

## Тема 2. Расчет трехфазных цепей при несимметричной нагрузке

При несимметричной нагрузке сопротивление хотя бы одной из фаз не равно сопротивлениям других фаз. Особенностью анализа трехфазной электрической цепи при несимметричной нагрузке является то, что расчет производится на каждую фазу в отдельности. Несмотря на то, что трехфазный генератор образует симметричную систему трех синусоидальных ЭДС одинаковой амплитуды и частоты и сдвинутых по фазе на  $120^\circ$ , напряжения и токи в фазах могут отличаться как по амплитуде, так и по начальной фазе. Используемые при расчетах подходы определяются схемой соединения симметричного трехфазного генератора и несимметричной нагрузки.

### Задача 2.1

К симметричному трехфазному генератору, соединенному звездой с фазной ЭДС  $E_\phi = 220$  В, присоединена несимметричная нагрузка, также соединенная звездой (рис. 2.1). Определить комплексы действующих значений токов в фазах нагрузки, если  $r = 25$  Ом,  $x_L = 30$  Ом,  $x_C = 10$  Ом. Построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

### Решение

1. Комплексы действующих значений фазных ЭДС симметричного генератора. Примем

$$\underline{E}_A = E_\phi e^{j0^\circ} = 220 \underline{0^\circ} \text{ В},$$

тогда

$$\underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 220 \underline{0^\circ} = 220 \underline{-120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = a \underline{E}_A = e^{j120^\circ} \cdot 220 \underline{0^\circ} = 220 \underline{120^\circ} \text{ В}.$$

2. Напряжение смещения нейтрали между нейтральными точками  $nN$  находим по методу узловых потенциалов:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nN} &= \frac{\frac{\underline{E}_A}{r} + \frac{\underline{E}_B}{jx_L} + \frac{\underline{E}_C}{-jx_C}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C}} = \frac{\frac{220 \underline{0^\circ}}{25} + \frac{220 \underline{-120^\circ}}{j30} + \frac{220 \underline{120^\circ}}{-j10}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{j30} + \frac{1}{-j10}} = \\ &= \frac{18,15 \underline{-156,2^\circ}}{0,078 \underline{59^\circ}} = 232,69 \underline{144,8^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

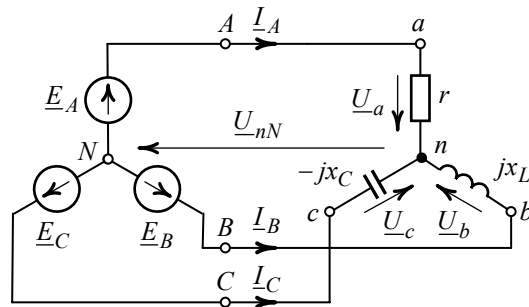


Рис. 2.1

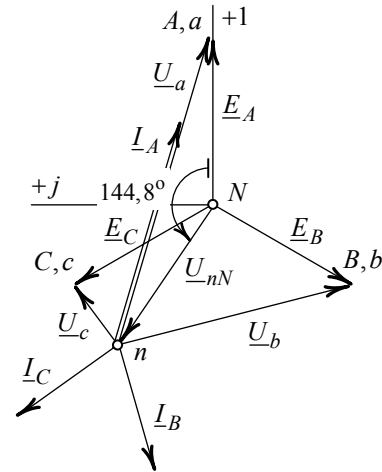


Рис. 2.2

3. Напряжения на фазах нагрузки найдем по второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN} = 220 \angle 0^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 431,52 \angle -18,1^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN} = 220 \angle -120^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 334,4 \angle -76,1^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN} = 220 \angle 120^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 97,99 \angle 35,1^\circ \text{ В}.$$

4. Комплексы действующих значений токов в фазах найдем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{r} = \frac{431,52 \angle -18,1^\circ}{25} = 17,26 \angle -18,1^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{jx_L} = \frac{334,4 \angle -76,1^\circ}{j30} = 11,15 \angle -166,1^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{-jx_C} = \frac{97,99 \angle 35,1^\circ}{-j10} = 9,8 \angle 125,1^\circ \text{ А}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 17,26 \angle -18,1^\circ + 11,15 \angle -166,1^\circ + 9,8 \angle 125,1^\circ \approx 0.$$

5. Для построения совмещенной топографической диаграммы напряжений и векторной диаграммы токов (рис. 2.2) в выбранном масштабе на комплексной плоскости строим векторы фазных ЭДС  $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$  и  $\underline{E}_C$ . Из точки  $N$  откладываем вектор напряжения  $\underline{U}_{nN}$ , получим нейтральную точку  $n$  нагрузки. Соединив точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  с точкой  $n$ , соответствующие началам и концам фаз нагрузки, получим векторы фазных напряжений  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$  и  $\underline{U}_c$ . Векторы фазных (линейных) токов строим из точки  $n$  в зависимости от характера нагрузки в фазах или относительно рассчитанного значения аргумента при токе.

### Задача 2.2

К выводам симметричного трехфазного генератора с фазной ЭДС  $E_\phi = 240 \text{ В}$  подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым проводом (рис. 2.3). Сопротивления фаз нагрузки  $r_a = 6 \text{ Ом}$ ,  $r_b = 12 \text{ Ом}$ ,  $r_c = 24 \text{ Ом}$ . Сопротивление

каждого провода линии  $r = 3 \text{ Ом}$ ,  $x_L = 4 \text{ Ом}$  и сопротивление нейтрального провода  $r_0 = 8 \text{ Ом}$ . Определить показания приборов электромагнитной системы, установленных в схеме.

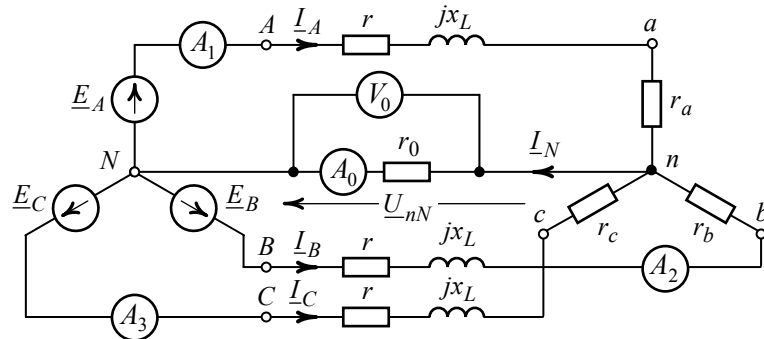


Рис. 2.3

### Решение

1. Комплексы действующих значений фазных ЭДС генератора. Пусть

$$\underline{E}_A = E_\phi e^{j0^\circ} = 240 \underline{0^\circ} \text{ В},$$

тогда

$$\underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 240 \underline{0^\circ} = 240 \underline{-120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{E}_C = a \underline{E}_A = e^{j120^\circ} \cdot 240 \underline{0^\circ} = 240 \underline{120^\circ} \text{ В}.$$

2. Комплексные сопротивления фаз нагрузки и линии:

$$\underline{Z}_A = r + r_a + jx_L = 9 + j4 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_B = r + r_b + jx_L = 15 + j4 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_C = r + r_c + jx_L = 27 + j4 \text{ Ом}.$$

3. Комплекс действующего значения напряжения смещения нейтрали:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nN} &= \frac{\frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{r_0}} = \frac{\frac{240 \underline{0^\circ}}{9 + j4} + \frac{240 \underline{-120^\circ}}{15 + j4} + \frac{240 \underline{120^\circ}}{27 + j4}}{\frac{1}{9 + j4} + \frac{1}{15 + j4} + \frac{1}{27 + j4} + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{15,04 \underline{-57,4^\circ}}{0,323 \underline{-11,3^\circ}} = 46,56 \underline{-46,1^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

4. Комплексы действующих значений линейных (фазных) токов:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_A} = \frac{240 \underline{0^\circ} - 46,56 \underline{-46,1^\circ}}{9 + j4} = 21,36 \underline{-14,8^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_B} = \frac{240 \underline{-120^\circ} - 46,56 \underline{-46,1^\circ}}{15 + j4} = 14,91 \underline{-146,1^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_C} = \frac{240 \underline{120^\circ} - 46,56 \underline{-46,1^\circ}}{27 + j4} = 10,46 \underline{113,8^\circ} \text{ А}.$$

5. Комплекс действующего значения тока в нейтральном проводе:

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{nN}}{r_0} = \frac{46,56 \angle -46,1^\circ}{8} = 5,82 \angle -46,1^\circ \text{ А.}$$

Проверка решения по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} & \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_0 - \underline{I}_{nN} = \\ & = 21,36 \angle -14,8^\circ + 14,91 \angle -146,1^\circ + 10,46 \angle 113,8^\circ - 5,82 \angle -46,1^\circ \approx 0. \end{aligned}$$

6. Измерительные приборы показывают действующие значения величин:

$$\begin{aligned} I_{A1} &= |\underline{I}_A| = 21,36 \text{ А}, \quad I_{A2} = |\underline{I}_B| = 14,91 \text{ А}, \\ I_{A3} &= |\underline{I}_C| = 10,46 \text{ А}, \quad I_{A0} = |\underline{I}_N| = 5,82 \text{ А}, \quad U_V = |\underline{U}_{nN}| = 46,56 \text{ В}. \end{aligned}$$

### Задача 2.3

В четырехпроводную линию трехфазной симметричной сети с фазным напряжением  $U_\phi = 120 \text{ В}$  включена несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой (рис. 2.4). Определить показания амперметров на каждой фазе нагрузки и нейтральном проводе, если  $\underline{Z}_A = 16 + j12 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_B = 8 + j6 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_C = 24 - j18 \text{ Ом}$ . Построить совмещенную топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

### Решение

1. Комплексы действующих значений фазных напряжений трехфазной сети. Примем

$$\underline{U}_A = U_\phi e^{j0^\circ} = 120 \angle 0^\circ \text{ В},$$

тогда

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 120 \angle 0^\circ = 120 \angle -120^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_C = a \underline{U}_A = e^{j120^\circ} \cdot 120 \angle 0^\circ = 120 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

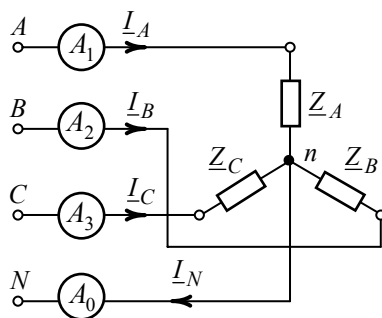


Рис. 2.4

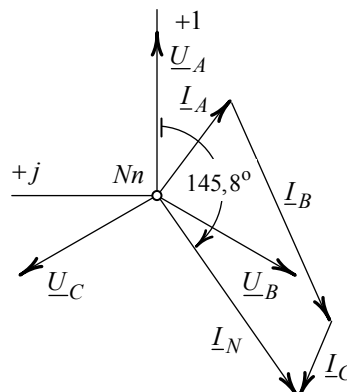


Рис. 2.5

2. При наличии нейтрального провода и отсутствии сопротивления в нем напряжение каждой фазы сети приложено непосредственно к соответствующей фазе нагрузки. Ток каждой фазы замыкается через нейтральный провод и не влияет на токи других фаз.

Комплексы действующих значений токов в фазах нагрузки следует рассчитать по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{120|0^\circ}{16 + j12} = 6|-36,9^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{120|-120^\circ}{8 + j6} = 12|-156,9^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{120|120^\circ}{24 - j18} = 4|156,9^\circ \text{ A}.$$

3. Комплекс действующего значения тока в нейтральном проводе определим по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \\ &= 6|-36,9^\circ + 12|-156,9^\circ + 4|156,9^\circ = 12|-145,8^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

4. Амперметры показывают действующие значения величин

$$I_{A1} = |\underline{I}_A| = 6 \text{ A}, \quad I_{A2} = |\underline{I}_B| = 12 \text{ A}, \quad I_{A3} = |\underline{I}_C| = 4 \text{ A}, \quad I_{A0} = |\underline{I}_N| = 12 \text{ A}.$$

5. Построение совмещенной топографической диаграммы напряжений и векторной диаграммы токов показано на рис. 2.5. Выбираем масштабы для напряжения и тока. На комплексной плоскости строим векторы фазных напряжений  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$ . Топографические диаграммы напряжений сети и нагрузки совпадают. Вектор тока в нейтральном проводе получаем как геометрическую сумму векторов фазных токов. Начало построения осуществляем из точки  $N$ .

#### Задача 2.4

К выводам симметричного трехфазного генератора с фазным напряжением  $U_\phi = 220 \text{ В}$  подключена несимметричная нагрузка, соединенная треугольником (рис. 2.6). Определить линейные, фазные токи и показания амперметров электромагнитной системы, если сопротивления нагрузки равны  $r = x_L = x_C = 25 \text{ Ом}$ . Построить совмещенную топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

#### Решение

1. Комплексы действующих значений линейных напряжений. Пусть

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}U_\phi e^{j0^\circ} = \sqrt{3} \cdot 220 e^{j0^\circ} = 380|0^\circ \text{ В},$$

тогда

$$\underline{U}_{BC} = a^2 \underline{U}_{AB} = e^{-j120^\circ} 380|0^\circ = 380|-120^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{CA} = a \underline{U}_{AB} = e^{j120^\circ} \cdot 380|0^\circ = 380|120^\circ \text{ В}.$$

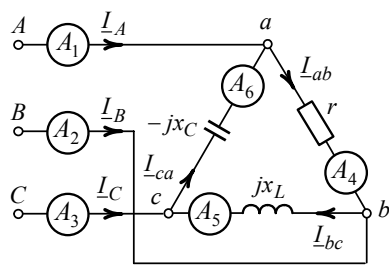


Рис. 2.6

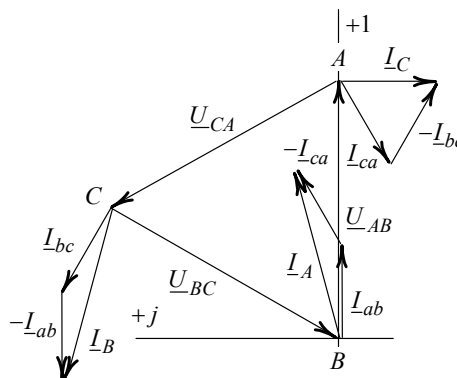


Рис. 2.7

2. Комплексы действующих значений фазных токов:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{r} = \frac{380 \angle 0^\circ}{25} = 15,2 \angle 0^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{jx_L} = \frac{380 \angle -120^\circ}{j25} = 15,2 \angle 150^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{-jx_C} = \frac{380 \angle 120^\circ}{-j25} = 15,2 \angle -150^\circ \text{ A}.$$

3. Комплексы действующих значений линейных токов вычислим по первому закону Кирхгофа через разность фазных токов:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 15,2 \angle 0^\circ - 15,2 \angle -150^\circ = 29,4 \angle 15^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 15,2 \angle 150^\circ - 15,2 \angle 0^\circ = 29,4 \angle 165^\circ \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 15,2 \angle -150^\circ - 15,2 \angle 150^\circ = 15,2 \angle -90^\circ \text{ A}.$$

4. Амперметры показывают действующие значения величин фазных и линейных токов

$$I_{A1} = I_{A2} = 29,4 \text{ A}, \quad I_{A3} \dots I_{A6} = 15,2 \text{ A}.$$

5. Топографическая диаграмма напряжений, совмещенная с векторной диаграммой токов, приведена на рис. 2.7. Построение векторной диаграммы начинаем с фазных токов  $\underline{I}_{ab}$ ,  $\underline{I}_{bc}$  и  $\underline{I}_{ca}$ . Векторы линейных токов  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$  и  $\underline{I}_C$  строим как геометрическую разность фазных токов соответствующих фаз.

### Задача 2.5

Цепь (рис. 2.8) получает питание от симметричного трехфазного источника с линейным напряжением  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ . Определить показания амперметров электромагнитной системы, установленных в цепи, если сопротивления фаз нагрузки  $\underline{Z}_{ab} = 25 + j150 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{bc} = 10 - j50 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_{ca} = 40 + j120 \text{ Ом}$ . Сопротивление линии  $\underline{Z}_{\text{л}} = 15 + j30 \text{ Ом}$ .

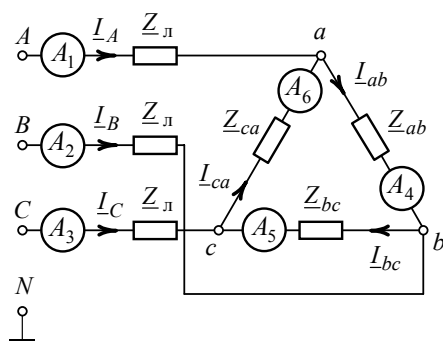


Рис. 2.8

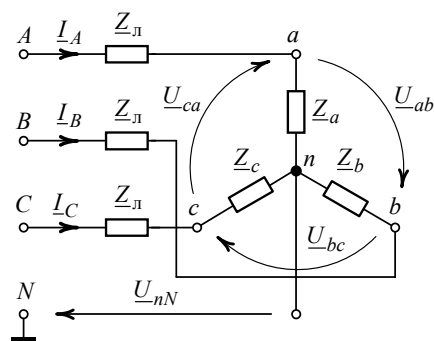


Рис. 2.9

### Решение

1. Действующее значение фазного напряжения источника

$$U_{\Phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Комплексы действующих значений фазных напряжений трехфазного источника. Пусть

$$\underline{U}_A = U_{\Phi} e^{j0^\circ} = 220 \angle 0^\circ \text{ В,}$$

тогда

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_A = e^{-j120^\circ} 220 \angle 0^\circ = 220 \angle -120^\circ \text{ В,}$$

$$\underline{U}_C = a \underline{U}_A = e^{j120^\circ} \cdot 220 \angle 0^\circ = 220 \angle 120^\circ \text{ В.}$$

2. Преобразуем треугольник сопротивлений фаз нагрузки в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 2.9).

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} = \frac{(25 + j150)(40 + j120)}{75 + j220} = 82,76 \angle 80,9^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} = \frac{(10 - j50)(25 + j150)}{75 + j220} = 33,36 \angle -69,3^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} = \frac{(40 + j120)(10 - j50)}{75 + j220} = 27,75 \angle -78,3^\circ \text{ Ом.}$$

3. Комплексные сопротивления фаз:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_n + \underline{Z}_a = 15 + j30 + 82,76 \angle 80,9^\circ = 115,19 \angle 75,9^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_n + \underline{Z}_b = 15 + j30 + 33,36 \angle -69,3^\circ = 26,82 \angle -2,6^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_n + \underline{Z}_c = 15 + j30 + 27,75 \angle -78,3^\circ = 20,82 \angle 7,8^\circ \text{ Ом.}$$

4. Комплекс действующего значения напряжения смещения нейтрали  $\underline{U}_{nN}$  (рис. 2.9):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nN} &= \frac{\frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{\frac{220|0^\circ}{115,19|75,9^\circ} + \frac{220|-120^\circ}{26,82|-2,6^\circ} + \frac{220|120^\circ}{20,82|7,8^\circ}}{\frac{1}{115,19|75,9^\circ} + \frac{1}{26,82|-2,6^\circ} + \frac{1}{20,82|7,8^\circ}} = \\ &= \frac{7,33|174,9^\circ}{0,0879|-8,7^\circ} = 83,39|-176,4^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

5. Комплексы действующих значений линейных токов:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_A} = \frac{220|0^\circ - 83,39|-176,4^\circ}{115,19|75,9^\circ} = 2,63|-74,9^\circ \text{ А,} \\ \underline{I}_B &= \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_B} = \frac{220|-120^\circ - 83,39|-176,4^\circ}{26,82|-2,6^\circ} = 6,98|-95,6^\circ \text{ А,} \\ \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_C} = \frac{220|120^\circ - 83,39|-176,4^\circ}{20,82|7,8^\circ} = 9,49|90^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

Проверка решения по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2,63|-74,9^\circ + 6,98|-95,6^\circ + 9,49|90^\circ \approx 0.$$

8. Для определения токов в треугольнике сопротивлений фаз нагрузки предварительно находим напряжения между точками  $a$ ,  $b$  и  $c$  по второму закону Кирхгофа для преобразованной цепи (рис. 2.9):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{I}_A \underline{Z}_a - \underline{I}_B \underline{Z}_b = 2,63|-74,9^\circ \cdot 82,76|80,9^\circ - \\ &- 6,98|-95,6^\circ \cdot 33,36|-69,3^\circ = 449,44|10,7^\circ \text{ В,} \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{I}_B \underline{Z}_b - \underline{I}_C \underline{Z}_c = 6,98|-95,6^\circ \cdot 33,36|-69,3^\circ - \\ &- 9,49|90^\circ \cdot 27,75|-78,3^\circ = 495,98|-166,7^\circ \text{ В,} \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{I}_C \underline{Z}_c - \underline{I}_A \underline{Z}_a = 9,49|90^\circ \cdot 27,75|-78,3^\circ - \\ &- 2,63|-74,9^\circ \cdot 82,76|80,9^\circ = 51,52|36,5^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

7. Комплексы действующих значений фазных токов:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ab} &= \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{449,44|10,7^\circ}{25 + j150} = 2,96|-69,8^\circ \text{ А,} \\ \underline{I}_{bc} &= \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{495,98|-166,7^\circ}{10 - j50} = 9,73|-87,9^\circ \text{ А,} \\ \underline{I}_{ca} &= \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{51,52|36,5^\circ}{40 + j120} = 0,41|-35,1^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

8. Амперметры, установленные в цепи (рис. 2.8), показывают модули действующих значений комплексов линейных и фазных токов:



$$I_{A1} = |\underline{I}_A| = 2,63 \text{ A}, \quad I_{A2} = |\underline{I}_B| = 6,98 \text{ A}, \quad I_{A3} = |\underline{I}_C| = 9,49 \text{ A},$$
$$I_{A4} = |\underline{I}_{ab}| = 2,96 \text{ A}, \quad I_{A5} = |\underline{I}_{bc}| = 9,73 \text{ A}, \quad I_{A6} = |\underline{I}_{ca}| = 0,41 \text{ A}.$$