

Вариант 1.

Задачи 1...9. Найдите общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если есть начальные условия.

1. $x^2 y' = y^2 + 4xy + 2x^2$; $y|_{x=1} = 1$.
2. $xy' + y = x \sin x$; $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$.
3. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2$; $y(0) = 1$.
4. $e^{xy}(1+xy)(ydx + xdy) + \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = 0$.
5. $y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = \frac{6x^2}{1+x^2}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
6. $y'' + 4y = \frac{8}{\sin 2x}$.
7. $y''' - y'' = 12x + 10$.
8. $y'' - y' - 2y = e^{-x}(12x + 2)$, $(x; y; y') = (0; 1; -2)$.
9. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

Задача 10. Решите систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого

порядка с постоянными коэффициентами $\mathbf{X}' = \mathbf{M}\mathbf{X}$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, x, y, z –

функции от t . \mathbf{M} – матрица коэффициентов при начальных условиях $X_{(t=0)} = X_0$.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Задачи 11...12. Составьте дифференциальные уравнения по условиям задач и решите их.

11. Найдите уравнение кривой, если длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью OX имеет постоянную длину a .

12. По закону Торричелли скорость истечения жидкости равна $V = 0,6\sqrt{2gx}$, где x – высота уровня жидкости над отверстием. Определите время истечения воды из цилиндрического бака с вертикальной осью диаметра $2R = 4$ м и высотой $H = 6$ м через круглое отверстие в дне диаметром $2r = 1/6$ м.