

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ MathCAD ПРИ РАСЧЕТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рассмотрим основные возможности работы в математической программной среде MathCAD при разложении периодических несинусоидальных кривых напряжений и токов в тригонометрический ряд Фурье, а также приемы, используемые при расчете линейных электрических цепей с несинусоидальными источниками.

### Задача 1

Разложить в тригонометрический ряд периодическую кривую напряжения с амплитудой  $U_m = 100$  В, заданную графически на рис. 1. По результатам разложения, ограничиваясь членами ряда до пятой гармоники включительно, построить результирующую кривую напряжения и отдельных гармоник тригонометрического ряда. Построить амплитудно-частотный спектр заданного напряжения.

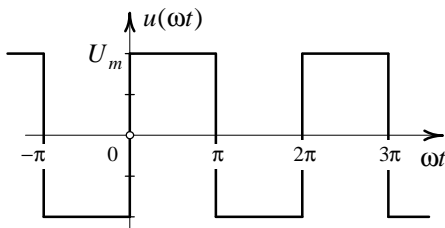


Рис. 1

### Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных :

Амплитуда, В:  $U_m := 100$

Период функции:  $T := 2$

Значения исходной функции по интервалам:

$$0 \leq x < \frac{T}{2} \quad u_1(x) := U_m$$

$$\frac{T}{2} \leq x < T \quad u_2(x) := -U_m$$

Учетный состав гармоник тригонометрического ряда:

$$k := 1, 2.. 5$$

2. Расчет коэффициентов тригонометрического ряда.

2.1. Постоянная составляющая:

$$A_0 := \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} u_1(x) dx + \int_{\frac{T}{2}}^T u_2(x) dx \right)$$

$$A_0 = 0$$

2.2. Амплитуда конусной составляющей k-й гармоники:

$$a(k) := \frac{2}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} u_1(x) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) dx + \int_{\frac{T}{2}}^T u_2(x) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) dx \right)$$

$$a(k) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Амплитуда синусной составляющей k-й гармоники:

$$b(k) := \frac{2}{T} \cdot \left( \int_0^{\frac{T}{2}} u_1(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) dx + \int_{\frac{T}{2}}^T u_2(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) dx \right)$$

$$b(k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{400}{\pi} \\ 0 \\ \frac{400}{3 \cdot \pi} \\ 0 \\ \frac{80}{\pi} \end{pmatrix}$$

3. Частичные суммы тригонометрического ряда:

$$u(x, k) := A_0 + \sum_{k=1}^k (a(k) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x))$$

4. Тригонометрический ряд и его график:

$$k := 5$$

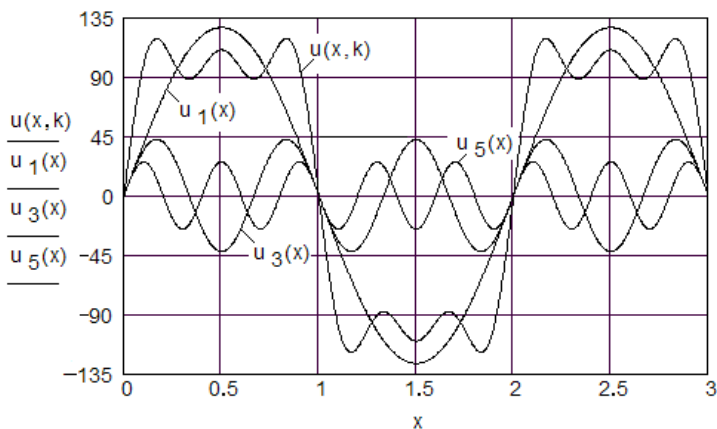
$$u(x, k) \rightarrow \frac{400}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{400}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x) + \frac{80}{\pi} \cdot \sin(5 \cdot \pi \cdot x)$$

Отдельные гармоники тригонометрического ряда:

$$u_1(x) := b(1) \cdot \sin(\pi \cdot x) \rightarrow \frac{400}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$u_3(x) := b(3) \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x) \rightarrow \frac{400}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x)$$

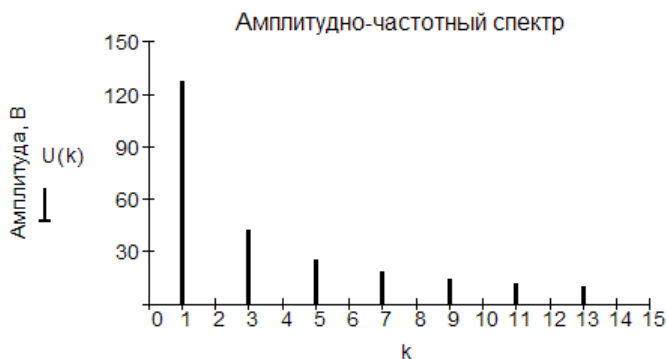
$$u_5(x) := b(5) \cdot \sin(5 \cdot \pi \cdot x) \rightarrow \frac{80}{\pi} \cdot \sin(5 \cdot \pi \cdot x)$$



5. Амплитудно-частотный спектр:

$$k := 0, 1.. 15$$

$$U(k) := \sqrt{a(k)^2 + b(k)^2}$$



## Задача 2

Разложить в тригонометрический ряд периодическую кривую напряжения с амплитудой  $U_m = 160$  В, заданную графически на рис. 2. По временным диаграммам напряжения с учтенным составом гармоник  $k = 3, 5, 10, 20$  оценить влияние отброшенных гармоник тригонометрического ряда. Ограничиваясь в расчетах при разложении в ряд до четвертой гармоники включительно, определить среднее и действующее значения несинусоидального напряжения, а также коэффициенты амплитуды, формы и искажения.

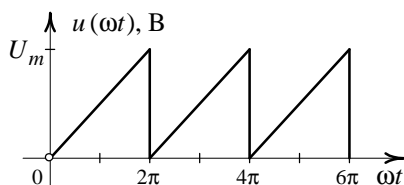


Рис. 2

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Амплитуда, В:  $U_m := 160$

Период функции:  $T := 2$

Значения исходной функции по интервалам:

$$0 \leq x < T \quad u(x) := U_m \frac{x}{2}$$

Учетный состав гармоник тригонометрического ряда:  $k := 1, 2.. 4$

2. Расчет коэффициентов тригонометрического ряда.

2.1. Постоянная составляющая:

$$A_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(x) dx$$

$$A_0 \rightarrow 80$$

2.2. Амплитуда косинусной составляющей k-й гармоники:

$$a(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(x) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) dx$$

$$a(k) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Амплитуда синусной составляющей k-й гармоники:

$$b(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) dx$$

$$b(k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-160}{\pi} \\ \frac{-80}{\pi} \\ \frac{-160}{3 \cdot \pi} \\ \frac{-40}{\pi} \end{pmatrix}$$

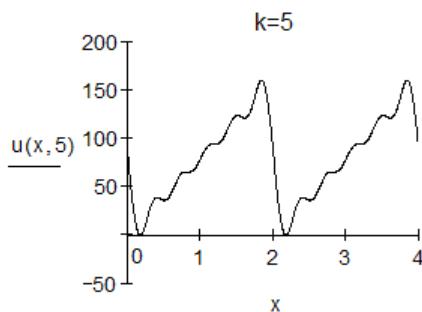
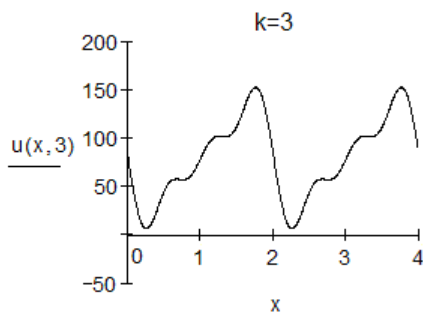
3. Частичные суммы тригонометрического ряда:

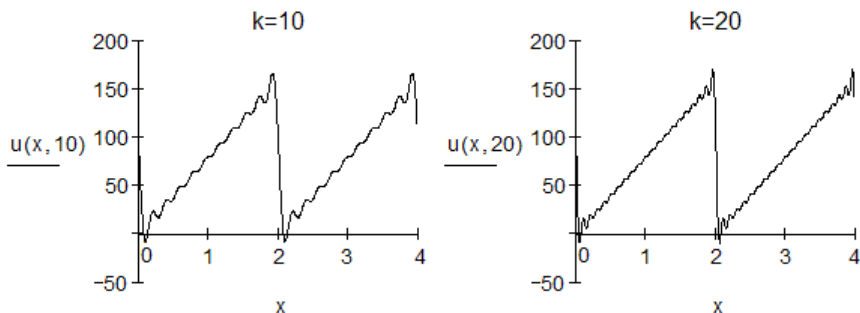
$$u(x, k) := A_0 + \sum_{k=1}^k (a(k) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x))$$

4. Тригонометрический ряд с учтенным составом гармоник  $k = 4$ :

$$u(x, 4) \rightarrow 80 - \frac{160}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x) - \frac{80}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot x) - \frac{160}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x) - \frac{40}{\pi} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot x)$$

5. Графики тригонометрического ряда Фурье с учтенным составом гармоник  $k = 3, 5, 10, 20$ :





6. Среднее значение несинусоидального напряжения, В:

$$U_0 := A_0$$

$$U_0 = 80$$

7. Действующее значение несинусоидального напряжения, В:

$$U := \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{b(1)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b(2)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b(3)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b(4)}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U = 90.81$$

8. Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальной кривой.

8.1. Коэффициент амплитуды:

$$k_a := \frac{U_m}{U}$$

$$k_a = 1.762$$

8.2. Коэффициент формы:

$$k_\Phi := \frac{U}{U_0}$$



$$k_{\phi} = 1.135$$

### 8.3. Коэффициент искажения.

Действующее значение напряжения основной гармоники:  $U_1 := \frac{|b(1)|}{\sqrt{2}}$

Коэффициент искажения:

$$k_{\text{И}} := \frac{U_1}{U}$$

$$k_{\text{И}} = 0.397$$

## Задача 3

Определить коэффициенты тригонометрического ряда периодической кривой напряжения с амплитудой  $U_m = 300 \text{ В}$ , получаемую в результате однополупериодного выпрямления (рис. 3). По результатам вычислений, ограничиваясь членами ряда до четвертой гармоники включительно, построить результирующую кривую напряжения.

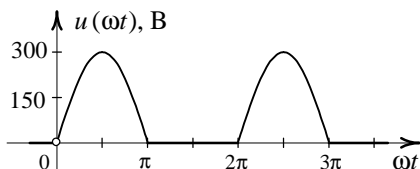


Рис. 3

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных:

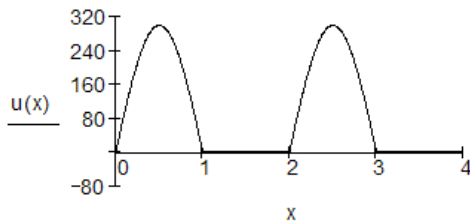
Амплитуда, В:  $U_m := 300$

Период функции:  $T := 2$

Исходная функция напряжения по интервалам:

$$u(x) := \begin{cases} U_m \cdot \sin(\pi \cdot x) & \text{if } \sin(\pi \cdot x) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

График исходной функции напряжения по интервалам:



2. Подпрограмма вычисления коэффициентов разложения в ряд Фурье с применением их интегрального представления:

$$\text{FC}(u, N) := \left( \begin{array}{l} R^{(0)} \leftarrow \left( \begin{array}{c} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) dx \\ 0 \end{array} \right) \\ \text{for } k \in 1..N \\ R^{(k)} \leftarrow \left( \begin{array}{c} \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) dx \\ \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) dx \end{array} \right) \\ (R)^T \end{array} \right)$$

Учетное число гармоник ряда:  $N := 4$

Модуль вычисления коэффициентов Фурье

$$\text{res} := \text{FC}(u, N) \quad A := \text{res}^{(0)} \quad B := \text{res}^{(1)}$$

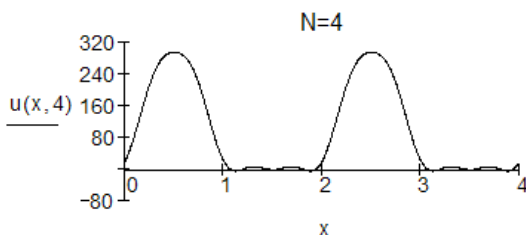
Коэффициенты Фурье:

$$A = \begin{pmatrix} 95.493 \\ -0 \\ -63.662 \\ -0 \\ -12.732 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ -0 \end{pmatrix}$$

3. Формула синтеза функции по ряду Фурье:

$$u(x, k) := A_0 + \sum_{k=1}^N (A_k \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x))$$

График ряда Фурье N-й степени с учтенным числом гармоник:



4. Тригонометрический ряд:

$$u(x) := 95.493 + 150 \cdot \sin(\pi \cdot x) - 63.662 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) - 12.732 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot x)$$

### Задача 4

Вычислить коэффициенты тригонометрического ряда периодической кривой напряжения с амплитудой  $U_m = 200$  В, заданной в виде импульсов треугольной формы (рис. 4). При вычислении коэффициентов ограничиться членами ряда до девятой гармоники включительно.

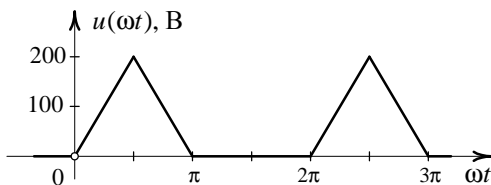


Рис. 4

### Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных:

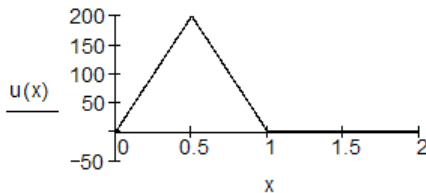
Амплитуда, В:  $U_m := 200$

Период функции :  $T := 2$

Исходная функция напряжения по интервалам:

$$u(x) := \begin{cases} 2 \cdot U_m \cdot x & \text{if } 0 \leq x < \frac{T}{4} \\ 2 \cdot U_m \cdot (1 - x) & \text{if } \frac{T}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

График исходной функции напряжения по интервалам:



2. Подпрограмма вычисления коэффициентов разложения в ряд Фурье с применением их интегрального представления:

$$FC(u, N) := \left( \begin{array}{l} R^{(0)} \leftarrow \left( \begin{array}{c} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(x) dx \\ 0 \end{array} \right) \\ \text{for } k \in 1..N \\ R^{(k)} \leftarrow \left( \begin{array}{c} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(x) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) dx \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(x) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) dx \end{array} \right) \\ (R)^T \end{array} \right)$$

Учетное число гармоник ряда: N := 9

Модуль вычисления коэффициентов Фурье:

$$res := FC(u, N) \quad A := res^{(0)} \quad B := res^{(1)}$$

Коэффициенты Фурье:

A =

	0
0	50
1	0
2	-40.528
3	0
4	0
5	-0
6	-4.503
7	0
8	-0
9	-0

B =

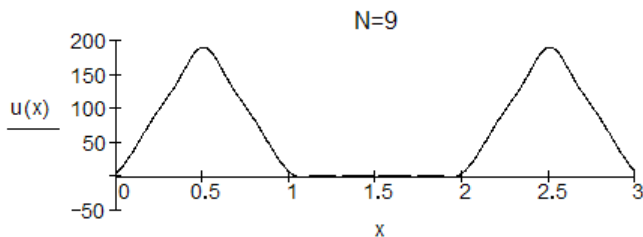
	0
0	0
1	81.057
2	0
3	-9.006
4	-0
5	3.242
6	0
7	-1.654
8	-0
9	1.001

3. Формула синтеза функции по ряду Фурье:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$u(x) := A_0 + \sum_{k=1}^N (A_k \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x))$$

График ряда Фурье N-й степени с учтенным числом гармоник:



### Задача 5

Графоаналитическим методом разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую кривую напряжения (рис. 5) с периодом  $T = 0,02$  с. При разложении ограничиться первыми тремя гармониками ряда.

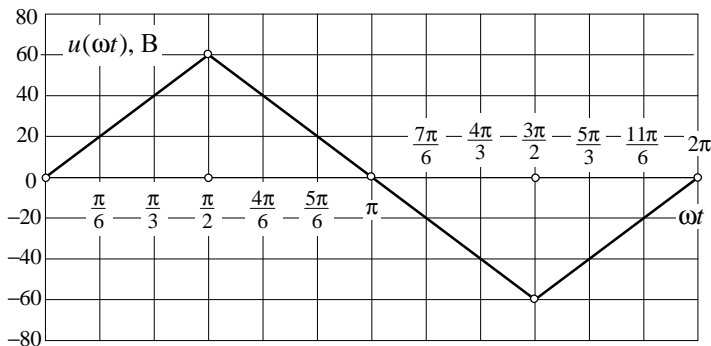


Рис. 5

## Решение

Учитывая симметрию периодической кривой напряжения (рис. 5) относительно оси абсцисс, в разложении достаточно ограничиться первым полупериодом от 0 до  $\pi$ .

Период функции  $u(\omega t)$ , равный  $2\pi$ , разбиваем на  $n=12$  равных частей. Значение ординат функции  $u(\omega t)$  в точках деления представляем в удобной для анализа табличной форме (табл. 1).

Таблица 1

$p \frac{2\pi}{n} = p \frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f_p(\omega t)$ , В	0	20	40	60	40	20

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

### 1. Ввод исходных данных:

Период функции напряжения, с:  $T := 0.02$

Циклическая частота, рад:

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \omega = 314.16$$

### 2. Замена определенного интегралла конечной суммой:

#### 2.1. Количество точек на периоде:

$$n := 12$$

#### 2.2. Количество точек на половине периода:

$$\frac{n}{2} = 6$$

#### 2.3. Индексная переменная точек на половине периода:

$$p := 0..5$$



2.4. Номера определяемых гармоник тригонометрического ряда:

$$k := 1, 3.. 5 \quad k =$$

1
3
5

2.5. Вектор  $f$  (размера  $6 \times 1$ ) заданной кривой за половину периода:

$$f := (0 \quad 20 \quad 40 \quad 60 \quad 40 \quad 20)^T$$

3. Формирование матрицы  $SIN$  синусных коэффициентов:

$$SIN_{k,p} := \sin\left(k \cdot p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

Матрица  $B_k$  синусных коэффициентов для гармоник  $k = 1, 3$  и  $5$ :

$$B := \frac{4}{n} \cdot SIN \cdot f \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 49.76 \\ 0 \\ -6.67 \\ 0 \\ 3.57 \end{pmatrix}$$

4. Формирование матрицы  $COS$  косинусных коэффициентов:

$$COS_{k,p} := \cos\left(k \cdot p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

Матрица  $A_k$  косинусных коэффициентов для гармоник  $k = 1, 3$  и  $5$ :

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$A := \frac{4}{n} \cdot \cos \cdot f \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Амплитуды и фазные углы напряжений для гармоник  $k = 1, 3$  и  $5$ :

$$Um_k := \sqrt{(A_k)^2 + (B_k)^2} \quad \text{Faza}_k := \text{atan}\left(\frac{A_k}{B_k}\right)$$

Определение четверти угла:  $\psi_k := \begin{cases} \text{Faza}_k & \text{if } B_k \geq 0 \\ \pi + \text{Faza}_k & \text{if } B_k < 0 \end{cases}$

Матрица амплитуд и матрица начальных фаз гармоник  $k = 1, 3$  и  $5$ .

Амплитуда, В:

Начальная фаза, град:

$$Um = \begin{pmatrix} 0 \\ 49.8 \\ 0 \\ 6.7 \\ 0 \\ 3.6 \end{pmatrix} \quad \frac{\psi}{\text{deg}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Амплитуды (В) и начальные фазы (град.) гармоник  $k = 1, 3$  и  $5$ :

$$k := 1 \quad \frac{\psi_k}{\text{deg}} = 0 \\ Um_k = 49.8$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$k := 3$$
$$Um_k = 6.7 \quad \frac{\psi_k}{\text{deg}} = 180$$

$$k := 5$$
$$Um_k = 3.6 \quad \frac{\psi_k}{\text{deg}} = 0$$

Тригонометрический ряд:

$$u(t) := 49.8 \cdot \sin(\omega \cdot t) + 6.7 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 180 \cdot \text{deg}) + 3.6 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t)$$

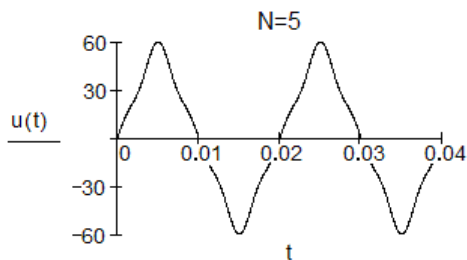
6. Формула синтеза функции по ряду Фурье и ее график:

$$N := 5$$

$$k := 1..N$$

$$u(t) := Um_0 + \sum_k Um_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k)$$

График ряда Фурье с учтенным числом гармоник:



## Задача 6

С использованием графоаналитического метода разложить в ряд Фурье периодическую кривую напряжения, заданную графически на

рис. 6 с периодом  $T = 0,02$  с. Определить постоянную составляющую, а также амплитуды и начальные фазы до пятой гармоники включительно.

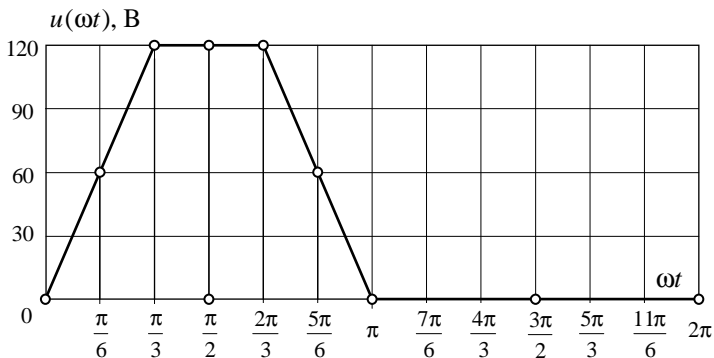


Рис. 6

### Решение

Период функции  $u(\omega t)$  разбиваем на  $n=12$  равных частей. Значения ординат функции  $u(\omega t)$  в точках деления представим в табличной форме (табл. 2).

Таблица 2

$p \frac{2\pi}{n} = p \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi \dots \frac{11\pi}{6}$
$f_p(\omega t), В$	0	60	120	120	120	60	0

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

#### 1. Ввод исходных данных:

Период функции напряжения, с:  $T := 0.02$

Циклическая частота, рад:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \omega = 314.16$$

2. Замена определенного интеграла конечной суммой.

2.1. Количество точек на периоде:

$$n := 12$$

2.2. Индексная переменная точек на периоде:

$$p := 0..11$$

2.3. Номера определяемых гармоник тригонометрического ряда:

$$k := 1, 2..5 \quad k =$$

1
2
3
4
5

2.4. Вектор  $f$  (размера 12x1) заданной кривой за период:

$$f := (0 \ 60 \ 120 \ 120 \ 120 \ 60 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

3. Постоянная составляющая ряда:

$$U_0 := \frac{1}{n} \cdot \sum f$$

$$U_0 = 40$$

4. Формирование матрицы SIN синусных коэффициентов:

$$\text{SIN}_{k,p} := \sin\left(k \cdot p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

Матрица  $B_k$  синусных коэффициентов для гармоник  $k = 1, 2 \dots 5$ :

$$B := \frac{2}{n} \cdot \text{SIN} \cdot f \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 64.64 \\ 0 \\ -0 \\ 0 \\ -4.64 \end{pmatrix}$$

5. Формирование матрицы COS косинусных коэффициентов:

$$\text{COS}_{k,p} := \cos\left(k \cdot p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

Матрица  $A_k$  косинусных коэффициентов для гармоник  $k = 1, 2 \dots 5$ :

$$A := \frac{2}{n} \cdot \text{COS} \cdot f \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ -10 \\ -0 \end{pmatrix}$$

6. Амплитуды и фазные углы напряжений для гармоник  $k = 1, 2 \dots 5$ :

$$Um_k := \sqrt{(A_k)^2 + (B_k)^2} \quad \text{Faza}_k := \text{atan}\left(\frac{A_k}{B_k}\right)$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Определение четверти угла:  $\psi_k := \begin{cases} \text{Faza}_k & \text{if } B_k > 0 \\ \pi + \text{Faza}_k & \text{if } B_k < 0 \end{cases}$

Матрица амплитуд и матрица начальных фаз гармоник  $k = 1, 2 \dots 5$ :

$$U_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 64.6 \\ 30 \\ 0 \\ 10 \\ 4.6 \end{pmatrix} \quad \frac{\psi}{\text{deg}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \\ 105.4 \\ -90 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Амплитуды и начальные фазы (град.) гармоник  $k = 1, 2 \dots 5$ :

Амплитуда, В:

Начальная фаза, град:

$U_{m_k} =$
64,64
30
0
10
4,64

$\frac{\psi_k}{\text{deg}} =$
0
-90
105,42
-90
180

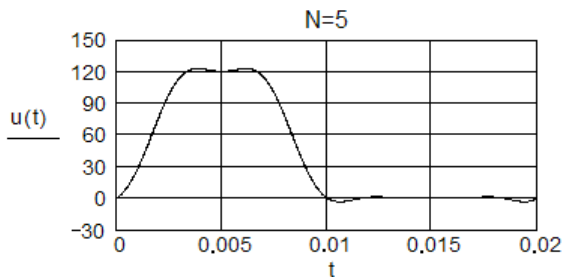
7. Формула синтеза функции по ряду Фурье и ее график:

$$N := 5$$

$$k := 1..N$$

$$u(t) := U_0 + \sum_k U_{m_k} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k)$$

График ряда Фурье с учтенным числом гармоник:



## Задача 7

Периодическая несинусоидальная кривая тока задана уравнением

$$i(\omega t) = 9,6 \sin(\omega t + 50^\circ) + 3,1 \sin(3\omega t - 80^\circ) + 1,7 \sin(5\omega t + 130^\circ) \text{ А.}$$

Построить в масштабе временные графики заданной несинусоидальной кривой тока и ее гармонических составляющих, если частота основной гармоники тока  $f = 50$  Гц. Вычислить действующее значение тока и коэффициент искажения.

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

### 1. Ввод исходных данных:

Основная частота несинусоидального тока, Гц:  $f := 50$

Аналитическое выражение несинусоидального тока:

$$i(t) := 9.6 \cdot \sin(\omega \cdot t + 50 \text{ deg}) + 3.1 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t - 80 \cdot \text{deg}) + 1.7 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + 130 \cdot \text{deg})$$

### 2. Расчет циклической частоты, рад:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.16$$



3. Гармонические составляющие тригонометрического ряда и их комплексы амплитудных значений:

Первой гармоники:

$$i_1(t) := 9.6 \cdot \sin(\omega \cdot t + 50 \cdot \text{deg}) \quad I_{m1} := 9.6 \cdot e^{j \cdot 50 \text{deg}}$$

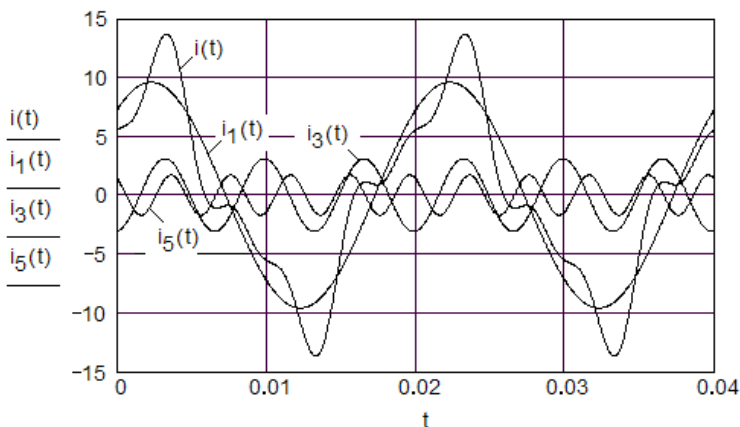
Третьей гармоники:

$$i_3(t) := 3.1 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t - 80 \cdot \text{deg}) \quad I_{m3} := 3.1 \cdot e^{-j \cdot 80 \text{deg}}$$

Пятой гармоники:

$$i_5(t) := 1.7 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + 130 \cdot \text{deg}) \quad I_{m5} := 1.7 \cdot e^{j \cdot 130 \text{deg}}$$

4. Временные графики периодической кривой тока и его отдельных гармонических составляющих на интервале двух периодов:



5. Действующее значение несинусоидального тока, А:

$$I := \sqrt{\left(\frac{|I_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m3}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m5}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I = 7.23$$

#### 6. Коэффициент искажения.

Действующее значение тока основной гармоники:  $I_1 := \frac{|I_{m1}|}{\sqrt{2}}$

Коэффициент искажения:

$$k_{И} := \frac{I_1}{I}$$

$$k_{И} = 0.938$$

### Задача 8

Определить амплитуды эквивалентных синусоид напряжения и тока, а также угол сдвига фаз между ними, если:

$$u(\omega t) = 39 \sin \omega t - 21 \sin 2\omega t + 12 \sin 3\omega t \text{ В};$$

$$i(\omega t) = 18,2 \sin(\omega t + 25^\circ) + 7,9 \sin(2\omega t - 167^\circ) + 2,7 \sin(3\omega t + 95^\circ) \text{ А}.$$

Частота основной гармоники  $f = 50$  Гц. Выполнить замену несинусоидального тока и напряжения эквивалентными синусоидальными и построить временные зависимости их мгновенных значений.

### Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

#### 1. Ввод исходных данных:

Частота несинусоидального тока, Гц:  $f := 50$

Расчет циклической частоты, рад:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.16$$

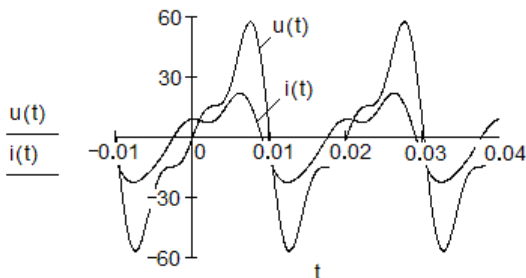
Выражения несинусоидальных величин напряжения и тока:

$$u(t) := 39 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 21 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + 12 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$i(t) := 18.2 \cdot \sin(\omega \cdot t + 25 \cdot \text{deg}) + 7.9 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t - 167 \cdot \text{deg}) + 2.7 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 95 \cdot \text{deg})$$

2. Временные графики периодической кривой напряжения и тока.



3. Комплексы амплитудных значений гармоник напряжения и тока.

Первой гармоники:

$$U_{m1} := 39 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad I_{m1} := 18.2 \cdot e^{j \cdot 25 \text{deg}}$$

Второй гармоники:

$$U_{m2} := -21 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad I_{m2} := 7.9 \cdot e^{-j \cdot 167 \text{deg}}$$

Третьей гармоники:

$$U_{m3} := 12 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad I_{m3} := 2.7 \cdot e^{j \cdot 95 \text{deg}}$$

4. Действующие значения эквивалентных синусоид напряжения и тока:

Действующее значение напряжения, В:

$$U := \sqrt{\left(\frac{|U_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m2}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m3}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U = 32.45$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Действующее значение тока, А:

$$I := \sqrt{\left(\frac{|I_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m2}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m3}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I = 14.16$$

5. Полная мощность, ВА:

$$S := U \cdot I$$

$$S = 459.45$$

6. Активная мощность, Вт:

$$P := \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m2}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m3}}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$P = 401.06$$

7. Угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами напряжения и тока (коэффициент мощности):

$$\lambda := \frac{P}{S} \quad \lambda = 0.873$$

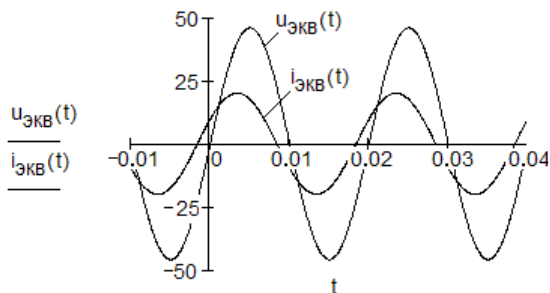
$$\text{Угол, град.:} \quad \lambda := \arccos\left(\frac{P}{S}\right)$$

$$\frac{\lambda}{\text{deg}} = 29.2$$

8. Эквивалентные синусоиды напряжения и тока:

$$u_{\text{ЭКВ}}(t) := 32.45 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_{\text{ЭКВ}}(t) := 14.16 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 29.2 \cdot \text{deg})$$



## Задача 9

Напряжение фазы А симметричного трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой, составляет  $u_A(\omega t) = 160 \sin \omega t - 18 \sin 3\omega t + 6 \sin 5\omega t$  В. Построить в масштабе временные графики фазных напряжений генератора, если частота основной гармоники  $f = 50$  Гц. Вычислить действующие значения фазных и линейных напряжений.

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных:

Частота несинусоидального напряжения, Гц:  $f := 50$

Расчет циклической частоты, рад:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.16$$

Напряжение фазы А трехфазного генератора:

$$u_A(t) := 160 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 18 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + 6 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t)$$

Комплексы амплитудных значений гармоник фазы А генератора, В:

$$U_{m1} := 160 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad U_{m3} := -18 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad U_{m5} := 6 \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}}$$

2. Напряжение фазы В и С генератора, В:

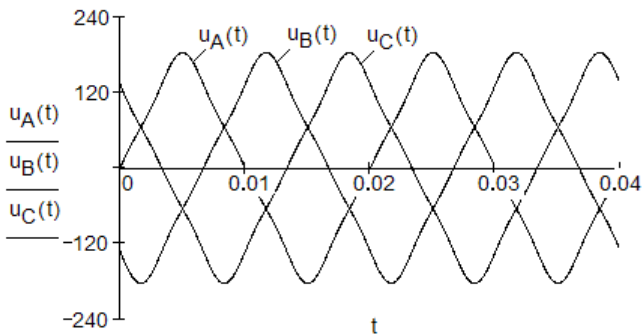
$$u_B(t) := \sum_{k=1}^5 U_{m_k} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$u_B(t) := 160 \cdot \sin(\omega \cdot t - 120 \cdot \text{deg}) - 18 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t - 0 \cdot \text{deg}) + 6 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t - 240 \cdot \text{deg})$$

$$u_C(t) := \sum_{k=1}^5 U_{m_k} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$u_C(t) := 160 \cdot \sin(\omega \cdot t + 120 \cdot \text{deg}) - 18 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 0 \cdot \text{deg}) + 6 \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + 240 \cdot \text{deg})$$

3. Временные графики напряжений фаз генератора.



4. Действующие значения фазных и линейных напряжений генератора, В:

$$U_{\phi} := \sqrt{\left(\frac{|U_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m3}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m5}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U_{\phi} = 113.93$$

$$U_{\Pi} := \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{|U_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{|U_{m5}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U_{\Pi} = 196.1$$

## Задача 10

К электрической цепи, схема которой изображена на рис. 7, а, приложено периодическое несинусоидальное напряжение (рис. 7, б), амплитуда которого  $U_m = 120$  В. Сопротивления элементов цепи по частоте основной гармоники:  $r = 12$  Ом,  $x_L = 18$  Ом,  $x_C = 24$  Ом. Ограничиваясь при разложении функции в тригонометрический ряд до четвертой гармоники включительно, рассчитать мгновенное значение тока  $i_1(t)$  на входе. Определить показания приборов электромагнитной системы, активную, реактивную и полную мощность, мощность искажений.

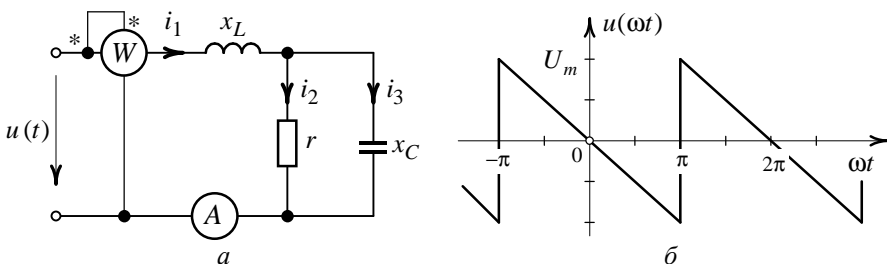


Рис. 7

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

### 1. Ввод исходных данных:

Амплитуда, В:  $U_m := 120$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Период функции:  $T := 2$

Значения исходной функции на интервале:

$$-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \quad u(t) := \frac{-2 \cdot U_m}{T} \cdot t$$

Сопротивления Ом:  $r := 12 \quad X_L := 18 \quad X_C := 24$

2. Разложение в тригонометрический ряд Фурье.

Постоянная составляющая:

$$A_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt$$

$$A_0 \rightarrow 0$$

Амплитуда косинусной составляющей k-й гармоники:

$$a(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot t) dt$$

$$a(k) \rightarrow 0$$

Амплитуда синусной составляющей k-й гармоники:

$$b(k) := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot t) dt$$

$$b(k) \rightarrow 240 \cdot \frac{-\sin(k \cdot \pi) + k \cdot \pi \cdot \cos(k \cdot \pi)}{k^2 \cdot \pi^2}$$

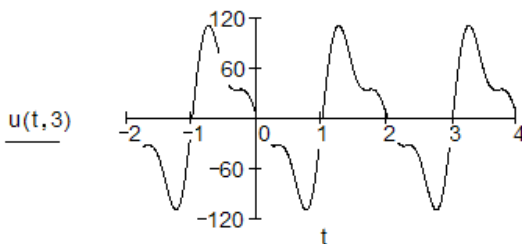


Частичные суммы тригонометрического ряда:

$$u(t, k) := A_0 + \sum_{k=1}^k (a(k) \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot t) + b(k) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot t))$$

Тригонометрический ряд с учтенным составом гармоник  $k = 3$  и его график:

$$u(t, 3) \rightarrow \frac{-240}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot t) + \frac{120}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \frac{80}{\pi} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$$



3. Комплексы амплитудных значений гармоник напряжения:

первой гармоники, В:  $U_{m1} := \frac{-240}{\pi} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}}$

второй гармоники, В:  $U_{m2} := \frac{120}{\pi} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}}$

третьей гармоники, В:  $U_{m3} := \frac{-80}{\pi} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}}$

4. Расчет тока от действия первой гармоники напряжения.

$$k := 1$$

Комплексное входное сопротивление цепи, Ом:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$Z_{\text{Вх1}} := k \cdot j \cdot X_L + \frac{r \cdot \left( \frac{-j \cdot X_C}{k} \right)}{r - \frac{j \cdot X_C}{k}}$$

$$|Z_{\text{Вх1}}| = 16.322 \quad \frac{\arg(Z_{\text{Вх1}})}{\text{deg}} = 53.97$$

Комплекс амплитудного значения входного тока, А:

$$I_{\text{m11}} := \frac{U_{\text{m1}}}{Z_{\text{Вх1}}}$$

$$|I_{\text{m11}}| = 4.681 \quad \frac{\arg(I_{\text{m11}})}{\text{deg}} = 126.03$$

Мгновенное значение тока, А:  $i_{11}(t) := 4.681 \cdot \sin(\omega \cdot t + 126.03 \cdot \text{deg})$

5. Расчет тока от действия второй гармоники напряжения.

$$k := 2$$

Комплексное входное сопротивление цепи, Ом:

$$Z_{\text{Вх2}} := k \cdot j \cdot X_L + \frac{r \cdot \left( \frac{-j \cdot X_C}{k} \right)}{r - \frac{j \cdot X_C}{k}}$$

$$|Z_{\text{Вх2}}| = 30.594 \quad \frac{\arg(Z_{\text{Вх2}})}{\text{deg}} = 78.69$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Комплекс амплитудного значения входного тока, А:

$$I_{m12} := \frac{U_{m2}}{Z_{Вх2}}$$

$$|I_{m12}| = 1.249 \quad \frac{\arg(I_{m12})}{\text{deg}} = -78.69$$

Мгновенное значение тока, А:  $i_{12}(t) := 1.249 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t - 78.69 \cdot \text{deg})$

6. Расчет тока от действия третьей гармоники напряжения.

$$k := 3$$

Комплексное входное сопротивление цепи, Ом:

$$Z_{Вх3} := k \cdot j \cdot X_L + \frac{r \cdot \left( \frac{-j \cdot X_C}{k} \right)}{r - \frac{j \cdot X_C}{k}}$$

$$|Z_{Вх3}| = 48.602 \quad \frac{\arg(Z_{Вх3})}{\text{deg}} = 85.64$$

Комплекс амплитудного значения входного тока, А:

$$I_{m13} := \frac{U_{m3}}{Z_{Вх3}}$$

$$|I_{m13}| = 0.524 \quad \frac{\arg(I_{m13})}{\text{deg}} = 94.36$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

Мгновенное значение тока, А:  $i_{13}(t) := 0.524 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 94.36 \cdot \text{deg})$

7. Мгновенное значение тока первой ветви, А:

$$i_1(t) := i_{11}(t) + i_{12}(t) + i_{13}(t)$$

$$i_1(t) \rightarrow 4.681 \cdot \sin(\omega \cdot t + 126.03 \cdot \text{deg}) + 1.249 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t - 78.69 \cdot \text{deg}) + 0.524 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + 94.36 \cdot \text{deg})$$

8. Действующее значение тока (показание амперметра), А:

$$I := \sqrt{\left(\frac{|I_{m11}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m12}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|I_{m13}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I = 3.45$$

9. Активная мощность (показание ваттметра), Вт:

$$P := \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m11}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m12}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m13}}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$P = 110.34$$

10. Реактивная мощность, ВАр:

$$Q := \operatorname{Im}\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m11}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m12}}{\sqrt{2}}}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{I_{m13}}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$Q = 174.62$$

11. Полная мощность цепи.

Действующее значение напряжения, В:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$U := \sqrt{\left(\frac{|U_{m1}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m2}|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_{m3}|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U = 63.02$$

Полная мощность, ВА

$$S := U \cdot I$$

$$S = 217.13$$

12. Мощность искажений, ВА:

$$T := \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$T = 66.93$$

## Задача 11

Определить показания амперметров электромагнитной системы в схеме, изображенной на рис. 8, если источники ЭДС:  $e_1(t) = 60 + 130\sin(\omega t + 45^\circ) + 70\sin(3\omega t - 120^\circ)$  В ЭДС;  $e_2(t) = 40\sin(\omega t + 90^\circ)$  В. Сопротивления элементов схемы на частоте первой гармоники:  $r_1 = 25$  Ом,  $r_2 = 15$  Ом,  $x_{L1} = 10$  Ом,  $x_{L2} = 20$  Ом,  $x_{C1} = 45$  Ом.

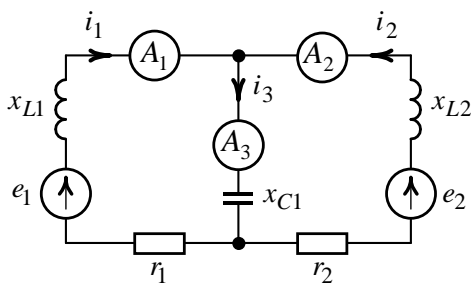


Рис. 8

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

### 1. Ввод исходных данных:

Источники ЭДС по гармоникам, В:

$$E_{10} := 60 \quad E_{11} := \frac{130}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 45 \text{deg}} \quad E_{13} := \frac{70}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 120 \text{deg}}$$
$$E_{21} := \frac{40}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 90 \text{deg}}$$

Сопrotивления цепи по первой гармонике, Ом:

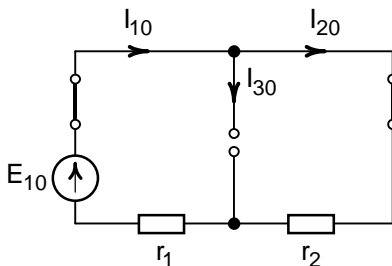
$$k := 1$$

$$r_1 := 25 \quad X_{L11} := 10 \quad X_{C11} := 45$$

$$r_2 := 15 \quad X_{L21} := 20$$

### 2. Расчет от действия постоянной составляющей ЭДС.

Схема замещения для нулевой гармоники



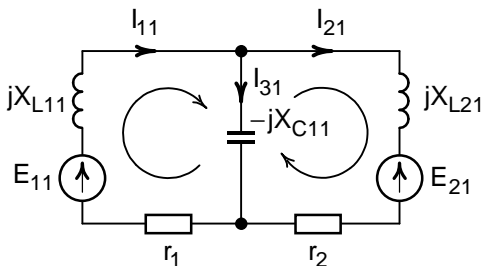
Токи нулевой гармоники, А:

$$I_{10} := \frac{E_{10}}{r_1 + r_2} \quad I_{20} := I_{10} \quad I_{30} := 0$$

$$I_{10} = 1.5$$

3. Расчет цепи для первой гармоники (k=1).

Схема замещения для первой гармоники



Уравнения для комплексных значений токов в символической форме:

$$\begin{cases} I_{11} - I_{21} - I_{31} = 0 \\ I_{11} \cdot (r_1 + j \cdot X_{L11}) + I_{31} \cdot (-j \cdot X_{C11}) = E_{11} \\ I_{21} \cdot (r_2 + j \cdot X_{L21}) - I_{31} \cdot (-j \cdot X_{C11}) = -E_{21} \end{cases}$$

Матрица коэффициентов системы:

Вектор свободных членов:

$$Z_1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (r_1 + j \cdot X_{L21}) & 0 & -j \cdot X_{C11} \\ 0 & (r_2 + j \cdot X_{L21}) & -j \cdot X_{C11} \end{bmatrix} \quad V_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ E_{11} \\ -E_{21} \end{pmatrix}$$

Вектор искомых токов:  $I := Z_1^{-1} \cdot V_1$

Решение для токов ветвей  $I_{11}, I_{21}, I_{31}$ , A:  $I = \begin{pmatrix} 4.23 + 3.53j \\ 1.83 + 2.87j \\ 2.4 + 0.66j \end{pmatrix}$

$$I_{11} := I_0$$

$$I_{21} := I_1$$

$$I_{31} := I_2$$

$$I_{11} = 4.23 + 3.53j$$

$$I_{21} = 1.83 + 2.87j$$

$$I_{31} = 2.4 + 0.66j$$

#### 4. Расчет цепи для третьей гармоники ( $k=3$ ).

Сопротивления цепи для третьей гармоники:  $k := 3$

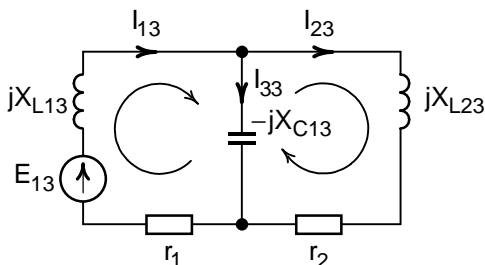
$$X_{L13} := k \cdot X_{L11} \quad X_{L23} := k \cdot X_{L21} \quad X_{C13} := \frac{X_{C11}}{k}$$

$$X_{L13} = 30$$

$$X_{L23} = 60$$

$$X_{C13} = 15$$

Схема замещения для третьей гармоники



Уравнения для комплексных значений токов в символической форме:



$$\begin{cases} I_{13} - I_{23} - I_{33} = 0 \\ I_{13} \cdot (r_1 + j \cdot X_{L13}) + I_{33} \cdot (-j \cdot X_{C13}) = E_{13} \\ I_{23} \cdot (r_2 + j \cdot X_{L23}) - I_{33} \cdot (-j \cdot X_{C13}) = 0 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов системы:

Вектор свободных членов:

$$Z_3 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (r_1 + j \cdot X_{L13}) & 0 & -j \cdot X_{C13} \\ 0 & (r_2 + j \cdot X_{L23}) & -j \cdot X_{C13} \end{bmatrix} \quad V_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ E_{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 25 + 30j & 0 & -15j \\ 0 & 15 + 60j & -15j \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -24.75 - 42.87j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор искомых токов:  $I := Z_3^{-1} \cdot V_3$

$$\text{Решение для токов } I_{13}, I_{23}, I_{33}: \quad I = \begin{pmatrix} -1.5 - 0.66j \\ -0.26 - 0.18j \\ -1.23 - 0.48j \end{pmatrix}$$

$$I_{13} := I_0$$

$$I_{23} := I_1$$

$$I_{33} := I_2$$

$$I_{13} = -1.5 - 0.66j$$

$$I_{23} = -0.26 - 0.18j$$

$$I_{33} = -1.23 - 0.48j$$

5. Действующие значения токов (показания амперметров), A:

$$I_{A1} := \sqrt{(I_{10})^2 + (|I_{11}|)^2 + (|I_{13}|)^2}$$

$$I_{A1} = 5.94$$

$$I_{A2} := \sqrt{(|I_{20}|)^2 + (|I_{21}|)^2 + (|I_{23}|)^2}$$

$$I_{A2} = 3.73$$

$$I_{A3} := \sqrt{(|I_{30}|)^2 + (|I_{31}|)^2 + (|I_{33}|)^2}$$

$$I_{A3} = 2.82$$

## Задача 12

К выводам симметричного трехфазного генератора (рис. 9) присоединена симметричная нагрузка, соединенная звездой. Определить показания приборов электромагнитной системы, активную, реактивную, полную мощность, мощность искажения и коэффициент мощности трехфазной системы, если несинусоидальная ЭДС фазы  $A$  генератора  $e_A(\omega t) = 320 \sin \omega t + 110 \sin 3\omega t + 50 \sin 5\omega t$  В. Сопротивления

элементов цепи по частоте основной гармоники:  $\underline{Z}_H = 20 - j30$  Ом,

$\underline{Z}_0 = 4 + j3$  Ом.

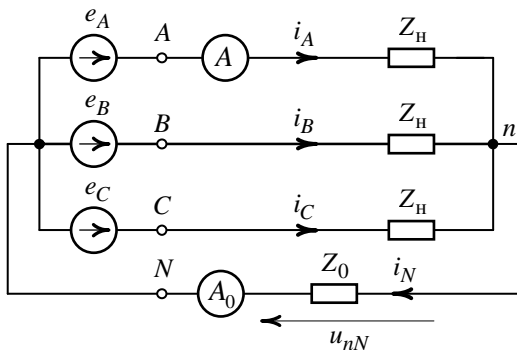


Рис. 9

## Решение

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD

1. Ввод исходных данных:  $j := \sqrt{-1}$      $a := e^{j \cdot 120 \text{deg}}$

Комплексы действующих значений ЭДС гармоник фазы А генератора, В:

$$E_{A1} := \frac{320}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad E_{A3} := \frac{110}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}} \quad E_{A5} := \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 0 \text{deg}}$$

Комплексные сопротивления по первой гармонике, Ом:

$$k := 1$$

$$Z_{H1} := 20 - j \cdot \frac{30}{k} \quad Z_{O1} := 4 + j \cdot k \cdot 3$$

$$Z_{H1} = 20 - 30j \quad Z_{O1} = 4 + 3j$$

2. Расчет для первой гармоники ( $k = 1$ ).

Комплексные ЭДС фазы В и С прямой последовательности, В:

$$E_{B1} := a^2 \cdot E_{A1} \quad E_{C1} := a \cdot E_{A1}$$

$$E_{B1} = -113.14 - 195.96j \quad E_{C1} = -113.1 + 196j$$

Напряжение смещения нейтрали, В:

$$U_{nN1} := \frac{\frac{E_{A1}}{Z_{H1}} + \frac{E_{B1}}{Z_{H1}} + \frac{E_{C1}}{Z_{H1}}}{\frac{1}{Z_{H1}} + \frac{1}{Z_{H1}} + \frac{1}{Z_{H1}} + \frac{1}{Z_{O1}}}$$

$$U_{nN1} = 0$$

Комплекс действующего значения тока фазы А, А:

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$I_{A1} := \frac{E_{A1} - U_{nN1}}{Z_{H1}}$$

$$I_{A1} = 3.48 + 5.22j$$

Ток в нейтральном проводе, А:

$$I_{N1} := \frac{U_{nN1}}{Z_{01}}$$

$$I_{N1} = 0$$

3. Расчет для третьей гармоники (k = 3).

Комплексные ЭДС фазы В и С нулевой последовательности, В:

$$E_{B3} := E_{A3}$$

$$E_{C3} := E_{A3}$$

$$E_{A1} = 226.27$$

$$E_{B1} = -113.1 - 196j$$

Комплексные сопротивления по третьей гармонике, Ом:

$$k := 3$$

$$Z_{H3} := 20 - j \cdot \frac{30}{k} \quad Z_{03} := 4 + j \cdot k \cdot 3$$

$$Z_{H3} = 20 - 10j \quad Z_{03} = 4 + 9j$$

Напряжение смещения нейтрали, В:

$$U_{nN3} := \frac{\frac{E_{A3}}{Z_{H3}} + \frac{E_{B3}}{Z_{H3}} + \frac{E_{C3}}{Z_{H3}}}{\frac{1}{Z_{H3}} + \frac{1}{Z_{H3}} + \frac{1}{Z_{H3}} + \frac{1}{Z_{03}}}$$

$$U_{nN3} = 49.94 + 39.1j$$

Комплекс действующего значения тока фазы А, А:

$$I_{A3} := \frac{E_{A3} - U_{nN3}}{Z_{H3}}$$

$$I_{A3} = 1.9 - 1.01j$$

Ток в нейтральном проводе, А:

$$I_{N3} := \frac{U_{nN3}}{Z_{O3}}$$

$$I_{N3} = 5.69 - 3.02j$$

4. Расчет для пятой гармоники ( k = 5).

Комплексные ЭДС фазы В и С обратной последовательности, В:

$$E_{B5} := a \cdot E_{A5} \quad E_{C5} := a^2 \cdot E_{A5}$$

$$E_{B5} = -17.68 + 30.62j \quad E_{C5} = -17.7 - 30.6j$$

Комплексные сопротивления по пятой гармонике, Ом:

$$k := 5$$

$$Z_{H5} := 20 - j \cdot \frac{30}{k} \quad Z_{O5} := 4 + j \cdot k \cdot 3$$

$$Z_{H5} = 20 - 6j \quad Z_{O5} = 4 + 15j$$

Напряжение смещения нейтрали, В:

$$U_{nN5} := \frac{\frac{E_{A5}}{Z_{H5}} + \frac{E_{B5}}{Z_{H5}} + \frac{E_{C5}}{Z_{H5}}}{\frac{1}{Z_{H5}} + \frac{1}{Z_{H5}} + \frac{1}{Z_{H5}} + \frac{1}{Z_{O5}}}$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$U_{nN5} = 0$$

Комплекс действующего значения тока фазы А, А:

$$I_{A5} := \frac{E_{A5} - U_{nN5}}{Z_{H5}}$$

$$I_{A5} = 1.62 + 0.49j$$

Ток в нейтральном проводе, А:

$$I_{N5} := \frac{U_{nN5}}{Z_{05}}$$

$$I_{N5} = 0$$

5. Действующие значения токов (показания амперметров), А:

$$I_A := \sqrt{(|I_{A1}|)^2 + (|I_{A3}|)^2 + (|I_{A5}|)^2}$$

$$I_A = 6.85$$

$$I_{A0} := \sqrt{(|I_{N1}|)^2 + (|I_{N3}|)^2 + (|I_{N5}|)^2}$$

$$I_{A0} = 6.44$$

6. Активная мощность системы, Вт:

$$P := 3 \cdot \operatorname{Re}(E_{A1} \cdot \overline{I_{A1}} + E_{A3} \cdot \overline{I_{A3}} + E_{A5} \cdot \overline{I_{A5}})$$

$$P = 2.98 \times 10^3$$

7. Реактивная мощность системы, ВАр:

$$Q := 3 \cdot \operatorname{Im}(E_{A1} \cdot \overline{I_{A1}} + E_{A3} \cdot \overline{I_{A3}} + E_{A5} \cdot \overline{I_{A5}})$$

Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач. Часть 1, НГТУ, 2016

$$Q = -3.36 \times 10^3$$

8. Полная мощность трехфазной системы.

Действующее значение ЭДС источника, В:

$$E_A := \sqrt{(|E_{A1}|)^2 + (|E_{A3}|)^2 + (|E_{A5}|)^2}$$

$$E_A = 241.87$$

Полная мощность системы, ВА

$$S := 3 \cdot E_A \cdot I_A$$

$$S = 4967.04$$

9. Мощность искажений, ВА:

$$T := \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

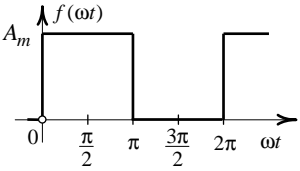
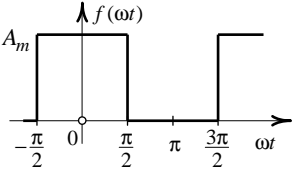
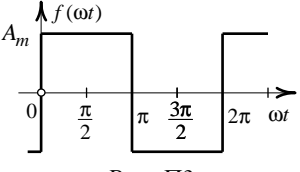
$$T = 2123.31$$

10. Коэффициент мощности системы:

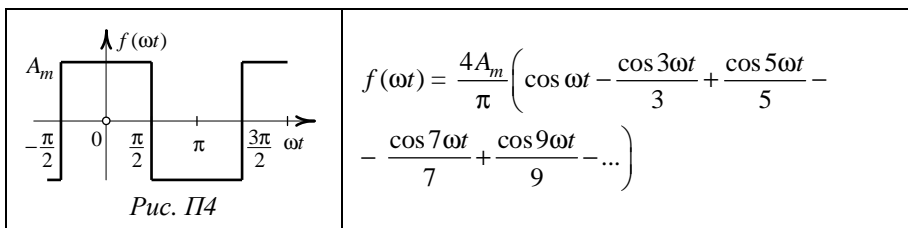
$$\alpha := \frac{P}{S}$$

$$\alpha = 0.599$$

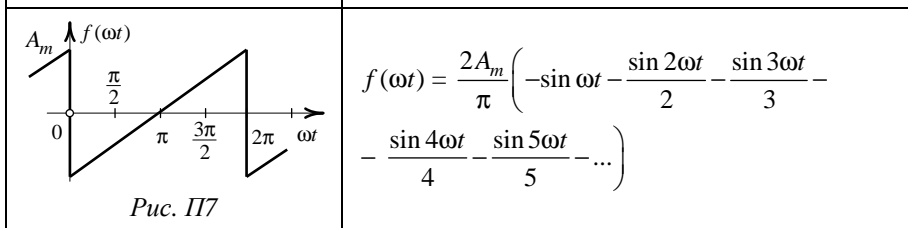
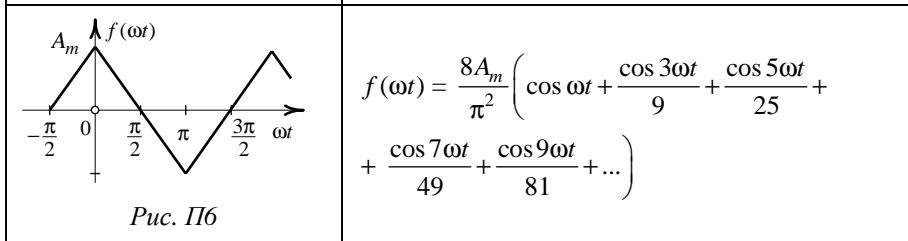
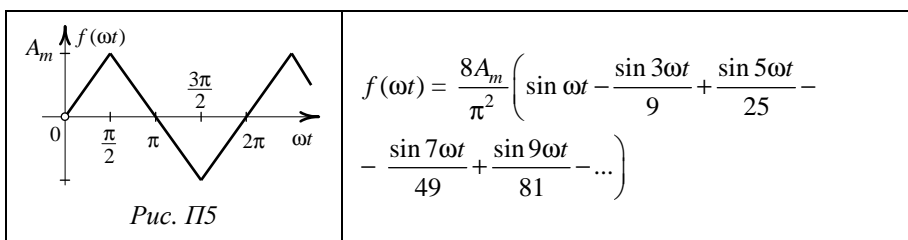
### Графики типовых несинусоидальных функций и их разложение в тригонометрический ряд Фурье

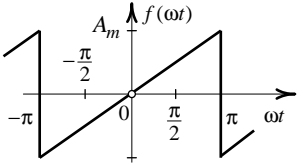
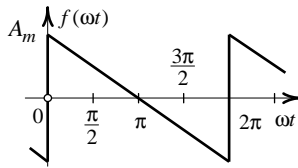
График несинусоидальной функции	Разложение функции в ряд Фурье
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П1</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{\sin 7\omega t}{7} + \frac{\sin 9\omega t}{9} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П2</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \frac{\cos 7\omega t}{7} + \frac{\cos 9\omega t}{9} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П3</i></p>	$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{\sin 7\omega t}{7} + \frac{\sin 9\omega t}{9} + \dots \right)$



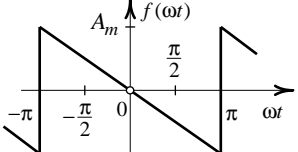
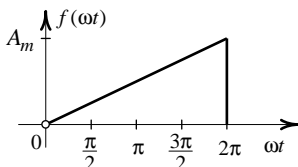
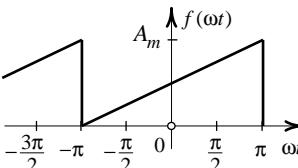


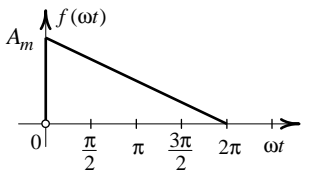
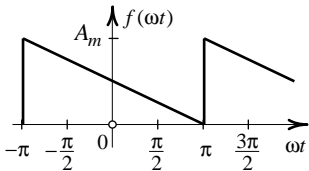
Продолжение таблицы



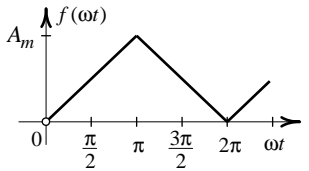
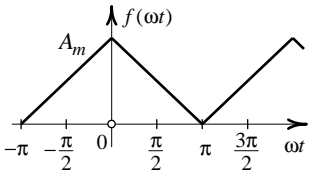
 <p style="text-align: center;">Рис. П8</p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 4\omega t}{4} + \frac{\sin 5\omega t}{5} - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. П9</p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 4\omega t}{4} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$

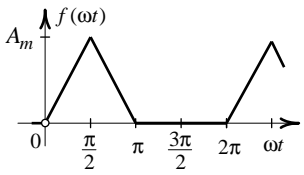
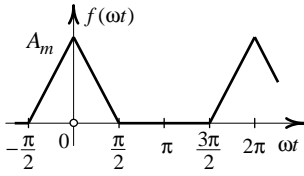
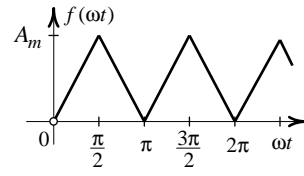
Продолжение таблицы

 <p style="text-align: center;">Рис. П10</p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} \left( -\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} - \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 4\omega t}{4} - \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. П11</p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} - \frac{A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 4\omega t}{4} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{A_m}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 4\omega t}{4} + \frac{\sin 5\omega t}{5} - \dots \right)$

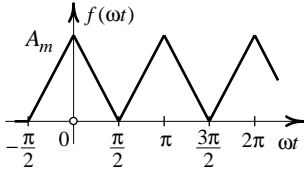
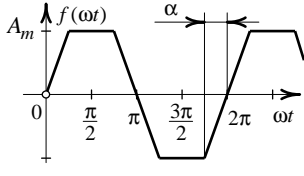
<p style="text-align: center;"><i>Рис. П12</i></p>  <p style="text-align: center;"><i>Рис. П13</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 4\omega t}{4} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П14</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{A_m}{\pi} \left( -\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} - \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 4\omega t}{4} - \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$

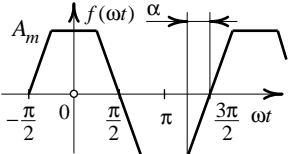
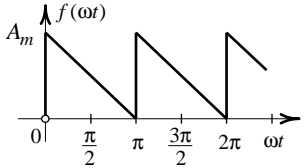
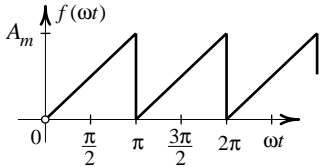
Продолжение таблицы

 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П15</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} - \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \frac{\cos 7\omega t}{49} + \frac{\cos 9\omega t}{81} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П16</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \frac{\cos 7\omega t}{49} + \frac{\cos 9\omega t}{81} + \dots \right)$

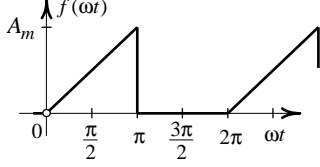
 <p style="text-align: center;">Рис. П17</p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{4} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} - \frac{\cos 6\omega t}{18} - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. П18</p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{4} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \frac{\cos 6\omega t}{18} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;">Рис. П19</p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} - \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \cos 2\omega t + \frac{\cos 6\omega t}{9} + \frac{\cos 10\omega t}{25} + \frac{\cos 14\omega t}{49} + \frac{\cos 18\omega t}{81} + \dots \right)$

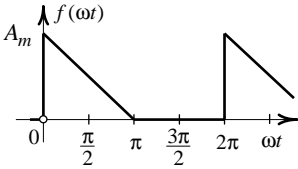
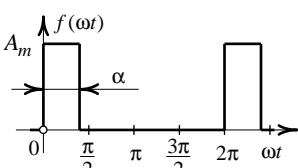
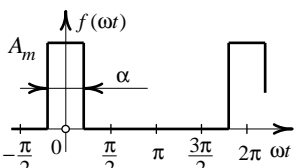
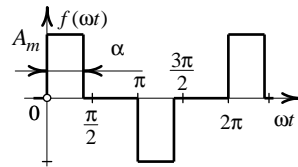
Продолжение таблицы

 <p style="text-align: center;">Рис. П20</p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{4A_m}{\pi^2} \left( \cos 2\omega t + \frac{\cos 6\omega t}{9} + \frac{\cos 10\omega t}{25} + \frac{\cos 14\omega t}{49} + \frac{\cos 18\omega t}{81} + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{\sin 3\alpha \sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\alpha \sin 5\omega t}{25} + \frac{\sin 7\alpha \sin 7\omega t}{49} + \dots \right)$

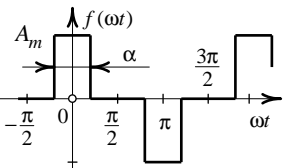
<p style="text-align: center;"><i>Рис. П21</i></p>  <p style="text-align: center;"><i>Рис. П22</i></p>	$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \cos \omega t - \frac{\sin 3\alpha \cos 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\alpha \cos 5\omega t}{25} - \frac{\sin 7\alpha \cos 7\omega t}{49} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П23</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} + \frac{A_m}{\pi} \left( \sin 2\omega t + \frac{\sin 4\omega t}{2} + \frac{\sin 6\omega t}{3} + \frac{\sin 8\omega t}{4} + \frac{\sin 10\omega t}{5} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П24</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{2} - \frac{A_m}{\pi} \left( \sin 2\omega t + \frac{\sin 4\omega t}{2} + \frac{\sin 6\omega t}{3} + \frac{\sin 8\omega t}{4} + \frac{\sin 10\omega t}{5} + \dots \right)$

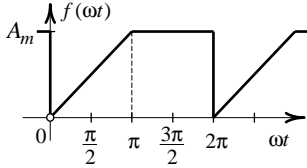
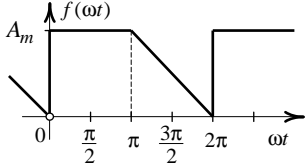
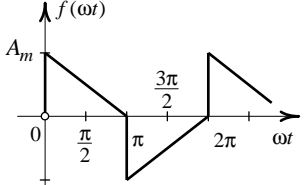
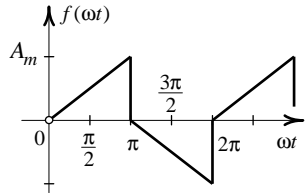
Продолжение таблицы

 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П25</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{4} - 2A_m \left( \frac{\cos \omega t}{\pi^2} - \frac{\sin \omega t}{2\pi} + \frac{\sin 2\omega t}{4\pi} + \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} - \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} + \dots \right)$
--	--

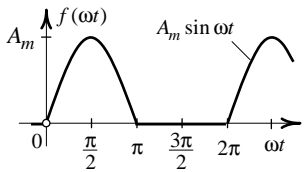
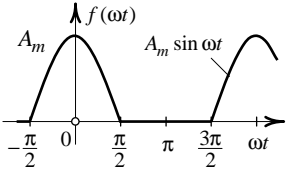
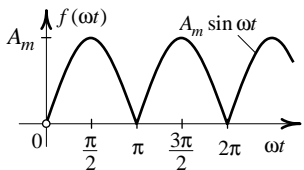
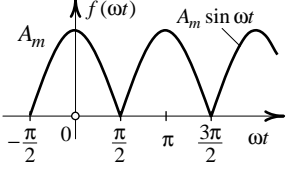
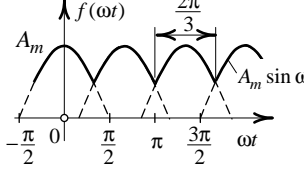
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П26</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{4} + 2A_m \left( \frac{\cos \omega t}{\pi^2} + \frac{\sin \omega t}{2\pi} + \frac{\sin 2\omega t}{4\pi} + \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} + \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П27</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m \alpha}{2\pi} + \frac{A_m}{\pi} \left( \sin \alpha \cos \omega t + (1 - \cos \alpha) \sin \omega t + \frac{\sin 2\alpha \cos 2\omega t}{2} + \frac{(1 - \cos 2\alpha) \sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\alpha \cos 3\omega t}{3} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П28</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m \alpha}{2\pi} + \frac{2A_m}{\pi} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\alpha}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \cos 4\omega t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\alpha}{2} \cos 5\omega t + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П29</i></p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} \left( \sin \alpha \cos \omega t + (1 - \cos \alpha) \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\alpha \cos 3\omega t + \frac{1}{3} (1 - \cos 3\alpha) \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\alpha \cos 5\omega t + \frac{1}{5} (1 - \cos 5\alpha) \sin 5\omega t + \dots \right)$

Продолжение таблицы

	$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\alpha}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\alpha}{2} \cos 5\omega t + \dots \right)$
---	---

<p>Рис. П30</p>	$+ \frac{1}{7} \sin \frac{7\alpha}{2} \cos 7\omega t + \dots$
 <p>Рис. П31</p>	$f(\omega t) = \frac{3A_m}{4} - 2A_m \left( \frac{\cos \omega t}{\pi^2} + \frac{\sin \omega t}{2\pi} + \frac{\sin 2\omega t}{4\pi} + \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} + \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} + \dots \right)$
 <p>Рис. П32</p>	$f(\omega t) = \frac{3A_m}{4} - 2A_m \left( \frac{\cos \omega t}{\pi^2} - \frac{\sin \omega t}{2\pi} - \frac{\sin 2\omega t}{4\pi} + \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} - \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} + \dots \right)$
 <p>Рис. П33</p>	$f(\omega t) = 4A_m \left( \frac{\cos \omega t}{\pi^2} + \frac{\sin \omega t}{2\pi} + \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} + \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} + \frac{\cos 5\omega t}{25\pi^2} + \frac{\sin 5\omega t}{10\pi} + \dots \right)$
 <p>Рис. П34</p>	$f(\omega t) = 4A_m \left( -\frac{\cos \omega t}{\pi^2} + \frac{\sin \omega t}{2\pi} - \frac{\cos 3\omega t}{9\pi^2} + \frac{\sin 3\omega t}{6\pi} - \frac{\cos 5\omega t}{25\pi^2} + \frac{\sin 5\omega t}{10\pi} + \dots \right)$

Окончание таблицы

 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П35</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{\pi} + 2A_m \left( \frac{\sin \omega t}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} - \frac{\cos 6\omega t}{35\pi} - \frac{\cos 8\omega t}{63\pi} - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П36</i></p>	$f(\omega t) = \frac{A_m}{\pi} + 2A_m \left( \frac{\cos \omega t}{4} + \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} + \frac{\cos 6\omega t}{35\pi} - \frac{\cos 8\omega t}{63\pi} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П37</i></p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} - \frac{4A_m}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \frac{\cos 6\omega t}{35} + \frac{\cos 8\omega t}{63} + \frac{\cos 10\omega t}{99} + \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П38</i></p>	$f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} + \frac{4A_m}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega t}{3} - \frac{\cos 4\omega t}{15} + \frac{\cos 6\omega t}{35} - \frac{\cos 8\omega t}{63} + \frac{\cos 10\omega t}{99} - \dots \right)$
 <p style="text-align: center;"><i>Рис. П39</i></p>	$f(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}A_m}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}A_m}{\pi} \left( \frac{\cos 3\omega t}{8} - \frac{\cos 6\omega t}{35} - \frac{\cos 9\omega t}{80} - \frac{\cos 12\omega t}{143} + \frac{\cos 15\omega t}{224} + \dots \right)$



Нейман В.Ю., Морозов П.В. Теоретические основы электротехники: методы и примеры решения задач.  
Часть 1, НГТУ, 2016