Тема 4. Мощность при несинусоидальных напряжениях и токах, измерение активной мощности

В линейных цепях с периодическими несинусоидальными источниками широко используют такие понятия, как активная, реактивная и полная мощность. Общий подход в определении данных понятий достаточно просто позволяет установить, что активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей. Подобным же образом находят реактивную мощность в цепи несинусоидального тока, которая равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник. Через произведение действующих значений напряжения и тока выражается также полная мощность.

При выполнении расчетов мощности в линейных электрических цепях с несинусоидальными напряжениями и токами в основном интересуют вопросы, связанные с вычислениями активной, реактивной и полной мощности, определением коэффициента мощности, сохранением баланса по активной мощности, а также вопросы измерения активной мощности.

Задача 4.1

Для двухполюсника (рис. 4.1) задано напряжение и ток на входе:

$$u(t) = 120 + 250\sin\left(\omega t + 20^{\circ}\right) + 130\sin\left(3\omega t + 90^{\circ}\right) + 60\sin\left(5\omega t - 120^{\circ}\right) \text{ В},$$

$$i(t) = 0{,}5 + 2{,}4\sin\left(\omega t - 15^{\circ}\right) + 1{,}2\sin\left(3\omega t + 65^{\circ}\right) + 0{,}4\sin\left(5\omega t - 85^{\circ}\right) \text{ А}.$$

Определить активную, реактивную и полную мощность двухполюсника.

Решение

1. Активная мощность равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей

$$P = U^{(0)}I^{(0)} + U^{(1)}I^{(1)}\cos\varphi_1 + U^{(3)}I^{(3)}\cos\varphi_3 + U^{(5)}I^{(5)}\cos\varphi_5 =$$

$$= 120\cdot 0{,}5 + \frac{250}{\sqrt{2}}\frac{2{,}4}{\sqrt{2}}\cos\left[20^{\circ} - \left(-15^{\circ}\right)\right] + \frac{130}{\sqrt{2}}\frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\cos\left[90^{\circ} - 65^{\circ}\right] +$$

$$+ \frac{60}{\sqrt{2}}\frac{0{,}4}{\sqrt{2}}\cos\left[-120^{\circ} - \left(-85^{\circ}\right)\right] = 386{,}3 \text{ ВА}.$$

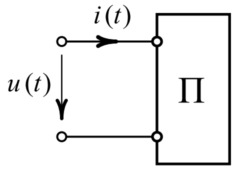

Рис. 4.1

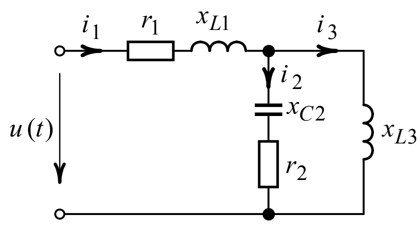

Рис. 4.2

2. Реактивная мощность равна сумме реактивных мощностей отдельных гармоник

$$Q = U^{(1)}I^{(1)}\sin\varphi_1 + U^{(3)}I^{(3)}\sin\varphi_3 + U^{(5)}I^{(5)}\sin\varphi_5 =$$

$$=\frac{250}{\sqrt{2}}\frac{2,4}{\sqrt{2}}\sin\left[20^{\circ}-\left(-15^{\circ}\right)\right]+\frac{130}{\sqrt{2}}\frac{1,2}{\sqrt{2}}\sin\left[90^{\circ}-65^{\circ}\right]+$$

$$+\frac{60}{\sqrt{2}}\frac{0,4}{\sqrt{2}}\sin\left[-120^{\circ}-\left(-85^{\circ}\right)\right]=198,2 \text{ ВАр}.$$

3. Для расчета полной мощности предварительно определим действующие значения напряжения и тока на входе двухполюсника.

Действующее значение напряжения:

$$U=\sqrt{\left[U^{(0)}\right]^2+\left[U^{(1)}\right]^2+\left[U^{(3)}\right]^2+\left[U^{(5)}\right]^2}=$$

$$=\sqrt{120^2+\left(\frac{250}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{130}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2}=236,4 \text{ В}.$$

Действующее значение тока:

$$I=\sqrt{\left[I^{(0)}\right]^2+\left[I^{(1)}\right]^2+\left[I^{(3)}\right]^2+\left[I^{(5)}\right]^2}=$$

$$=\sqrt{0,5^2+\left(\frac{2,4}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1,2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{0,4}{\sqrt{2}}\right)^2}=1,98 \text{ А}.$$

Полная мощность:

$$S=UI=236,4\cdot 1,98=468,1 \text{ ВА}.$$

Задача 4.2

К цепи, изображенной на рис. 4.2, приложено несинусоидальное напряжение $u(t)=30+120\sqrt{2}\sin\left(\omega t+60^{\circ}\right)+40\sqrt{2}\sin\left(3\omega t-90^{\circ}\right)$ В.

Определить активную, реактивную и полную мощность, мощность искажения и коэффициент мощности, если сопротивления элементов цепи при частоте основной гармоники равны: $r_1=25$ Ом, $r_2=15$ Ом, $x_{L1}=25$ Ом, $x_{L3}=30$ Ом, $x_{C2}=60$ Ом.

Решение

1. Расчет токов от действия постоянной составляющей напряжения $U^{(0)}=30$ В. Принимая сопротивления реактивных элементов на постоянном токе (рис. 4.2) равными $x_{L1}^{(0)}=0$, $x_{L3}^{(0)}=0$, $x_{C}^{(0)}=\infty$, получим

$$I_1^{(0)}=I_3^{(0)}=\frac{U^{(0)}}{r_1}=\frac{30}{25}=1,2 \text{ А};\ I_2^{(0)}=0.$$

2. Расчет токов для первой гармоники $(k=1)$.

Комплекс действующего значения первой гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(1)}=\frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j60^{\circ}}=120\underline{|60^{\circ}} \text{ В}.$$

Входное комплексное сопротивление цепи для первой гармоники

$$\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)} = r_1 + jx_{L1}^{(1)} + \frac{\left(r_2 - jx_{C2}^{(1)}\right) jx_{L3}^{(1)}}{r_2 - jx_{C2}^{(1)} + jx_{L3}^{(1)}} =$$

$$= 25 + j25 + \frac{(15 - j60)\,j30}{15 - j60 + j30} = 87{,}24\underline{|64{,}9^{\circ}}\ \text{Ом}.$$

Комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи (рис. 4.2)

$$\underline{I}_1^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)}} = \frac{120\underline{|60^{\circ}}}{87{,}24\underline{|64{,}9^{\circ}}} = 1{,}38\underline{|-4{,}9}\ \text{А}.$$

Комплексы действующих значений токов в параллельных ветвях

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{jx_{L3}^{(1)}}{r_2 - jx_{C2}^{(1)} + jx_{L3}^{(1)}} = 1{,}38\underline{|-4{,}9^{\circ}} \frac{j30}{15 - j60 + j30} =$$

$$= 1{,}23\underline{|148{,}5^{\circ}}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_3^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} - \underline{I}_2^{(1)} = 1{,}38\underline{|-4{,}9^{\circ}} - 1{,}23\underline{|148{,}5^{\circ}} = 2{,}54\underline{|-17{,}4^{\circ}}\ \text{А}.$$

3. Расчет токов для третьей гармоники $(k = 3)$.

Комплекс действующего значения третьей гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(3)} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j90^{\circ}} = 40\underline{|-90^{\circ}}\ \text{В}.$$

Сопротивления цепи для гармоники $k = 3$:

$$x_{L1}^{(3)} = kx_{L1}^{(1)} = 3 \cdot 25 = 75\ \text{Ом},$$

$$x_{L3}^{(3)} = kx_{L3}^{(1)} = 3 \cdot 30 = 90\ \text{Ом},$$

$$x_{C2}^{(3)} = \frac{x_{C2}^{(1)}}{k} = \frac{60}{3} = 20\ \text{Ом}.$$

Входное комплексное сопротивление для третьей гармоники:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}^{(3)} = r_1 + jx_{L1}^{(3)} + \frac{\left(r_2 - jx_{C2}^{(3)}\right) jx_{L3}^{(3)}}{r_2 - jx_{C2}^{(3)} + jx_{L3}^{(3)}} =$$

$$= 25 + j90 + \frac{\left(15 - j20\right) j90}{15 - j20 + j90} = 73\underline{|48{,}1^{\circ}}\ \text{Ом}.$$

Комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи (рис. 4.2):

$$\underline{I}_1^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{\underline{Z}_{\text{вх}}^{(3)}} = \frac{40\underline{|-90^{\circ}}}{73\underline{|48{,}1^{\circ}}} = 0{,}55\underline{|-138{,}1}\ \text{А}.$$

Комплексы действующих значений токов в параллельных ветвях:

$$\underline{I}_2^{(3)} = \underline{I}_1^{(3)} \frac{jx_{L3}^{(3)}}{r_2 - jx_{C2}^{(3)} + jx_{L3}^{(3)}} =$$

$$= 0,55\underline{\left|-138,1^{\circ}\right.}\,\frac{j90}{15 - j20 + j90} = 0,69\underline{\left|-126,1^{\circ}\right.}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3^{(3)} = \underline{I}_1^{(3)} - \underline{I}_2^{(3)} = 0,55\underline{\left|-138,1^{\circ}\right.} - 0,69\underline{\left|-126,1^{\circ}\right.} = 0,19\underline{\left|90,8^{\circ}\right.}\ \text{А}.$$

4. Активная мощность цепи

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} = U^{(0)}I_1^{(0)} + \mathrm{Re}\left[\underline{U}^{(1)}\overline{I}_1^{(1)}\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}^{(3)}\overline{I}_1^{(3)}\right] =$$

$$= 30\cdot 1,2 + \mathrm{Re}\left[120\underline{\left|60^{\circ}\right.}\cdot 1,38\underline{\left|+4,9^{\circ}\right.}\right] + \mathrm{Re}\left[40\underline{\left|-90^{\circ}\right.}\cdot 0,55\underline{\left|+138,1^{\circ}\right.}\right] =$$

$$= 120,9\ \text{Вт}.$$

Проверка:

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 1,91^2\cdot 25 + 1,41^2\cdot 15 = 121\ \text{Вт},$$

$$120,9\ \text{Вт} \approx 121\ \text{Вт},$$

где $I_1 = \sqrt{\left[I_1^{(0)}\right]^2 + \left[I_1^{(1)}\right]^2 + \left[I_1^{(3)}\right]^2} = \sqrt{1,2^2 + 1,38^2 + 0,55^2} = 1,91\ \text{А}.$

$$I_2 = \sqrt{\left[I_2^{(1)}\right]^2 + \left[I_2^{(3)}\right]^2} = \sqrt{1,23^2 + 0,69^2} = 1,41\ \text{А}.$$

5. Реактивная мощность цепи

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(3)} = \mathrm{Im}\left[\underline{U}^{(1)}\overline{I}_1^{(1)}\right] + \mathrm{Im}\left[\underline{U}^{(3)}\overline{I}_1^{(3)}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[120\underline{\left|60^{\circ}\right.}\cdot 1,38\underline{\left|+4,9^{\circ}\right.}\right] + \mathrm{Im}\left[40\underline{\left|-90^{\circ}\right.}\cdot 0,55\underline{\left|+138,1^{\circ}\right.}\right] = 166,3\ \text{ВАр}.$$

6. Полная мощность цепи

$$S = UI_1 = 130\cdot 1,91 = 248,3\ \text{ВА},$$

где $U = \sqrt{\left[U^{(0)}\right]^2 + \left[U^{(1)}\right]^2 + \left[U^{(3)}\right]^2} = \sqrt{30^2 + 120^2 + 40^2} = 130\ \text{В}.$

7. Мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{248,3^2 - 120,9^2 - 166,3^2} = 139,2\ \text{ВА}.$$

8. Коэффициент мощности

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{120,9}{248,3} = 0,487.$$

П р и м е ч а н и е. В цепях несинусоидального тока полная мощность $S \geq \sqrt{P^2 + Q^2}$, поэтому дополнительно вводят понятие мощности искажения T, определяемой из соотношения $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}$. Понятие коэффи-циента мощности при несинусоидальных токах и напряжениях не совпадает с понятием $\cos\varphi$ в цепях синусоидального тока.

Задача 4.3

Определить мощность, которую показывает ваттметр в цепи (рис. 4.3), если на входе цепи действует несинусоидальный источник напряжения: $u(t) = 50\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^{\circ}) + 20\sqrt{2}\sin(2\omega t + 60^{\circ})$ В. Сопротивления элементов цепи при частоте первой гармоники равны: $r_1 = 15$ Ом, $r_2 = 20$ Ом, $r_3 = 25$ Ом, $x_{C2} = 20$ Ом, $x_{L3} = 25$ Ом. Выполнить проверку по балансу активных мощностей.

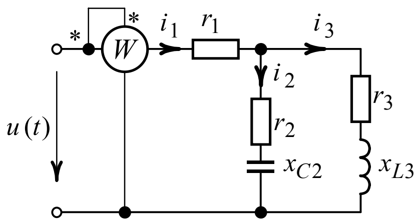

Рис. 4.3

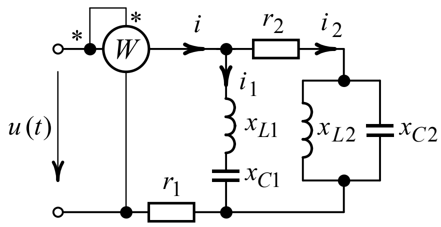

Рис. 4.4

Решение

1. Расчет для первой гармоники $(k = 1)$.

Комплекс действующего значения первой гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(1)} = 50\underline{\left|-30^{\circ}\right.} \text{ В}.$$

Входное комплексное сопротивление цепи для первой гармоники

$$\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)} = r_1 + \frac{\left(r_2 - jx_{C2}^{(1)}\right)\left(r_3 + jx_{L3}^{(1)}\right)}{r_2 + r_3 - jx_{C2}^{(1)} + jx_{L3}^{(1)}} =$$

$$= 15 + \frac{(20 - j20)(25 + j25)}{20 + 25 - j20 + j25} = 37{,}03\underline{\left|-3{,}8^{\circ}\right.} \text{ Ом}.$$

Токи в неразветвленной части цепи и в параллельных ветвях:

$$\underline{I}_1^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)}} = \frac{50\underline{\left|-30^{\circ}\right.}}{37{,}03\underline{\left|-3{,}8^{\circ}\right.}} = 1{,}35\underline{\left|-26{,}2^{\circ}\right.} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{r_3 + jx_{L3}^{(1)}}{r_2 + r_3 - jx_{C2}^{(1)} + jx_{L3}^{(1)}} =$$

$$= 1{,}35\underline{\left|-26{,}2^{\circ}\right.} \frac{25 + j25}{45 + j5} = 1{,}05\underline{\left|12{,}5^{\circ}\right.} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} - \underline{I}_2^{(1)} = 1{,}35\underline{\left|-26{,}2^{\circ}\right.} - 1{,}05\underline{\left|12{,}5^{\circ}\right.} = 0{,}84\underline{\left|-77{,}3^{\circ}\right.} \text{ А}.$$

2. Расчет для второй гармоники $(k = 2)$.

Комплекс действующего значения второй гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(2)} = 20\underline{\left|60^{\circ}\right.} \text{ В}.$$

Реактивные сопротивления для гармоники $k = 2$:

$$x_{L3}^{(2)} = kx_{L3}^{(1)} = 2 \cdot 25 = 50 \text{ Ом}, \quad x_{C2}^{(2)} = \frac{x_{C2}^{(1)}}{k} = \frac{20}{2} = 10 \text{ Ом}.$$

Входное комплексное сопротивление цепи для второй гармоники

$$\underline{Z}_{\text{вх}}^{(2)} = r_1 + \frac{\left(r_2 - jx_{C2}^{(2)}\right)\left(r_3 + jx_{L3}^{(2)}\right)}{r_2 + r_3 - jx_{C2}^{(2)} + jx_{L3}^{(2)}} =$$

$$= \frac{(20 - j10)(25 + j50)}{20 + 25 - j10 + j50} = 35,73\underline{\left|-2,8^{\circ}\right.} \text{ Ом}.$$