ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

К основным элементарным функциям относятся степенные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

1. Степенная функция, $y = x^{\alpha}$. Здесь α – любое постоянное действительное число. На рис. 1–3 представлены графики степенных функций при различных значениях α.

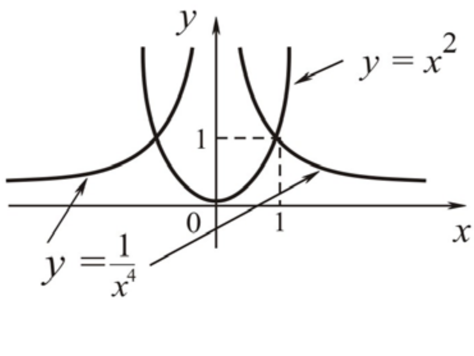

Рис. 1

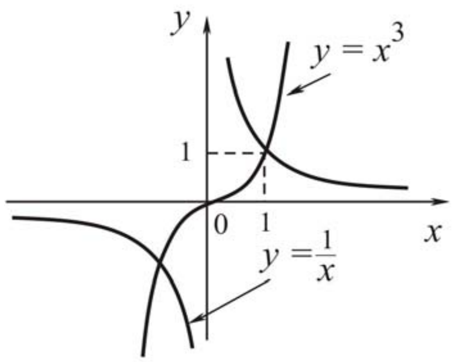

Рис. 2

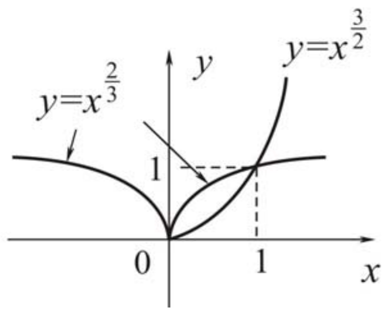

Рис. 3

2. Показательная функция, $y = a^x$. Здесь постоянная $a > 0$, $a \neq 1$. Функция определена на всех $x \in R$. Графики функций показаны на рис. 4. Если $a = e$, то функция $y = e^x$ называется экспонентой (иногда пишут $y = \exp x$).

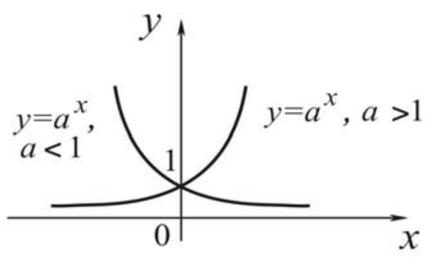

Рис. 4

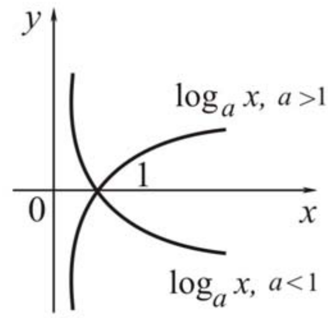

Рис. 5

3. Логарифмическая функция, $y = \log_a x$. Здесь постоянная $a > 0$, $a \neq 1$, функция определена для $x \in (0, \infty)$. Графики функций представлены на рис. 5. Если $a = e$, то функция $y = \ln x$ называется функцией натурального логарифма.

4. Тригонометрические функции, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены для любых значений *x*, функция $y = \operatorname{tg} x$ определена всюду, кроме значений $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена всюду, кроме значений $k\pi$, $k \in Z$. Аргументы тригонометрических функций выражаются в радианах и что эти функции являются периодическими с периодом 2π для функций синус и косинус и с периодом π для функций тангенс и котангенс. На рис. 6, 7 приведены графики тригонометрических функций.

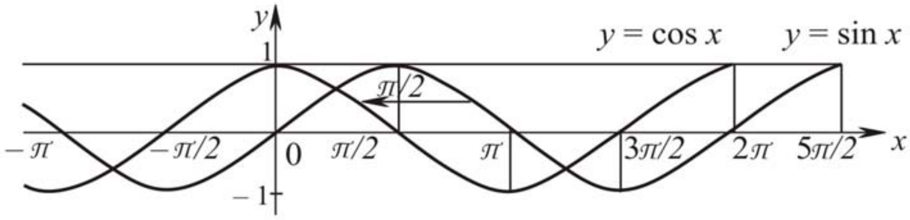

Рис. 6

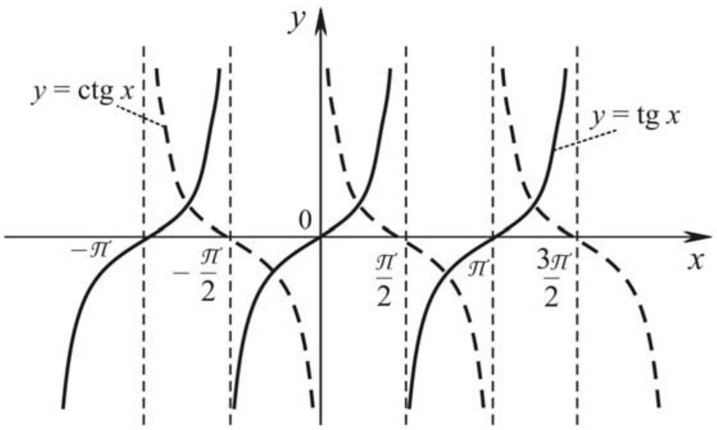

Рис. 7

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ определяются как обратные к функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, заданным соответственно на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $[0,\pi]$, $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(0,\ \pi)$.

Таким образом, равенство $y = \arcsin x$ означает, что $\sin y = x$ и $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$. Аналогично:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x,\ \ 0 \le y \le \pi,$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ \ 0 < y < \pi.$$

Обратные тригонометрические функции однозначны, непрерывны, и их свойства следуют из свойств тригонометрических функций. Область определения для $\arcsin x$ и $\arccos x$ $D = [-1, 1]$, для $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ – R. На рис. 8–11 приведены графики обратных тригонометрических функций.

Обратные тригонометрические функции связаны следующими соотношениями:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{p}{2}, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

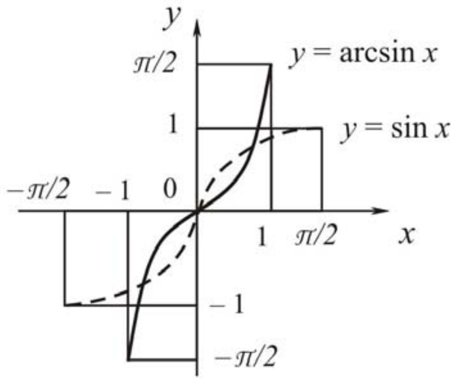

Рис. 8

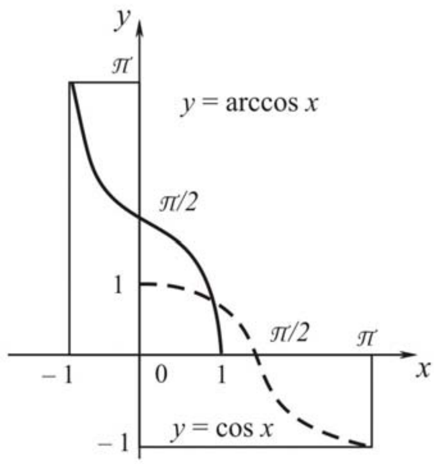

Рис. 9

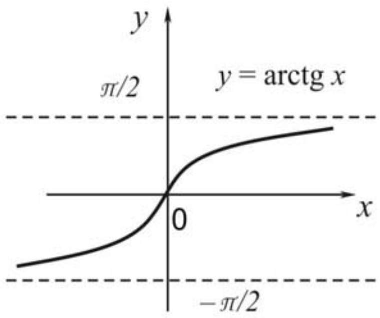

Рис. 10

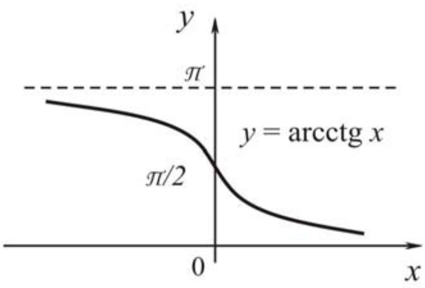

Рис. 11

ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. *Элементарными называются функции, полученные из основных элементарных функций с помощью алгебраических операций и суперпозиций, применяемых конечное число раз.*

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида.

1. *Целая рациональная функция или многочлен*

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные числа, называемые коэффициентами, n – целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена.

2. *Дробно-рациональная функция* (рациональная функция) определяется как отношение двух многочленов

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

3. *Иррациональная функция* – функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с

целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной.

Определение. *Алгебраической функцией называется функция* $y = f(x)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \qquad (1)$$

где $P_0(x),\ P_1(x), \ldots, P_n(x)$ *– некоторые многочлены от x.*

Определение. *Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной, т. е. трансцендентные функции – функции, «выходящие за пределы» алгебраических.*

Представляют интерес, особенно в технических вопросах, следующие элементарные функции:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус,

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус,

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболический тангенс,

$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ – гиперболический котангенс.

Гиперболические функции определены для всех значений x, исключая $\operatorname{cth} x$, который теряет смысл при $x = 0$, свойства гиперболических функций выводятся из свойств функции $y = e^x$, графики приведены на рис. 12, 13.

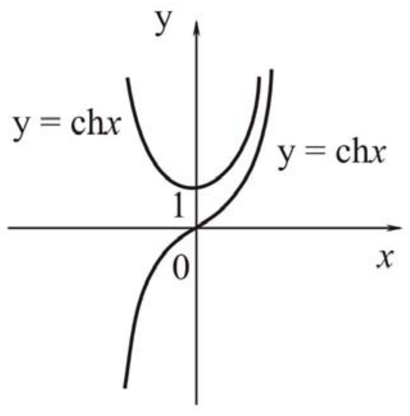

Рис. 12

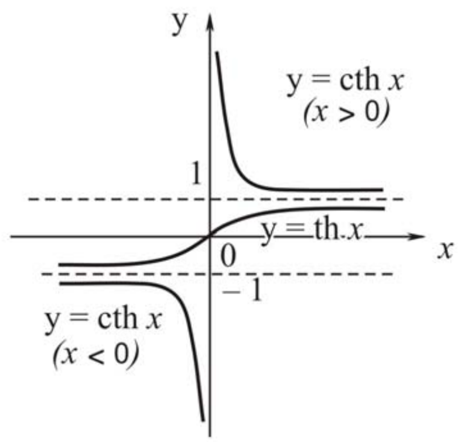

Рис. 13

К элементарным функциям также относятся тригонометрические функции $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ (секанс) и $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (косеканс), которые используются реже, чем основные тригонометрические функции.

А.В. Гобыш
НГТУ, 2016