4. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Понятие функции. Способы задания

Пусть D – произвольное подмножество действительных чисел $\left(D \subseteq R\right)$. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое единственное конечное действительное число $y = f\left(x\right)$, то говорят, что на множестве D определена числовая функция f. Множество D называют *областью определения* функции, а множество $E = \left\{y \in R \mid y = f\left(x\right),\, x \in D\right\}$ - называют *областью значений* функции. Термины *функция, отображение, преобразование* – синонимы.

Обозначения:

$$y = f\left(x\right); \;\; f : D \to E; \;\; D \xrightarrow{f} E; \;\; y = y\left(x\right).$$

Область определения либо указывают**,** либо определяют.

Основные способы задания функций

1) *Аналитический способ задания функций.*

Пример: $y = \sin 3x + \ln 2x.$

Частное значение функции:

$$f\left(x_0\right) \quad \text{или} \quad y\big|_{x = x_0}.$$

Примеры:

а)

$$y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}},\ D(f)=(-2;2),\quad E(f)=(0,5;\infty).$$

б) $$\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Неявное задание функции $y(x)$ уравнением: $F(x,y)=0.$

Если уравнение можно разрешить относительно y, то приходим к явно заданной функции, например: $4x+2y-6=0 \Rightarrow y=3-2x.$

2) *Табличный способ задания функций*: перечисление n значений аргумента $x_1,\ x_2,...,x_n$

и соответствующих значений функции $y_1,\ y_2,...,y_n$.

3) *Графический способ задания функций* состоит в представлении функции $y=f(x)$ графиком $\Gamma=\left\{M(x,y)\in R^2 \mid y=f(x)\right\}$ в некоторой системе координат.

4.2. Основные характеристики поведения функций. Начальный этап исследования функции

1) Нули функции находятся из решения уравнения $f(x)=0$.

2) $f(x)$ - четная функция

$$\Leftrightarrow \forall x \in D(f): -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x);$$

$f(x)$ - нечетная функция

$$\Leftrightarrow \forall x \in D(f): -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x).$$

3) Периодичность: $f(x)$ – периодическая функция $\Leftrightarrow$

$$\exists T \neq 0: \forall x \in D(f): (x \pm T) \in D(f) \wedge f(x \pm T) = f(x).$$

4) Монотонность:

Функция $f(x)$ возрастает в X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Функция $f(x)$ убывает в X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $f(x)$ не убывает в X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция $f(x)$ не возрастает в X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

5) Функция $f(x)$ называют *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X \subseteq D(f)$, если

$$\exists M \in R: x \in X \Rightarrow f(x) \leq M \ \left(f(x) \geq M \right).$$

Функцию ограниченную сверху и снизу на множестве X называют *ограниченной* на X.

6) Если условия пункта 5) не выполняются, то функция называется *неограниченной.*

4.3. Сложная функция. Обратная функция

Сложная функция. Пусть заданы функции $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$, причем $E(\varphi)\subset D(f)$. Функцию $y=f(\varphi(x))$ называют *сложной* функцией или *композицией (суперпозицией)* функций φ и f и обозначают символом $f\circ\varphi$ (x - независимая переменная; u - промежуточный аргумент):

$$x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y\Leftrightarrow y=f(\varphi(x))\Leftrightarrow(f\circ\varphi)(x).$$

Обратная функция. Пусть функция $y=f(x)$ отображает $D(f)\to E(f)$. Рассмотрим взаимно однозначное отображение

$f\Leftrightarrow\forall x\in D$ ñóù åñòâóåò òî ëüêî î äí î $y\in E$: $y=f(x)$:

$\forall x_1,x_2\in D,\ x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. Тогда можно говорить об обратной функции $x=f^{-1}(y),\ y\in E(f)$.

Теорема. Если числовая функция $y=f(x)$ монотонна, то $\exists$ обратная функция $x=f^{-1}(y)$. Это достаточное условие обратимости.

4.4. Основные элементарные функции

1) Линейная функция: $y=ax+b,\ (a,b\in R)$.

2) Степенная функция: $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

3) Показательная функция:

$$y=a^{x},\ (a>0; a\neq 1).$$

4) Логарифмическая функция:

$$y=\log_{a} x,\ a>0,\ a\neq 1.$$

5) Тригонометрические функции:

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x.$$

6) Обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$$

7) Гиперболические функции: $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{th} x,\ \operatorname{cth} x.$

8) Обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{arsh} x,\ \operatorname{arch} x,\ \operatorname{arth} x,\ \operatorname{arcth} x.$$

4.5. Классификация функций

1) Целые рациональные функции:

$$P_n(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

2) Дробно-рациональные функции:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0 x^m+a_1 x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0 x^n+b_1 x^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Совокупность 1) и 2) – класс рациональных функций.

3) Иррациональные функции: получаются с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями.

$$y=\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{x}.$$

Совокупность 1), 2) и 3) – класс алгебраических функций.

4) Трансцендентные функции: $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{cth} x$ и т.д.

4.6. Параметрическое задание функций

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in T;$ t – называется параметром.

Если φ - монотонна, то $\exists$ $t=\varphi^{-1}(x).$ Тогда

$y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$

Всякую явно заданную функцию можно представить параметрически $y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t, & t\in T\\ y=f(t).\end{cases}$

Параметрическое задание линий на плоскости

Множество точек $M(x,y)$ плоскости R^2, координаты которых удовлетворяют $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in T$, параметрически задают линию $L\in R^2$.

1) Прямая линия: $y=ax+b\Leftrightarrow\begin{cases}x=t,\ t\in R,\\ y=at+b.\end{cases}$

2) Окружность с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=a^2\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t, & 0\le t<2\pi.\end{cases}$$

3) Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t & 0\le t<2\pi.\end{cases}$

4) Парабола:

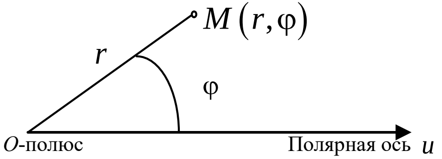
$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y^2 = 2pt. \; t \in [0; \infty) \end{cases}.$$

5) Гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t, \quad t \in R. \end{cases}$

6) Астроида: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

7) Циклоида: $\begin{array}{l} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \; t \in R. \end{array}$

4.7. Полярная система координат



$r(M) = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ - полярный радиус.

$\varphi(M)$ - полярный угол (отсчитывают против хода часовой стрелки от полярной оси), принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на $2k\pi$. Значение φ: $0 \le \varphi < 2\pi$ - называют главным значением (иногда: $-\pi < \varphi \le \pi$).

Положение любой точки определяется заданием r, φ $\left(0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\right)$. **Связь декартовых и полярных координат:**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Уравнение линии в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$ или $F(r, \varphi) = 0$.

4.8. Простейшие методы построения графиков в декартовой системе координат

Пусть L - график функции $y = f(x)$ в Oxy. Тогда:

1) График функции $y = -f(x)$ получен зеркальным отображением L относительно оси Ox.

2) График функции $y = f(-x)$ получен зеркальным отображением L относительно оси Oy.

3) График функции $y = f(x-a)$ $(a > 0)$ получен смещением вправо L по оси Ox.

4) График функции $y = f(x) + b$ получен смещением L по оси Oy на величину b.

5) График функции $y = f(kx)$ получен «сжатием» L по оси Ox в k раз.

6) График функции $y = Af(x)$ получен «растяжением» L по оси Oy в A раз

7) График функции $y = Af(k(x-a)) + b$ - общая формула преобразования.