ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ MathCAD ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

При расчете электрических цепей возникает задача решения систем алгебраических уравнений. С целью автоматизации и ускорения процесса расчета рассмотрим основные приемы решений систем линейных алгебраических уравнений, описывающих состояние цепей, с помощью математической программной среды MathCAD.

Покажем основные возможности этой среды для решения практических задач.

Задача 1

Определить токи в ветвях цепи (рис.1) методом непосредственного применения законов Кирхгофа, если $E_1 = 75$ В, $E_2 = 15$ В, $I_k = 0{,}4$ А, $R_1 = 24$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 32$ Ом, $R_4 = 14$ Ом, $R_5 = 16$ Ом.

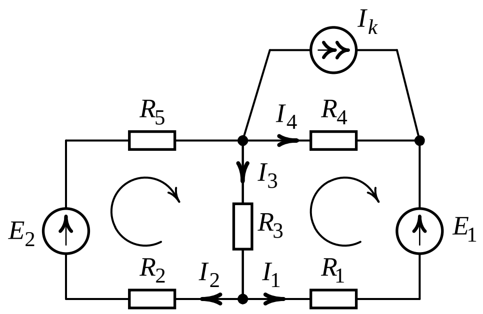

Рис. 1

Решение

1. Система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, для расчета цепи (рис. .1) имеет вид

$$\begin{cases} I_1 + I_4 + I_k = 0, \\ -I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ I_2\left(R_2 + R_5\right) + I_3 R_3 = E_2, \\ -I_1 R_1 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = -E_1. \end{cases}$$

2. Приведем систему к матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & (R_2 + R_5) & R_3 & 0 \\ -R_1 & 0 & -R_3 & R_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_k \\ 0 \\ E_2 \\ -E_1 \end{bmatrix}.$$

3. После подстановки числовых значений получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 0 \\ -24 & 0 & -32 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0 \\ 15 \\ -75 \end{bmatrix}.$$

4. Решение матричной системы позволяет определить токи ветвей:

$$I_1 = 1{,}16 \text{ А}, \quad I_2 = -0{,}369 \text{ А}, \quad I_3 = 0{,}791 \text{ А}, \quad I_4 = -1{,}56 \text{ А}.$$

5. Решение системы линейных алгебраических уравнений в MathCAD различными способами.

Способ 1. С помощью определителей по формулам Крамера.
Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

Главный определитель системы:

$$\Delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 0 \\ -24 & 0 & -32 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta| = -3.176 \times 10^3$$

Дополнительные определители системы:

$$\Delta_1 := \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 15 & 28 & 32 & 0 \\ -75 & 0 & -32 & 14 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 := \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 32 & 0 \\ -24 & -75 & -32 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_1| = -3.684 \times 10^3 \qquad |\Delta_2| = 1.171 \times 10^3$$

$$\Delta_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 15 & 0 \\ -24 & 0 & -75 & 14 \end{pmatrix} \qquad \Delta_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 15 \\ -24 & 0 & -32 & -75 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta_3| = -2.513 \times 10^3 \qquad |\Delta_4| = 4.954 \times 10^3$$

Решение для токов $I_1 \ldots I_4$:

$$I_1 := \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} \qquad I_2 := \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|} \qquad I_3 := \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|} \qquad I_4 := \frac{|\Delta_4|}{|\Delta|}$$

$$I_1 = 1.16 \qquad I_2 = -0.369 \qquad I_3 = 0.791 \qquad I_4 = -1.56$$

Способ 2. С помощью векторных и матричных операторов при решении задач линейной алгебры.
Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

Матрица коэффициентов системы: Вектор свободных членов:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 0 \\ -24 & 0 & -32 & 14 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 15 \\ -75 \end{pmatrix}$$

Вектор искомых токов: $I := M^{-1} \cdot V$

Решение для токов $I_1 ... I_4$: $I = \begin{pmatrix} 1.16 \\ -0.369 \\ 0.791 \\ -1.56 \end{pmatrix}$

Способ 3. Решение матричной системы с применением функции $\mathrm{lsolve}(M,V)$.

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

Матрица коэффициентов системы: Вектор свободных членов:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 0 \\ -24 & 0 & -32 & 14 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 15 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$I := \mathrm{lsolve}(M, V)$

Решение для токов $I_1 ... I_4$: $I = \begin{pmatrix} 1.16 \\ -0.369 \\ 0.791 \\ -1.56 \end{pmatrix}$

Решение матричной системы с применением функции $\mathrm{lsolve}(M,V)$ в ином формате:

$$I := \mathrm{lsolve}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 32 & 0 \\ -24 & 0 & -32 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 15 \\ -75 \end{pmatrix}\right] \qquad I = \begin{pmatrix} 1.16 \\ -0.369 \\ 0.791 \\ -1.56 \end{pmatrix}$$

Способ 4. Решение системы уравнений при помощи вычислительного блока «Given – Find».

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

$E_1 := 75$ $E_2 := 15$ $I_k := 0.4$ $R_1 := 24$ $R_2 := 12$
$R_3 := 32$ $R_4 := 14$ $R_5 := 16$

Given

$I_1 + I_4 + I_k = 0$

$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$

$I_2 \cdot (R_2 + R_5) + I_3 \cdot R_3 = E_2$

$-I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = -E_1$

$$\mathrm{Find}(I_1, I_2, I_3, I_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.1599496221662468514 \\ -.36863979848866498741 \\ .79130982367758186398 \\ -1.5599496221662468514 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.16 \\ -0.369 \\ 0.791 \\ -1.56 \end{pmatrix}$$

П р и м е ч а н и е. В качестве знака равенства в системе линейных уравнений следует использовать знак логического равенства панели Boolean .

Задача 2

Определить токи в ветвях схемы (рис.2) методом узловых потенциалов. Дано $E_1 = 24$ В, $E_2 = 48$ В, $I_k = 2$ А, $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 100$ Ом, $R_5 = 50$ Ом.

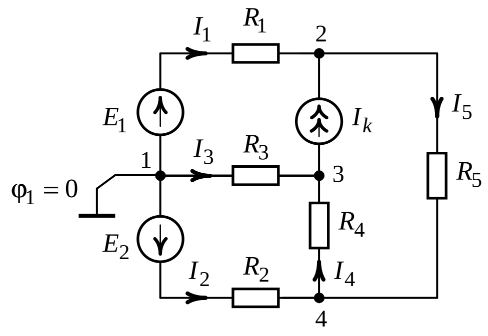

Рис. 2

Решение

1. Примем потенциал узловой точки 1 равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Система расчетных уравнений для определения потенциалов φ_2, φ_3 и φ_4 будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_5}\right)-\varphi_4\dfrac{1}{R_5}=\dfrac{E_1}{R_1}+I_k, \\ \varphi_3\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)-\varphi_4\dfrac{1}{R_4}=-I_k, \\ \varphi_4\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)-\varphi_3\dfrac{1}{R_4}-\varphi_2\dfrac{1}{R_5}=\dfrac{E_2}{R_2}. \end{cases}$$

2. Приведем систему к матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_5}\right) & 0 & -\dfrac{1}{R_5} \\ 0 & \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right) & -\dfrac{1}{R_4} \\ -\dfrac{1}{R_5} & -\dfrac{1}{R_4} & \left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{R_1}+I_k \\ -I_k \\ \dfrac{E_2}{R_2} \end{bmatrix}.$$

3. Решение матричной системы получим в MathCAD при помощи векторных и матричных операторов.

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

Исходные данные: $E_1 := 24 \quad E_2 := 48 \quad I_k := 2 \quad R_1 := 25$

$R_2 := 10 \quad R_3 := 20 \quad R_4 := 100 \quad R_5 := 50$

Матрица коэффициентов системы: Вектор свободных членов:

$$M := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}\right) & 0 & \frac{-1}{R_5} \\ 0 & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) & \frac{-1}{R_4} \\ \frac{-1}{R_5} & \frac{-1}{R_4} & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) \end{bmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} \frac{E_1}{R_1}+I_k \\ -I_k \\ \frac{E_2}{R_2} \end{pmatrix}$$

Вектор искомых потенциалов: $\phi := M^{-1} \cdot V$

Решение для потенциалов узлов $\phi_2 ... \phi_4$: $\phi = \begin{pmatrix} 64.274 \\ -25.863 \\ 44.822 \end{pmatrix}$

$\phi_1 := 0 \quad \phi_2 := 64.274 \quad \phi_3 := -25.863 \quad \phi_4 := 44.822$

Токи в ветвях цепи:

$$I_1 := \frac{\phi_1 - \phi_2 + E_1}{R_1} \quad I_2 := \frac{\phi_1 - \phi_4 + E_2}{R_2} \quad I_3 := \frac{\phi_1 - \phi_3}{R_3}$$

$$I_4 := \frac{\phi_4 - \phi_3}{R_4} \quad I_5 := \frac{\phi_2 - \phi_4}{R_5}$$

$I_1 = -1.611 \quad I_2 = 0.318 \quad I_3 = 1.293 \quad I_4 = 0.707 \quad I_5 = 0.389$

В результате решения получены токи: $I_1 = -1{,}611$ А, $I_2 = 0{,}318$ А, $I_3 = 1{,}293$ А, $I_4 = 0{,}707$ А, $I_5 = 0{,}389$ А.

Задача 3

Пользуясь методом контурных токов, рассчитать все токи в ветвях схемы (рис.3), если $E_1 = 150$ В, $E_2 = 120$ В, $E_3 = 45$ В, $E_4 = 15$ В, $I_k = 1{,}2$ А, $R_1 = 230$ Ом, $R_2 = 130$ Ом, $R_3 = 110$ Ом, $R_4 = 300$ Ом, $R_5 = 180$ Ом, $R_6 = 250$ Ом, $R_7 = 100$ Ом, $R_8 = 150$ Ом.

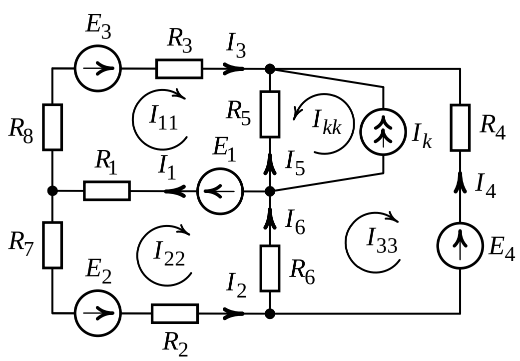

Рис..3

Решение

1. Система уравнений, составленная по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов, имеет вид

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_1+R_3+R_5+R_8\right)-I_{22}R_1-I_{33}R_5+I_{kk}R_5=E_3+E_1, \\ I_{22}\left(R_1+R_2+R_6+R_7\right)-I_{11}R_1-I_{33}R_6=-E_1-E_2, \\ I_{33}\left(R_4+R_5+R_6\right)-I_{11}R_5-I_{22}R_6-I_{kk}R_5=-E_4, \end{cases}$$

где $I_{kk}=I_k$.

2. Действительные токи в ветвях цепи определятся как алгебраическая сумма контурных токов смежных контуров:

$$I_1=I_{11}-I_{22};\quad I_2=-I_{22};\quad I_3=I_{11};\quad I_4=-I_{33};$$

$$I_5=-I_{11}+I_{33}-I_{kk};\quad I_6=-I_{22}+I_{33}.$$

3. Решение системы линейных уравнений и расчет действительных токов в ветвях схемы получим в MathCAD при помощи вычислительного блока «Given – Find».

Пример вычислительного блока, реализованного в среде MathCAD:

Исходные данные: $E_1 := 150 \quad E_2 := 120 \quad E_3 := 45 \quad E_4 := 15 \quad I_k := 1.2$

$R_1 := 230 \quad R_2 := 130 \quad R_3 := 110 \quad R_4 := 300$

$R_5 := 180 \quad R_6 := 250 \quad R_7 := 100 \quad R_8 := 150$

Принимаем: $I_{kk} := I_k$

Given

$$I_{11}\cdot\left(R_1+R_3+R_5+R_8\right)-I_{22}\cdot R_1-I_{33}\cdot R_5+I_{kk}\cdot R_5 = E_3+E_1$$

$$I_{22}\cdot\left(R_1+R_2+R_6+R_7\right)-I_{11}\cdot R_1-I_{33}\cdot R_6 = -E_1-E_2$$

$$I_{33}\cdot\left(R_4+R_5+R_6\right)-I_{11}\cdot R_5-I_{22}\cdot R_6-I_{kk}\cdot R_5 = -E_4$$

Расчет контурных токов:

$$\mathrm{Find}\left(I_{11},I_{22},I_{33}\right)\rightarrow\begin{pmatrix}-.13363593571380539305\\-.38460090108264407236\\.11067850178199179611\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.134\\-0.385\\0.111\end{pmatrix}$$

Решение для контурных токов:

$I_{11} := -0.134 \quad I_{22} := -0.385 \quad I_{33} := 0.111$

Действительные токи ветвей:

$I_1 := I_{11}-I_{22} \quad I_2 := -I_{22} \quad I_3 := I_{11} \quad I_4 := I_{33}$

$I_5 := -I_{11}+I_{33}-I_{kk} \quad I_6 := -I_{22}+I_{33}$

$I_1 = 0.251 \quad I_2 = 0.385 \quad I_3 = -0.134 \quad I_4 = 0.111 \quad I_5 = -0.955 \quad I_6 = 0.496$

В результате решения в MathCAD с помощью вычислительного блока «Given – Find» получены следующие значения токов:

$$I_1=0{,}251\text{ А};\quad I_2=0{,}385\text{ А};\quad I_3=-0{,}134\text{ А};$$

$$I_4=0{,}111\text{ А};\quad I_5=-0{,}955\text{ А};\quad I_6=0{,}496\text{ А}.$$