Тема 3. Расчет резонансных режимов в цепях несинусоидального тока

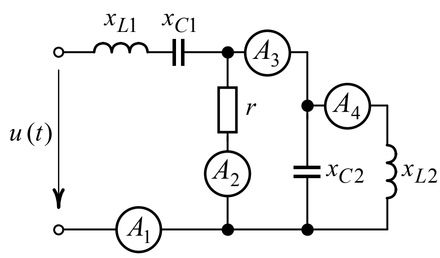
При несинусоидальных источниках в цепях, содержащих участки индуктивного и емкостного характера, возможны отдельные резонансы гармонических составляющих.

Условия возникновения и особенности резонанса напряжений и резонанса тока отдельных гармоник аналогичны условиям возникновения и особенностям резонанса в цепях однофазного синусоидального тока со всеми присущими данным резонансам явлениями.

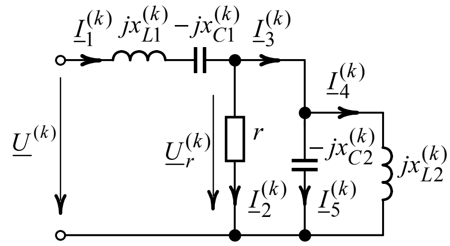
В цепях, содержащих несинусоидальные источники, резонанс гармонических составляющих нашел применение для выделения или подавления определенных частот.

Задача 3.1

К входу линейной цепи, изображенной на рис. 3.1, а, приложено напряжение несинусоидального источника $u(t)=125\sqrt{2}\sin\omega t+\quad +65\sqrt{2}\sin\left(2\omega t+90^{\circ}\right)$ В. Определить показания амперметров электромагнитной системы, установленных в этой цепи, если сопротивления элементов при частоте основной гармоники соответственно равны: $r=15$ Ом, $x_{L1}=10$ Ом, $x_{C1}=40$ Ом, $x_{L2}=x_{C2}=60$ Ом.



а



б

Рис. 3.1

Решение

1. Расчет для первой гармоники $(k=1)$. Расчет выполним по схеме замещения цепи (рис. 3.1, б) с использованием комплексного метода.

Комплекс действующего значения первой гармоники напряжения:

$$\underline{U}^{(1)}=\frac{125\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j0^{\circ}}=125\underline{|0^{\circ}}\ \text{В}.$$

Равенство реактивных сопротивлений $x_{L2}^{(1)}=x_{C2}^{(1)}$, а следовательно, и реактивных проводимостей по первой гармонике определяет резонанс токов параллельного контура. Из этого следует, что $\underline{I}_3^{(1)}=0$ (вследствие бесконечно большого сопротивления), $\left|\underline{I}_4^{(1)}\right|=\left|\underline{I}_5^{(1)}\right|\neq 0$, $\underline{I}_1^{(1)}=\underline{I}_2^{(1)}$.

В результате для комплексов действующих значений токов получим

$$\underline{I}_1^{(1)}=\underline{I}_2^{(1)}=\frac{\underline{U}^{(1)}}{r\ +jx_{L1}^{(1)}-jx_{C1}^{(1)}}=\frac{125\underline{|0^{\circ}}}{15+j10-j40}=3,73\underline{|63,4^{\circ}}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_4^{(1)} = \frac{\underline{U}_r^{(1)}}{jx_{L2}^{(1)}} = \frac{55,9\angle 63,4^{\circ}}{j60} = 0,93\angle -26,6^{\circ} \text{ А},$$

где $\underline{U}_r^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)} r = 3,73\angle 63,4^{\circ} \cdot 15 = 55,9\angle 63,4^{\circ}$ В.

2. Расчет для второй гармоники $(k = 2)$.

Комплекс действующего значения второй гармоники напряжения:

$$\underline{U}^{(2)} = \frac{65\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j90^{\circ}} = 65\angle 90^{\circ} \text{ В}.$$

Реактивные сопротивления цепи для гармоники $k = 2$:

$$x_{L1}^{(2)} = k x_{L1}^{(1)} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ Ом},$$

$$x_{L2}^{(2)} = k x_{L2}^{(1)} = 2 \cdot 60 = 120 \text{ Ом},$$

$$x_{C1}^{(2)} = \frac{x_{C1}^{(1)}}{k} = \frac{40}{2} = 20 \text{ Ом},$$

$$x_{C2}^{(2)} = \frac{x_{C2}^{(1)}}{k} = \frac{60}{2} = 30 \text{ Ом}.$$

Равенство реактивных сопротивлений $x_{L1}^{(2)} = x_{C1}^{(2)}$ на частоте второй гармоники определяет резонанс напряжений последовательного контура и равенство нулю его общего сопротивления. Отсюда следует (рис. 3.1, б), что

$$\underline{U}_r^{(2)} = \underline{U}^{(2)} = 65\angle 90^{\circ} \text{ В}.$$

В результате для комплексов действующих значений токов второй гармоники (рис. 3.1, б) получим

$$\underline{I}_4^{(2)} = \frac{\underline{U}_r^{(2)}}{jx_{L2}^{(2)}} = \frac{65\angle 90^{\circ}}{j120} = 0,54\angle 0^{\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_5^{(2)} = \frac{\underline{U}_r^{(2)}}{-jx_{C2}^{(2)}} = \frac{65\angle 90^{\circ}}{-j30} = 2,17\angle 180^{\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3^{(2)} = \underline{I}_4^{(2)} + \underline{I}_5^{(2)} = 0,54\angle 0^{\circ} + 2,17\angle 180^{\circ} = 1,63\angle 180^{\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2^{(2)} = \frac{\underline{U}_r^{(2)}}{r} = \frac{65\angle 90^{\circ}}{15} = 4,33\angle 90^{\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_1^{(2)} = \underline{I}_2^{(2)} + \underline{I}_3^{(2)} = 4,33\angle 90^{\circ} + 1,63\angle 180^{\circ} = 4,63\angle 110,6^{\circ} \text{ А}.$$

3. Действующие значения токов от действия обеих гармоник (показания амперметров):

$$I_{A1} = I_1 = \sqrt{\left[I_1^{(1)}\right]^2 + \left[I_1^{(2)}\right]^2} = \sqrt{3,73^2 + 4,63^2} = 5,95 \text{ А},$$

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{\left[I_2^{(1)}\right]^2 + \left[I_2^{(2)}\right]^2} = \sqrt{3,73^2 + 4,33^2} = 5,72 \text{ А},$$

$$I_{A3} = I_3 = \sqrt{\left[I_3^{(1)}\right]^2 + \left[I_3^{(2)}\right]^2} = \sqrt{0 + 1,63^2} = 1,63 \text{ А},$$

$$I_{A4} = I_4 = \sqrt{\left[I_4^{(1)}\right]^2 + \left[I_4^{(2)}\right]^2} = \sqrt{0{,}93^2 + 0{,}54^2} = 1{,}08 \text{ А}.$$

Задача 3.2

Определить показания приборов электромагнитной системы, установленных в цепи (рис. 3.2, а), если напряжение на входе цепи изменяется по закону $u(t) = 20 + 60\sqrt{2}\sin\omega t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega t$ В. Сопротивления элементов цепи при частоте основной гармоники равны: $r = 40$ Ом, $x_{L1} = 10$ Ом, $x_{C1} = 90$ Ом, $x_{L2} = x_{C2} = 30$ Ом.

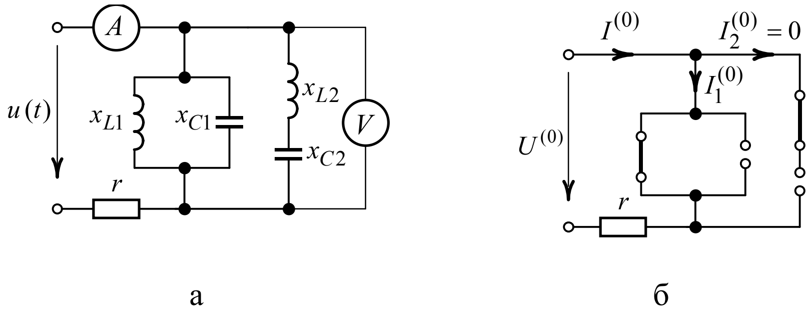


Рис. 3.2

Решение

1. Расчет цепи от действия постоянной составляющей напряжения $U^{(0)} = 20$ В.

С учетом того что сопротивления реактивных элементов по постоянному току равны $x_{L1}^{(0)} = 0$, $x_{L2}^{(0)} = 0$, $x_{C1}^{(0)} = \infty$, $x_{C2}^{(0)} = \infty$ (рис. 3.2, б), получим

$$I_2^{(0)} = 0,\ U_V^{(0)} = 0,$$

$$I^{(0)} = I_1^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{r} = \frac{20}{40} = 0{,}5 \text{ А}.$$

2. Расчет для первой гармоники $(k = 1)$. Расчет выполним по схеме (рис. 3.3, а) с использованием комплексного метода.

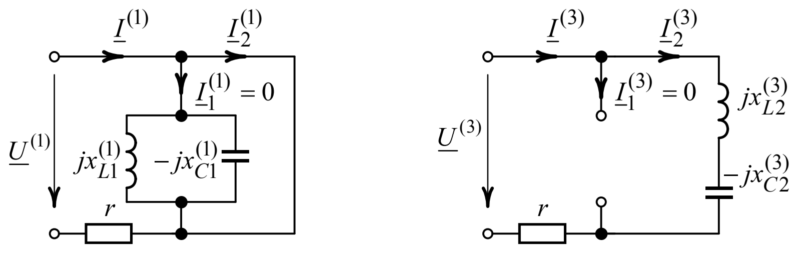
Комплекс действующего значения первой гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(1)} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 60\underline{|0^\circ} \text{ В}.$$

Равенство реактивных сопротивлений $x_{L2}^{(1)} = x_{C2}^{(1)}$ по первой гармонике определяет резонанс напряжений последовательного контура и равенство нулю его общего сопротивления, следовательно, $\underline{I}^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)}$, $\underline{U}_V^{(1)} = 0$, $\underline{I}_1^{(1)} = 0$ (ток в параллельный контур не поступает).

В результате получим

$$\underline{I}^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{r} = \frac{60\underline{|0^\circ}}{40} = 1{,}5\underline{|0^\circ} \text{ А}.$$



а б

Рис. 3.3

3. Расчет для третьей гармоники $(k = 3)$.

Комплекс действующего значения третьей гармоники напряжения

$$\underline{U}^{(3)} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^{\circ}} = 30\underline{|0^{\circ}} \text{ В}.$$

Сопротивления цепи для гармоники $k = 3$:

$$x_{L1}^{(3)} = k x_{L1}^{(1)} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ Ом},$$

$$x_{L2}^{(3)} = k x_{L2}^{(1)} = 3 \cdot 30 = 90 \text{ Ом},$$

$$x_{C1}^{(3)} = \frac{x_{C1}^{(1)}}{k} = \frac{90}{3} = 30 \text{ Ом},$$

$$x_{C2}^{(3)} = \frac{x_{C1}^{(1)}}{k} = \frac{30}{3} = 10 \text{ Ом}.$$

Равенство реактивных сопротивлений $x_{L1}^{(3)} = x_{C1}^{(3)}$ определяет резонанс токов на частоте третьей гармоники, и общее сопротивление параллельного контура равно бесконечности.

Отсюда (рис. 3.3, б)

$$\underline{I}_1^{(3)} = 0,$$

$$\underline{I}^{(3)} = \underline{I}_2^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{r + jx_{L2}^{(3)} - jx_{C2}^{(3)}} = \frac{30\underline{|0^{\circ}}}{40 + j80} = 0{,}34\underline{|-63{,}4^{\circ}} \text{ А},$$

$$\underline{U}_V^{(3)} = \underline{I}_2^{(3)}\left(jx_{L2}^{(3)} - jx_{C2}^{(3)}\right) = 0{,}34\underline{|-63{,}4^{\circ}} \cdot j80 = 27{,}2\underline{|26{,}6^{\circ}} \text{ В}.$$

4. Показания приборов.

Действующее значение тока (показание амперметра):

$$I_A = I = \sqrt{\left[I^{(0)}\right]^2 + \left[I^{(1)}\right]^2 + \left[I^{(3)}\right]^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}34^2} = 1{,}62 \text{ А}.$$

Действующее значение напряжения (показание вольтметра):

$$U_V = \sqrt{\left[U_V^{(0)}\right]^2 + \left[U_V^{(1)}\right]^2 + \left[U_V^{(3)}\right]^2} = \sqrt{0 + 0 + 27{,}2^2} = 27{,}2 \text{ В}.$$

Задача 3.3

На входе четырехполюсника (рис. 3.4, а) действует несинусоидальный источник напряжения $u_1(t) = U_0 + U_{m1}\sin\omega t + U_{m3}\sin 3\omega t$ В. Подобрать емкости конденсаторов C_1 и C_2 такими, чтобы на выходе четырехполюсника присутствовала только постоянная составляющая напряжения. Параметры четырехполюсника $L_1 = L_2 = 0{,}003$ Гн, частота основной гармоники $f = 1000$ Гц.

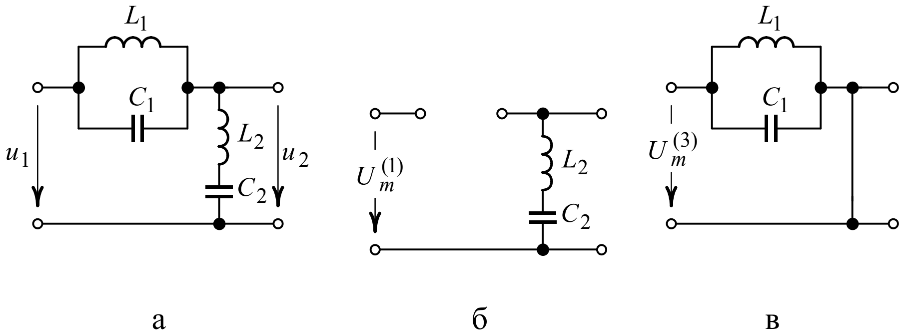


Рис. 3.4

Решение

1. Схема четырехполюсника (рис. 3.4, а) содержит параллельный L_1, C_1 и последовательный L_2, C_2 контуры. Для того чтобы на выходе четырехполюсника первая и третья гармоники напряжения отсутст-вовали, необходимо, чтобы оба контура были настроены на резонанс.

Рассмотрим два возможных варианта решения задачи.

2. Первый вариант решения задачи.

Параллельный контур настроен в резонанс по частоте основной (первой) гармоники, а последовательный контур в резонанс по частоте третьей гармоники напряжения.

Из условия резонансов токов параллельного контура на частоте первой гармоники следует

$$\frac{1}{\omega L_1} = \omega C_1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{\omega^2 L_1} = \frac{1}{6283^2 \cdot 0{,}003} = 8{,}44 \text{ мкФ},$$

где $\omega = 2\pi f = 6283$ с$^{-1}$.

Схема замещения четырехполюсника для напряжения первой гармоники приведена на рис. 3.4, б.

Из условия резонанса напряжения последовательного контура на частоте третьей гармоники следует

$$3\omega L_2 = \frac{1}{3\omega C_2},$$

откуда

$$C_2 = \frac{1}{9\omega^2 L_2} = \frac{1}{9 \cdot 6283^2 \cdot 0{,}003} = 0{,}94 \text{ мкФ}.$$

Схема замещения четырехполюсника для напряжения третьей гармоники приведена на рис. 3.4, в.

Следовательно, на выходе четырехполюсника будет присутствовать только постоянная составляющая входного напряжения $u_2 = U_0$.

3. Второй вариант решения задачи.

Параллельный контур настроен в резонанс по частоте третьей гармоники напряжения, а последовательный контур в резонанс по частоте первой гармоники напряжения.

Из условия резонанса токов на частоте третьей гармоники и резонанса напряжения на частоте первой гармоники следует:

$$C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = \frac{1}{9 \cdot 6283^2 \cdot 0{,}003} = 0{,}94\ \text{мкФ},$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_2} = \frac{1}{6283^2 \cdot 0{,}003} = 8{,}44\ \text{мкФ}.$$

Задача 3.4

На входе цепи (рис. 3.5, а) подано напряжение $u(t) = U_{m1}\sin\omega t + U_{m3}\sin 3\omega t + U_{m5}\sin 5\omega t$ В. Определить, при каких значениях параметров L_1, C_2 цепь не пропускает в сопротивление нагрузки $R_\text{н}$ пятой гармоники тока и не представляет сопротивления для третьей гармоники тока, если $C_1 = 1{,}2$ мкФ, частота основной гармоники напряжения $f = 200$ Гц.

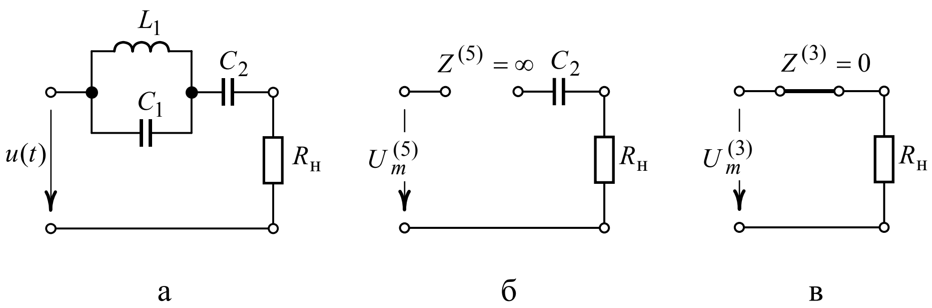


Рис. 3.5

Решение

1. Пятая гармоника тока в сопротивлении $R_\text{н}$ будет отсутствовать, если параллельный контур L_1, C_1 будет настроен в резонанс по частоте пятой гармоники (резонанс токов). Резонанс токов параллельного контура на частоте пятой гармоники следует из условия

$$\frac{1}{5\omega L_1} = 5\omega C_1,$$

откуда находим

$$L_1 = \frac{1}{25\omega^2 C_1} = \frac{1}{25 \cdot 1257^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}021\ \text{Гн},$$

где $\omega = 2\pi f = 1257\ \text{с}^{-1}$.

Схема замещения цепи для пятой гармоники тока показана на рис. 3.5, б. Сопротивление параллельного контура L_1, C_1 при частоте пятой гармоники бесконечно большое $(Z^{(5)} = \infty)$, что характеризует разрыв в цепи.

2. Для того чтобы цепь не представляла сопротивления для третьей гармоники тока, необходимо, чтобы общее сопротивление контура L_1, C_1 и C_2 было равно нулю (резонанс напряжений).

Из условия резонанса напряжений на частоте третьей гармоники следует:

$$\frac{j3\omega L_1 \dfrac{1}{j3\omega C_1}}{j3\omega L_1 + \dfrac{1}{j3\omega C_1}} + \frac{1}{j3\omega C_2} = 0\,,$$

откуда находим

$$C_2 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{1}{9 \cdot 1257^2 \cdot 0{,}021} - 1{,}2 \cdot 10^{-6} = 2{,}15 \text{ мкФ}\,.$$

Схема замещения цепи для третьей гармоники тока приведена на рис. 3.5, в. Общее сопротивление контура L_1, C_1 и C_2 на частоте третьей гармоники равно нулю $(Z^{(3)} = 0)$.