Вариант 1

Задача 1. Найти область определения функции и изобразить ее на плоскости: $z = \sqrt{x - \sqrt{y-1}}$

Задача 2. Вычислить частные производные z'_x и z'_y сложной функции в данной точке: $z = u + \sqrt{v}; u = x^2 y; v = x^y;$ при x=e, y=2

Задача 3. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к указанной поверхности в данной на ней точке:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0; M_o(1,2,2)$

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$z = f(x, y)$ в области D. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1; D: \{x + y + 1 = 0, x = -3\}$.

Задача 5. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$$

Задачи 6...8. Найти объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

6. $y = 16\sqrt{2x}; y = \sqrt{2x}; z = 0; x + z = 2$

7. $z = 10\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 1; z = 21 - 20x$

8. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49; \sqrt{(x^2 + y^2)/15} \le z \le \sqrt{(x^2 + y^2)/3}; -x \le y \le 0$

Задача 9. Найти массу пластинки: $1 \le x^2 + y^2/4 \le 9; 0 \le y \le 2x; \mu = y^2$.

Задача 10. Найти массу тела:

$64(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 4; y = 0; z = 0; (y \ge 0; z \ge 0); \mu = 5(x^2 + y^2)/4.$

Задача 11. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина:

$$\oint_L (1 - x^2) y dx + x(1 + y^2) dy; L: x^2 + y^2 = R^2$$

Задача 12. Вычислить массу дуги кривой L при заданной плотности γ:

$L: \rho = e^{3\varphi/4}; \gamma = \rho^{4/3}; 0 \le \varphi \le 4\pi/7.$

Задача 13. Вычислить работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии γ от точки M к точке N:

$\overline{F} = \left\{ y;3x;z^2 \right\}; M(2;0;3); \gamma \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3. \end{cases} \quad N(0;2;3);$

Задача 14. Найти производную функции u(x,y,z) и точке M_o по направлению внешней нормали $\overline{n}$ к поверхности S, заданной уравнением S(x,y,z) = 0, или по направлению вектора $\overline{e}$:

$u = \ln(3 + x^2) - 8xyz; M_o(1,1,1); S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1.$

Задача 15. Найти наибольшую скорость изменения скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$ в заданной точке M: $\varphi = \arcsin \dfrac{xz}{x + y}; M(1,0,-1/2).$

Задача 16. Вычислить расходимость и вихрь в произвольной точке M, а также найти уравнение векторных линий поля градиента скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$: $\varphi = (x + y)^2 z^2.$

Задача 17. Найти поток векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ через часть плоскости P, расположенную в 1-м октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\overline{a} = \left\{ 7x; (5\pi y + 2); 4\pi z \right\}; P: x + y/2 + 4z = 1.$

Задачи 18...19. Тело T лежит в 1-ом октанте и ограничено плоскостями координат с поверхностью Q, заданной уравнением F(x,y,z) = 0.
Вычислить:

а) поток поля вектора $\overline{a}$ через поверхность, ограничивающее тело T (воспользоваться формулой Остроградского);

в) циркуляцию поля вектора $\overline{a}$ вдоль линии пересечения поверхности Q с плоскостями координат в направлении от точки пересечения Q с осью OX к точке пересечения Q с осью OY (воспользоваться формулой Стокса).

$y^2 = 1 - x - z; \overline{a} = \left\{ xy; z^2; 0 \right\}.$

Задача 20. Убедиться, что поле вектора $\overline{a}$ потенциально, найти потенциал поля и вычислить работу при перемещении точки единичной массы из точки A в точку B:

$$\overline{a} = \left\{ -\frac{2y}{x^2 + 4y^2}; \frac{2x}{x^2 + 4y^2} + z; y \right\}; \quad \begin{matrix} A(1;1/2;-\pi/2); \\ B(3;\sqrt{3}/2;\pi/\sqrt{3}). \end{matrix}$$