

### Тема 5. Расчет трехфазных цепей с несимметричной системой ЭДС. Основы метода симметричных составляющих

Основное применение метод симметричных составляющих получил при расчете трехфазных цепей с несимметричной системой фазных напряжений (ЭДС), при симметричной динамической нагрузке (первый тип задач) или при исследовании несимметричных, в частности аварийных, режимов в трехфазных системах с симметричной системой ЭДС (второй тип задач).

Рассматривая метод симметричных составляющих, ограничимся только первым типом задач, т.е. расчетом трехфазных цепей с симметричной динамической нагрузкой и несимметричной системой фазных ЭДС.

Суть метода симметричных составляющих состоит в том, что несимметричную трехфазную систему токов или напряжений на основании принципа наложения можно представить в виде суммы трех симметричных систем, отличающихся друг от друга порядком чередования фаз, начальными фазами и амплитудными значениями величин. В результате получаем симметричную трехфазную систему, в которой действует заданная несимметричная система напряжений (ЭДС).

#### Задача 5.1

Разложить несимметричную систему фазных напряжений, заданных на рис. 5.1, на симметричные составляющие. Найти симметричные составляющие линейных напряжений, если модули фазных напряжений  $U_A = U_B = U_C = 130$  В. Построить векторы систем прямой, обратной и нулевой последовательности чередования фаз.

#### Решение

1. Система заданных фазных напряжений в соответствии с рис. 5.1 может быть представлена в комплексной форме для действующих значений величин:

$$\underline{U}_A = 130 \angle 0^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_B = 130 \angle -180^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 130 \angle 90^\circ \text{ В}.$$

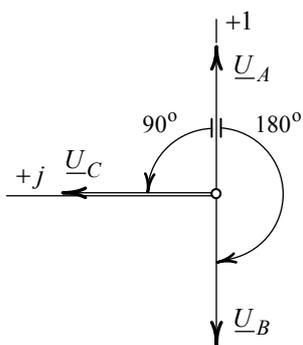


Рис. 5.1

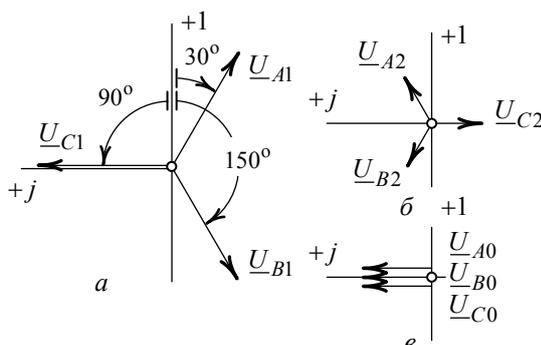


Рис. 5.2

2. По формуле разложения вычислим симметричные составляющие фазных напряжений прямой последовательности чередования фаз.

Для фазы  $A_1$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A1} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a \underline{U}_B + a^2 \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} (130 \angle 0^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 130 \angle -180^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 130 \angle 90^\circ) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left( 130 \underline{0^\circ} + 130 \underline{-60^\circ} + 130 \underline{-30^\circ} \right) = 118,4 \underline{-30^\circ} \text{ В.}$$

Для фаз  $B_1$  и  $C_1$  симметричные составляющие фазных напряжений определим с помощью фазного множителя, как

$$\underline{U}_{B1} = a^2 \underline{U}_{A1} = e^{-j120^\circ} \cdot 118,4 \underline{-30^\circ} = 118,4 \underline{-150^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{C1} = a \underline{U}_{A1} = e^{j120^\circ} \cdot 118,4 \underline{-30^\circ} = 118,4 \underline{90^\circ} \text{ В.}$$

3. Симметричные составляющие фазных напряжений обратной последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A2} &= \frac{1}{3} \left( \underline{U}_A + a^2 \underline{U}_B + a \underline{U}_C \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 130 \underline{0^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 130 \underline{-180^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 130 \underline{-90^\circ} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 130 \underline{0^\circ} + 130 \underline{60^\circ} + 130 \underline{30^\circ} \right) = 31,7 \underline{30^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Для фаз  $B_2$  и  $C_2$ :

$$\underline{U}_{B2} = a \underline{U}_{A2} = e^{j120^\circ} \cdot 31,7 \underline{30^\circ} = 31,7 \underline{150^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{C2} = a^2 \underline{U}_{A2} = e^{-j120^\circ} \cdot 31,7 \underline{30^\circ} = 31,7 \underline{-90^\circ} \text{ В.}$$

4. Симметричные составляющие фазных напряжений нулевой последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A0} = \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{C0} &= \frac{1}{3} \left( \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 130 \underline{0^\circ} + 130 \underline{-180^\circ} + 130 \underline{90^\circ} \right) = 43,3 \underline{90^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

5. Симметричные составляющие линейных напряжений найдем через разности фазных напряжений:

- прямой последовательности чередования фаз:

$$\underline{U}_{AB1} = \underline{U}_{A1} - \underline{U}_{B1} = \sqrt{3} \underline{U}_{A1} e^{j30^\circ} = \sqrt{3} \cdot 118,4 \underline{-30^\circ} \cdot e^{j30^\circ} = 205,1 \underline{0^\circ} \text{ В,}$$

тогда

$$\underline{U}_{BC1} = a^2 \underline{U}_{AB1} = e^{-j120^\circ} \cdot 205,1 \underline{0^\circ} = 205,1 \underline{-120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA1} = a \underline{U}_{AB1} = e^{j120^\circ} \cdot 205,1 \underline{0^\circ} = 205,1 \underline{120^\circ} \text{ В;}$$

- обратной последовательности чередования фаз:

$$\underline{U}_{AB2} = \underline{U}_{A2} - \underline{U}_{B2} = \sqrt{3} \underline{U}_{A2} e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \cdot 31,7 \underline{30^\circ} \cdot e^{-j30^\circ} = 54,9 \underline{0^\circ} \text{ В,}$$

тогда

$$\underline{U}_{BC2} = a \underline{U}_{AB2} = e^{j120^\circ} \cdot 54,9 \underline{0^\circ} = 54,9 \underline{120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA2} = a^2 \underline{U}_{AB2} = e^{-j120^\circ} \cdot 54,9 \underline{0^\circ} = 54,9 \underline{-120^\circ} \text{ В;}$$

- нулевой последовательности чередования фаз:

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{U}_{BC0} = \underline{U}_{CA0} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{B0} = 0.$$

6. Векторы систем фазных напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей чередования фаз, построенные в масштабе на комплексной плоскости, приведены на рис. 5.2, а, б, в.

### Задача 5.2

Разложить несимметричную систему линейных напряжений, заданных на рис. 5.3, на симметричные составляющие, если модули линейных напряжений  $U_{AB} = U_{CA} = 311$  В,  $U_{BC} = 440$  В. По найденным симметричным составляющим построить треугольник заданных несимметричных напряжений.

### Решение

1. Примем комплексы действующих значений линейных напряжений в соответствии с рис. 5.3:

$$\underline{U}_{AB} = 311 \angle 45^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_{BC} = 440 \angle -90^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_{CA} = 311 \angle 135^\circ \text{ В}.$$

2. По формуле разложения вычислим симметричные составляющие линейных напряжений прямой последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB1} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + a \underline{U}_{BC} + a^2 \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3} (311 \angle 45^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 440 \angle -90^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 311 \angle 135^\circ) = 347 \angle 30^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

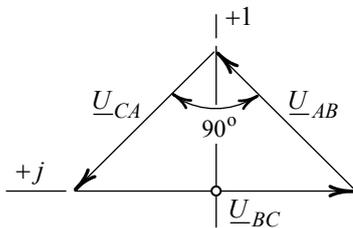


Рис. 5.3

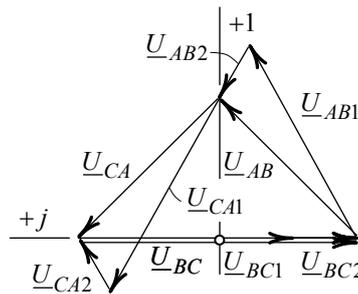


Рис. 5.4

Для линейных напряжений  $\underline{U}_{BC1}$  и  $\underline{U}_{CA1}$ :

$$\underline{U}_{BC1} = a^2 \underline{U}_{AB1} = e^{-j120^\circ} \cdot 347 \angle 30^\circ = 347 \angle -90^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA1} = a \underline{U}_{AB1} = e^{j120^\circ} \cdot 347 \angle 30^\circ = 347 \angle 150^\circ \text{ В}.$$

3. Симметричные составляющие линейных напряжений обратной последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB2} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3} (311 \angle 45^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 440 \angle -90^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 311 \angle 135^\circ) = 93 \angle 150^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

Для линейных напряжений  $\underline{U}_{BC2}$  и  $\underline{U}_{CA2}$ :

$$\underline{U}_{BC2} = a \underline{U}_{AB2} = e^{j120^\circ} \cdot 93 \angle 150^\circ = 93 \angle 270^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA2} = a^2 \underline{U}_{AB2} = e^{-j120^\circ} \cdot 93 \angle 150^\circ = 93 \angle 30^\circ \text{ В.}$$

4. Симметричные составляющие линейных напряжений нулевой последовательности чередования фаз при соединении источников по схеме треугольник равны нулю:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB0} = \underline{U}_{BC0} = \underline{U}_{CA0} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}) = \\ &= \frac{1}{3}(311 \angle 45^\circ + 440 \angle -90^\circ + 311 \angle 135^\circ) = 0 \text{ В.} \end{aligned}$$

5. Треугольник несимметричной системы линейных напряжений, построенный по найденным симметричным составляющим напряжений, приведен на рис. 5.4.

### Задача 5.3

К трехфазному генератору с несимметричной системой фазных ЭДС, заданной на рис. 5.5, а, подключена симметричная нагрузка, соединенная звездой с нейтральным проводом (рис. 5.5, б). Определить комплексы действующих значений токов, пользуясь методом симметричных составляющих, если модули фазных ЭДС равны  $E_A = E_C = 220 \text{ В}$ ,  $E_B = 100 \text{ В}$ , сопротивления фаз нагрузки  $Z_H = 6 + j8 \text{ Ом}$ , сопротивление нейтрали  $Z_0 = 2 - j8 \text{ Ом}$ .

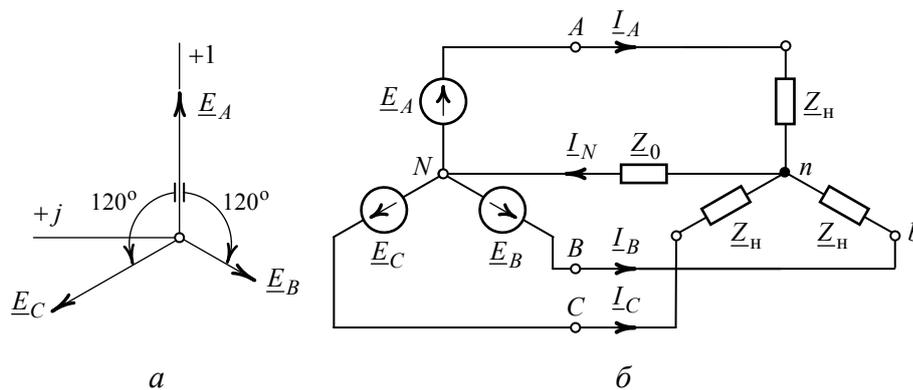


Рис. 5.5

### Решение

1. Комплексы действующих значений фазных ЭДС несимметричной системы (рис. 5.5, а):

$$\underline{E}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ В}, \quad \underline{E}_B = 100 \angle -120^\circ \text{ В}, \quad \underline{E}_C = 220 \angle 120^\circ \text{ В.}$$

2. По формуле разложения симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей чередования ЭДС фазы А:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{A1} &= \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a \underline{E}_B + a^2 \underline{E}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(220 \angle 0^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 100 \angle -120^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 220 \angle 120^\circ) = 180 \angle 0^\circ \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{E}_{A2} = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a^2 \underline{E}_B + a \underline{E}_C) =$$

$$= \frac{1}{3} \left( 220 \angle 0^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 100 \angle -120^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 220 \angle 120^\circ \right) = 40 \angle 60^\circ \text{ В},$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{A0} &= \frac{1}{3} (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C) = \\ &= \frac{1}{3} (220 \angle 0^\circ + 100 \angle -120^\circ + 220 \angle 120^\circ) = 40 \angle -60^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

Расчет токов выполняем методом наложения. Нагрузка является симметричной ( $U_{nN} = 0$ ), поэтому расчет симметричных составляющих токов достаточно выполнить на одну фазу, например, фазу  $A$ .

Расчетные схемы замещения по фазе  $A$  для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей чередования фаз представлены на рис. 5.6.

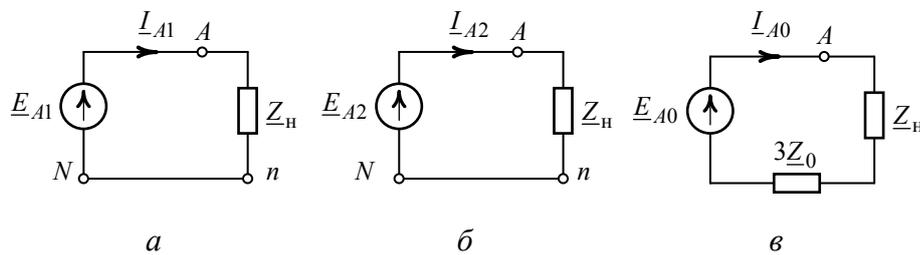


Рис. 5.6

3. Симметричная составляющая комплекса тока  $\underline{I}_{A1}$  от действия ЭДС прямой последовательности чередования фаз (рис. 5.6, а):

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{A1}}{\underline{Z}_H} = \frac{180 \angle 0^\circ}{6 + j8} = 18 \angle -53,1^\circ \text{ А}.$$

4. Симметричная составляющая комплекса тока  $\underline{I}_{A2}$  от действия ЭДС обратной последовательности чередования фаз (рис. 5.6, б):

$$\underline{I}_{A2} = \frac{\underline{E}_{A2}}{\underline{Z}_H} = \frac{40 \angle 60^\circ}{6 + j8} = 4 \angle 6,9^\circ \text{ А}.$$

5. Симметричная составляющая комплекса тока  $\underline{I}_{A0}$  от действия ЭДС нулевой последовательности чередования фаз (рис. 5.6, в):

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_{A0}}{\underline{Z}_H + 3\underline{Z}_0} = \frac{40 \angle -60^\circ}{12 - j16} = 2 \angle -6,9^\circ \text{ А}.$$

6. По методу наложения комплексы действующих значений токов в исходной схеме (рис. 5.5, б) определяются через найденные симметричные составляющие токов как

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 18 \angle -53,1^\circ + 4 \angle 6,9^\circ + 2 \angle -6,9^\circ = 21,9 \angle -40,2^\circ \text{ А},$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = a^2 \underline{I}_{A1} + a \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{-j120^\circ} \cdot 18 \angle -53,1^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 4 \angle 6,9^\circ + 2 \angle -6,9^\circ = 18,3 \angle 177,5^\circ \text{ А}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = a \underline{I}_{A1} + a^2 \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{j120^\circ} \cdot 18 \angle -53,1^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 4 \angle 6,9^\circ + 2 \angle -6,9^\circ = 14,7 \angle 59,4^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

В нейтральном проводе будут замыкаться токи только от ЭДС нулевой последовательности чередования фаз:

$$\underline{I} = 3\underline{I}_{A0} = 3 \cdot 2 \angle -6,9^\circ = 6 \angle -6,9^\circ \text{ А.}$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C - \underline{I}_N &= \\ &= 21,9 \angle -40,2^\circ + 18,3 \angle 177,5^\circ + 14,7 \angle 59,4^\circ - 6 \angle -6,9^\circ \approx 0. \end{aligned}$$

#### Задача 5.4

К источнику с несимметричной системой фазных напряжений, заданных на рис. 5.7, а, подключен трехфазный электрический двигатель, соединенный звездой с нейтральным проводом (рис. 5.7, б). Модули фазных напряжений несимметричного источника равны  $U_A = U_B = U_C = 240 \text{ В}$ . Комплексные сопротивления фаз двигателя токам прямой последовательности  $\underline{Z}_1 = 3 + j9 \text{ Ом}$ , токам обратной последовательности  $\underline{Z}_2 = 3 + j2 \text{ Ом}$  и токам нулевой последовательности  $\underline{Z}_0 = 0,9 + j0,5 \text{ Ом}$ .

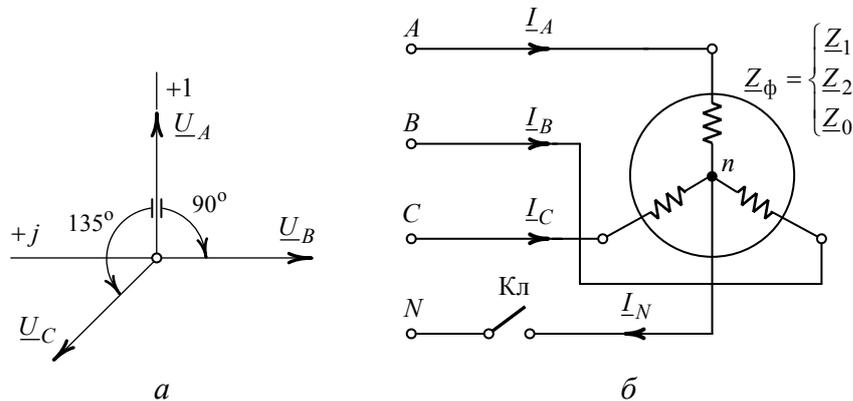


Рис. 5.7

Методом симметричных составляющих рассчитать все токи для разомкнутого и замкнутого положений ключа (Кл), установленного в нейтрали.

#### Решение

1. Комплексы действующих значений фазных напряжений несимметричной системы (рис. 5.7, а):

$$\underline{U}_A = 240 \angle 0^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_B = 240 \angle -90^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 240 \angle 135^\circ \text{ В.}$$

2. Симметричные составляющие напряжений источника прямой, обратной и нулевой последовательностей фазы А:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A1} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a \underline{U}_B + a^2 \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} (240 \angle 0^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 240 \angle -90^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 240 \angle 135^\circ) = 234,5 \angle 15^\circ \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a^2 \underline{U}_B + a \underline{U}_C) =$$

$$= \frac{1}{3} \left( 240 \angle 0^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 240 \angle -90^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 240 \angle 135^\circ \right) = 38,6 \angle -105^\circ \text{ В},$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A0} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} (240 \angle 0^\circ + 240 \angle -90^\circ + 240 \angle 135^\circ) = 33,1 \angle -45^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

3. При разомкнутом положении ключа (Кл) схема (рис. 5.7, б) будет содержать только симметричные составляющие токов прямой и обратной последовательностей. Симметричные составляющие токов нулевой последовательности равны нулю. Так как рассматривается симметричный режим  $\underline{U}_{nN} = 0$ , расчет ведем по одной фазе, например, для фазы *A*. Расчетные схемы замещения фазы *A* для токов прямой и обратной последовательностей чередования фаз приведены на рис. 5.8, а, б.

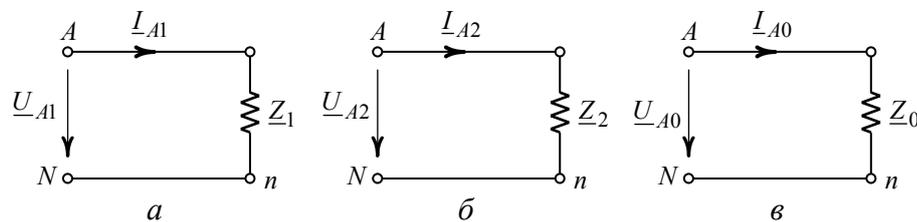


Рис.5.8

Симметричные составляющие токов прямой (рис. 5.8, а) и обратной (рис. 5.8, б) последовательностей фазы *A* по закону Ома составят:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1} = \frac{234,5 \angle 15^\circ}{3 + j9} = 24,72 \angle -56,6^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2} = \frac{38,6 \angle -105^\circ}{3 + j2} = 10,71 \angle -138,7^\circ \text{ А}.$$

По найденным симметричным составляющим находим комплексы действующих значений токов исходной схемы (рис. 5.7, б):

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= 24,72 \angle -56,6^\circ + 10,71 \angle -138,7^\circ + 0 = 28,26 \angle -78,6^\circ \text{ А}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = a^2 \underline{I}_{A1} + a \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{-j120^\circ} \cdot 24,72 \angle -56,6^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 10,71 \angle -138,7^\circ + 0 = 15,34 \angle -161,4^\circ \text{ А}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = a \underline{I}_{A1} + a^2 \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{j120^\circ} \cdot 24,72 \angle -56,6^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 10,71 \angle -138,7^\circ + 0 = \\ &= 33,82 \angle 74,6^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

4. При замкнутом положении ключа (Кл) расчет симметричных составляющих токов прямой и обратной последовательностей чередования фаз алогичен расчету при разомкнутом положении ключа:

$$\underline{I}_{A1} = 24,72 \angle -56,6^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_{A2} = 10,71 \angle -138,7^\circ \text{ A}.$$

В схеме (рис. 5.7, б) появляются токи нулевой последовательности. Расчетная схема замещения фазы  $A$  для токов нулевой последовательности чередования фаз приведена на рис.5.8, в. Симметричная составляющая тока нулевой последовательности фазы  $A$  по закону Ома

$$\underline{I}_{A0} = \frac{\underline{U}_{A0}}{\underline{Z}_0} = \frac{33,1 \angle -45^\circ}{0,9 + j0,5} = 32,15 \angle -74,1^\circ \text{ A}.$$

По методу наложения находим комплексы действующих значений токов исходной схемы (рис. 5.7, б):

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= 24,72 \angle -56,6^\circ + 10,71 \angle -138,7^\circ + 32,15 \angle -74,1^\circ = 60,36 \angle -76,2^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = a^2 \underline{I}_{A1} + a \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{-j120^\circ} \cdot 24,72 \angle -56,6^\circ + e^{j120^\circ} \cdot 10,71 \angle -138,7^\circ + \\ &\quad + 32,15 \angle -74,1^\circ = 36,27 \angle -99,1^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = a \underline{I}_{A1} + a^2 \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = \\ &= e^{j120^\circ} \cdot 24,72 \angle -56,6^\circ + e^{-j120^\circ} \cdot 10,71 \angle -138,7^\circ + \\ &\quad + 32,15 \angle -74,1^\circ = 17,86 \angle 5,42^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Ток в нейтрали

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3 \cdot \underline{I}_{A0} = 3 \cdot 32,15 \angle -74,1^\circ = 96,45 \angle -74,1^\circ \text{ A}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C - \underline{I}_N &= \\ &= 60,36 \angle -76,2^\circ + 36,27 \angle -99,1^\circ + 17,86 \angle 5,42^\circ - 96,45 \angle -74,1^\circ \approx 0. \end{aligned}$$