условие 2) нарушено, но $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то в точке x_0 *разрыв 1-го рода*, а разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - *скачок функции* $f(x)$ в точке x_0.

3). Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, то в точке x_0 имеем *разрыв 2-го рода.*

6.3. Действия над непрерывными функциями

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то:

а) $f(x) \pm g(x)$, б) $f(x) \cdot g(x)$,

в) $f(x)/g(x)$, $g(x_0) \neq 0$

непрерывны в точке x_0.

Теорема. Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке x_0 функций, непрерывна в точке x_0.

Теорема. Основные элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих области определения.

6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке она ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

Теорема (Больцано-Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой значение функции равно нулю.

Теорема (о промежуточном значении). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$.

Тогда $\forall C: A \le C \le B \;\; \exists c: c \in [a,b] \wedge f(c)=C$.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых эта функция разрыв 1-го рода или устранимый разрыв и, кроме того, она имеет односторонние пределы в точках a и b .