

### Тема 3. Основы символического (комплексного) метода

Символический метод расчета основан на использовании комплексных чисел, что при расчете электрических цепей переменного синусоидального тока позволяет заменить графические действия над векторами алгебраическими действиями над комплексными числами. Геометрическому сложению и вычитанию векторов соответствует алгебраическое сложение и вычитание их проекций на оси комплексной плоскости.

Для ускорения расчетов в приложении приведены приемы использования многофункциональных калькуляторов при работе с комплексными числами.

#### Задача 3.1

Напряжение и ток на входе пассивного двухполюсника (рис. 3.1):  $u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$  В,  $i = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$  А. Записать комплексы действующих значений синусоидальных функций в показательной, алгебраической и полярной формах. Построить векторную диаграмму на комплексной плоскости.

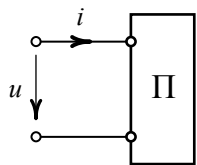


Рис. 3.1

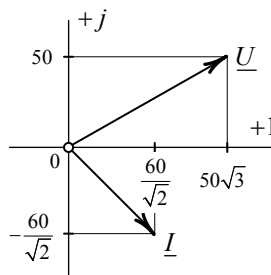


Рис. 3.2

#### Решение

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 100 e^{j30^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = 60 e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

2. Комплексы действующих значений напряжения и тока в алгебраической форме:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} (\cos \psi_u + j \sin \psi_u) = 100 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 50\sqrt{3} + j50 \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \psi_i + j \sin \psi_i) = 60 [\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)] = \frac{60}{\sqrt{2}} - j \frac{60}{\sqrt{2}} \text{ А.}$$

3. Комплексы действующих значений напряжения и тока в полярной форме:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} |\psi_u = 100 |_{30^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} |\psi_i = 60 |_{-45^\circ} \text{ А.}$$

4. Векторная диаграмма на комплексной плоскости для действующих значений величин представлена на рис. 3.2.

### Задача 3.2

Заданы комплексы действующих значений напряжений в показательной форме:

$$\underline{U}_1 = 120e^{j60^\circ} \text{ В}, \underline{U}_2 = 240e^{-j20^\circ} \text{ В}, \underline{U}_3 = -360e^{j35^\circ} \text{ В}.$$

Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

#### Решение

1.  $u_1 = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}.$

2.  $u_2 = 240\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В}.$

3.  $u_3 = 360\sqrt{2} \sin(\omega t - 145^\circ) \text{ В},$

здесь  $\underline{U}_3 = -360e^{j35^\circ} = 360e^{j35^\circ} \cdot 1e^{-j180^\circ} = 360e^{j(35^\circ - 180^\circ)}$ , так как  $(-1) = 1e^{\pm j180^\circ}$ .

### Задача 3.3

Заданы комплексы действующих значений токов в алгебраической форме:

$$\underline{I}_1 = 4 + j3 \text{ А}, \underline{I}_2 = 4 - j3 \text{ А}, \underline{I}_3 = -4 + j3 \text{ А}, \underline{I}_4 = -4 - j3 \text{ А}.$$

Записать выражения для мгновенных значений токов.

#### Решение

1.  $\underline{I}_1 = 4 + j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}} = 5e^{j36,9^\circ} \text{ А}$  (рис. 3.3). Мгновенное значение тока:  
 $i_1 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 36,9^\circ) \text{ А}.$

2.  $\underline{I}_2 = 4 - j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \left(-\frac{3}{4}\right)} = 5e^{-j36,9^\circ} \text{ А}$  (рис. 3.4). Мгновенное значение тока:  
 $i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,9^\circ) \text{ А}.$

3.  $\underline{I}_3 = -4 + j3 = -(4 - j3) = -\left(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \left(-\frac{3}{4}\right)}\right) = -5e^{-j36,9^\circ} = 5e^{j143,1^\circ} \text{ А}$  (рис. 3.5).

Мгновенное значение тока:  $i_3 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 143,1^\circ) \text{ А}.$

4.  $\underline{I}_4 = -4 - j3 = -(4 + j3) = -\left(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}}\right) = -5e^{j36,9^\circ} =$   
 $= 5e^{-j143,1^\circ} \text{ А}$  (рис. 3.6). Мгновенное значение тока:  $i_4 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 143,1^\circ) \text{ А}.$

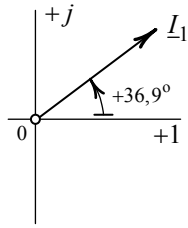


Рис. 3.3

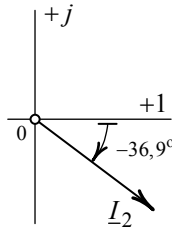


Рис. 3.4

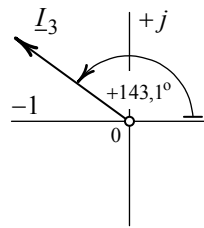


Рис. 3.5

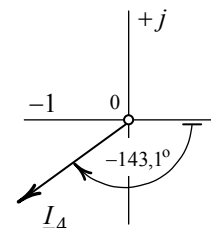


Рис. 3.6

### Задача 3.4

Напряжения представлены комплексами действующих значений  $\underline{U}_1 = (5 + j12)4e^{j30^\circ}$  В,  $\underline{U}_2 = (4 - j3)(16 - j12)$  В. Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

### Решение

$$1. \underline{U}_1 = (5 + j12)4e^{j30^\circ} = \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot e^{j \arctg \frac{12}{5}} \cdot 4e^{j30^\circ} = \\ = 13e^{j67,4^\circ} \cdot 4e^{j30^\circ} = 52e^{j97,4^\circ} \text{ В,}$$

тогда  $u_1 = 52\sqrt{2} \sin(\omega t + 97,4^\circ)$  В.

$$2. \underline{U}_2 = (4 - j3)(16 - j12) = 28 - j96 = \\ = \sqrt{28^2 + 96^2} \cdot e^{j \arctg \left( -\frac{96}{28} \right)} = 100e^{-j73,7^\circ} \text{ В,}$$

тогда  $u_2 = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 73,7^\circ)$  В.

### Задача 3.5

Комплексы действующих значений напряжения и тока равны:  $\underline{U} = 12,5 + j30$  В,  $\underline{I} = 1,6 + j1,2$  А. Определить сдвиг фаз между напряжением и током.

### Решение

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме:

$$\underline{U} = \sqrt{12,5^2 + 30^2} \cdot e^{j \arctg \frac{30}{12,5}} = 32,5e^{j67,4^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{I} = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1,2}{1,6}} = 2e^{j36,9^\circ} \text{ А.}$$

2. Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 67,4^\circ - 36,9^\circ = 30,5^\circ .$$

### Задача 3.6

Определить комплекс амплитудного значения и мгновенное значение падения напряжения на участке цепи с комплексным сопротивлением  $\underline{Z} = 26 + j42 \text{ Ом}$ , если мгновенное значение тока через элементы цепи составляет  $i = 1,25 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ А}$ .

#### Решение

1. Согласно закону Ома напряжение на участке:  $\underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z}$ .

Комплекс амплитудного значения тока:

$$\underline{I}_m = 1,25 e^{j25^\circ} \text{ А} .$$

Комплекс амплитудного значения падения напряжения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z} &= 1,25 e^{j25^\circ} (26 + j42) = 1,25 e^{j25^\circ} \cdot \sqrt{26^2 + 42^2} \cdot e^{j \arctg \frac{42}{26}} = \\ &= 1,25 e^{j25^\circ} \cdot 49,4 e^{j58,2^\circ} = 61,75 e^{j83,2^\circ} \text{ В} . \end{aligned}$$

2. Мгновенное значение падения напряжения на участке:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 61,75 \sin(\omega t + 83,2^\circ) \text{ В} .$$

### Задача 3.7

Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость двухполюсника, если напряжение и ток на входе двухполюсника:

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 40^\circ) \text{ В} , \quad i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ) \text{ А} .$$

#### Решение

1. Согласно закону Ома комплексное сопротивление двухполюсника  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$ .

Комплексы амплитудных значений напряжения и тока:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 220\sqrt{2} e^{j40^\circ} \text{ В} ,$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 5\sqrt{2} e^{j10^\circ} \text{ А} .$$

Комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{220\sqrt{2} e^{j40^\circ}}{5\sqrt{2} e^{j10^\circ}} = 44 e^{j30^\circ} = 38,1 + j22 \text{ Ом} .$$

2. Комплексная проводимость:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{44 e^{j30^\circ}} = 0,023 e^{-j30^\circ} =$$

$$= (19,68 - j11,36) 10^{-3} \text{ См} .$$

### Задача 3.8

В узле цепи (рис. 3.7) соединены три ветви. Определить комплекс действующего значения тока  $\underline{I}_3$ , если  $\underline{I}_1 = 1,4e^{-j43^\circ}$  А,  $\underline{I}_2 = 3,6e^{j60^\circ}$  А.

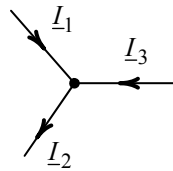


Рис. 3.7

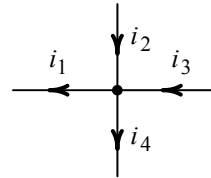


Рис. 3.8

### Решение

На основании первого закона Кирхгофа, согласно рис. 3.7:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = 3,6e^{j60^\circ} - 1,4e^{-j43^\circ} = \\ &= (1,8 + j3,12) - (1,02 - j0,95) = 0,78 + j4,07 = 4,14e^{j79,2^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

### Задача 3.9

В узле цепи (рис. 3.8) соединены четыре ветви. Определить мгновенное значение тока  $i_1$ , если мгновенные значения остальных токов равны:  $i_2 = 15\sin(\omega t - 15^\circ)$  А,  $i_3 = 25\sin(\omega t + 35^\circ)$  А,  $i_4 = 12\sin(\omega t - 60^\circ)$  А.

### Решение

На основании первого закона Кирхгофа, согласно рис. 3.8, для комплексов амплитудных значений токов

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{2m} + \underline{I}_{3m} - \underline{I}_{4m}.$$

Найдем

$$\underline{I}_{2m} = 15e^{-j15^\circ} = 14,5 - j3,9 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{3m} = 25e^{j35^\circ} = 20,5 + j14,3 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{4m} = 12e^{-j60^\circ} = 6 - j10,4 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1m} &= 14,5 - j3,9 + 20,5 + j14,3 - (6 - j10,4) = \\ &= 29 + j20,8 = 35,7e^{j35,7^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Мгновенное значение тока  $i_1$ :

$$i_1 = 35,7\sin(\omega t + 35,7^\circ) \text{ А.}$$

### Задача 3.10

Найти комплексные сопротивления и комплексные проводимости участков цепи (рис. 3.9–3.11), если  $r = 25 \text{ Ом}$ ,  $x_L = 60 \text{ Ом}$ ,  $x_C = 30 \text{ Ом}$ .

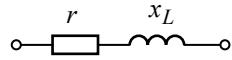


Рис. 3.9

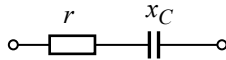


Рис. 3.10

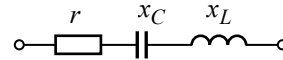


Рис. 3.11

### Решение

1. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.9:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r + jx_L = 25 + j60 = 65 e^{j67,4^\circ} \text{ Ом}, \\ \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{25 + j60} = \frac{1}{65 e^{j67,4^\circ}} = 0,0154 e^{-j67,4^\circ} = \\ &= 0,0059 - j0,0142 \text{ См}. \end{aligned}$$

2. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.10:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= r - jx_C = 25 - j30 = 39,1 e^{-j50,2^\circ} \text{ Ом}, \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{25 - j30} = \frac{1}{39,1 e^{-j50,2^\circ}} = 0,0256 e^{j50,2^\circ} = \\ &= 0,0164 + j0,0196 \text{ См}. \end{aligned}$$

3. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи, рис. 3.11:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= r + jx_L - jx_C = 25 + j60 - j30 = 25 + j30 = 39,1 e^{j50,2^\circ} \text{ Ом}, \\ \underline{Y}_3 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{25 + j30} = \frac{1}{39,1 e^{j50,2^\circ}} = 0,0256 e^{-j50,2^\circ} = \\ &= 0,0164 - j0,0196 \text{ См}. \end{aligned}$$

### Задача 3.11

Определить параметры элементов и характер цепи, состоящей из двух последовательно включенных сопротивлений  $r$  и  $x$ , если мгновенное значение напряжения на входе и ток соответственно равны:  $u = 100\sqrt{2} \sin(100t + 15^\circ) \text{ В}$ ,  $i = 3,8\sqrt{2} \sin(100t - 38^\circ) \text{ А}$ .

### Решение

1. Комплексы амплитудных значений напряжения и тока:

$$\underline{U}_m = 100\sqrt{2} e^{j15^\circ} \text{ В}, \quad \underline{I}_m = 3,8\sqrt{2} e^{-j38^\circ} \text{ А}.$$

2. Комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100\sqrt{2} e^{j15^\circ}}{3,8\sqrt{2} e^{-j38^\circ}} = 26,3 e^{j53^\circ} = 15,8 + j21 \text{ Ом}.$$

3. Активное сопротивление является действительной составляющей (вещественной частью) комплексного сопротивления:

$$r = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = \operatorname{Re}(15,8 + j21) = 15,8 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление является мнимой составляющей комплексного сопротивления:

$$x = x_L = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = \operatorname{Im}(15,8 + j21) = 21 \text{ Ом}.$$

Индуктивность

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{21}{100} = 0,21 \text{ Гн}.$$

4. Характер цепи ( $r-L$ ) активно-индуктивный, что определяется положительным знаком перед мнимой частью комплексного сопротивления  $\underline{Z}$  цепи.