Тема 6. Расчет резонансных режимов в цепях однофазного синусоидального тока

В цепях, содержащих участки индуктивного и емкостного характера, на определенных частотах возможны резонансные режимы, при которых входные ток и напряжение совпадают по фазе, а входное сопротивление является чисто активным.

Различают два основных вида резонанса: резонанс напряжений (при последовательном соединении элементов) и резонанс токов (при параллельном соединении элементов).

При расчете резонансных режимов следует рекомендовать два алгоритма решения задач. Если заданы параметры цепи, для решения необходимо использовать условие резонанса. Если известны токи и напряжения, при решении необходимо воспользоваться построением векторной диаграммы.

Задача 6.1

Определить значение емкости C, при которой в цепи (рис. 6.1) установится резонансный режим. Найти входное сопротивление цепи и ток в неразветвленной части схемы, соответствующие резонансному режиму. Дано: $U = 198$ В, $r_1 = 15$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $x_L = 12$ Ом, $\omega_0 = 500$ с$^{-1}$.

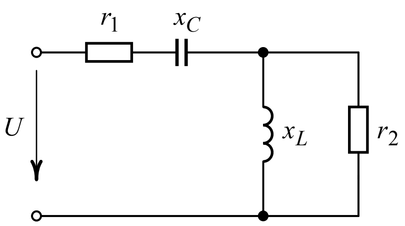

Рис. 6.1

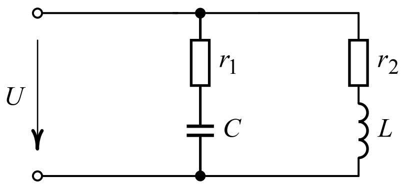

Рис. 6.2

Решение

1. В разветвленной цепи (рис. 6.1) конденсатор и индуктивность находятся на участках, имеющих последовательное соединение. Следовательно, в схеме имеет место резонанс напряжений.

Признаком резонанса считается условие $\mathrm{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = jx_{\text{вх}} = 0$ (условие равенства нулю входного реактивного сопротивления цепи).

2. Входное комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = r_1 - jx_C + \frac{r_2\, jx_L}{r_2 + jx_L} = r_1 - jx_C + \frac{r_2\, jx_L (r_2 - jx_L)}{(r_2 + jx_L)(r_2 - jx_L)} =$$

$$= r_1 - jx_C + j\frac{r_2^2\, x_L}{r_2^2 + x_L^2} + \frac{r_2\, x_L^2}{r_2^2 + x_L^2}.$$

3. Из условия резонанса $\mathrm{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = 0$ получим:

$$\mathrm{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = -jx_C + j\frac{r_2^2\, x_L}{r_2^2 + x_L^2} = 0,$$

откуда находим

$$x_C = \frac{r_2^2\, x_L}{r_2^2 + x_L^2} = \frac{24^2 \cdot 12}{24^2 + 12^2} = 9{,}6 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{x_C \omega_0} = \frac{1}{9{,}6 \cdot 500} = 208{,}3 \text{ мкФ} .$$

4. Входное сопротивление цепи при резонансе является чисто активным и определяется вещественной частью (действительной составляющей) входного комплексного сопротивления цепи:

$$r_{\text{вх}} = \operatorname{Re}\left(\underline{Z}_{\text{вх}}\right) = r_1 + \frac{r_2 x_L^2}{r_2^2 + x_L^2} = 15 + \frac{24 \cdot 12^2}{24^2 + 12^2} = 19{,}8 \text{ Ом} .$$

5. Ток в неразветвленной части (на входе цепи) при резонансе

$$I = \frac{U}{r_{\text{вх}}} = \frac{198}{19{,}8} = 10 \text{ А} .$$

Задача 6.2

Для цепи (рис. 6.2) определить резонансную частоту, если $C = 10$ мкФ, $L = 0{,}01$ Гн, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 30$ Ом.

Решение

1. В разветвленной цепи (рис. 6.2) конденсатор и индуктивность находятся на участках, которые между собой имеют параллельное соединение. Следовательно, в схеме имеет место резонанс токов. Условие резонанса токов $\operatorname{Im}\left(\underline{Y}_{\text{вх}}\right) = jb_{\text{вх}} = 0$.

2. Входная комплексная проводимость цепи:

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{1}{r_1 - j\dfrac{1}{\omega_0 C}} + \frac{1}{r_2 + j\omega_0 L} = \frac{r_1 + j\dfrac{1}{\omega_0 C}}{\left(r_1 - j\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)\left(r_1 + j\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)} +$$

$$+ \frac{r_2 - j\omega_0 L}{\left(r_2 + j\omega_0 L\right)\left(r_2 - j\omega_0 L\right)} = \frac{r_1}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} + j\frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} +$$

$$+ \frac{r_2}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} - j\frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} =$$

$$= \left(\frac{r_1}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} + \frac{r_2}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2}\right) + j\left(\frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2}\right).$$

3. Из условия резонанса тока $\left(jb_{\text{вх}} = 0\right)$ для параллельных участков получим:

$$b_{\text{вх}} = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} - \frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2} = 0,$$

или

$$\frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega_0^2 C^2}} = \frac{\omega_0 L}{r_2^2 + \omega_0^2 L^2},$$

откуда

$$\omega_0^2 \left(L^2 - r_1^2 LC \right) = \frac{L}{C} - r_2^2 .$$

Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\dfrac{L}{C} - r_2^2}{LC\left(\dfrac{L}{C} - r_1^2\right)}} = \sqrt{\frac{\dfrac{0{,}01}{10 \cdot 10^{-6}} - 30^2}{0{,}01 \cdot 10 \cdot 10^{-6}\left(\dfrac{0{,}01}{10 \cdot 10^{-6}} - 20^2\right)}} = 1291 \text{ с}^{-1} .$$

Резонансная частота

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1291}{2\pi} = 205{,}5 \text{ Гц} .$$

Задача 6.3

В цепи (рис. 6.3) имеет место резонанс. Показания амперметров соответствуют токам $I_{A3} = 3\,\text{А}$, $I_{A1} = 4\,\text{А}$. Определить показание амперметра A_2.

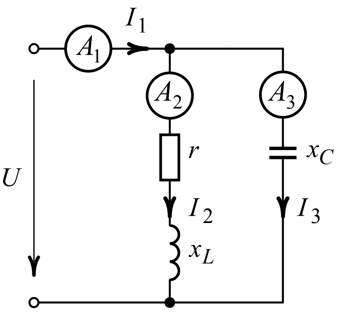

Рис. 6.3

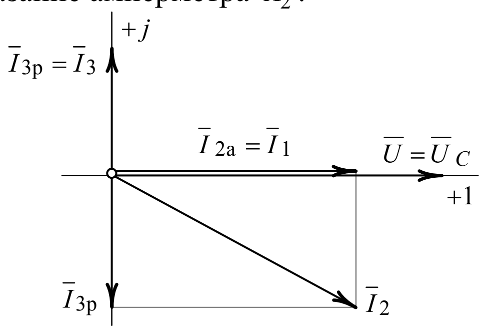

Рис. 6.4

Решение

1. В цепи (рис. 6.3) имеет место резонанс токов. При резонансе токов показание амперметра A_1 определяется только активной составляющей тока. Реактивные составляющие токов в ветвях с емкостью и индуктивностью скомпенсированы, и их сумма равна нулю.

2. Для решения воспользуемся построением векторной диаграммы токов (рис. 6.4), соответствующей резонансному режиму цепи.

По первому закону Кирхгофа $\overline{I}_1 = \overline{I}_2 + \overline{I}_3$. Ток $\overline{I}_3$ по фазе опережает напряжение на емкости $\left(\overline{U}_C = \overline{U}\right)$ на угол 90°. Реактивная составляющая тока $\overline{I}_{2р}$ равна по модулю току $\overline{I}_{3р} = \overline{I}_3$ и отстает от напряжения $\overline{U}$ на угол 90°.

Активная составляющая тока $\overline{I}_{2а} = \overline{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\overline{U}$.

3. Из диаграммы токов (рис. 6.4) следует:

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{I_{2а}^2 + I_{2р}^2} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ А} .$$

Задача 6.4

Для цепи (рис. 6.5) в режиме резонанса известны показания приборов $I_{A3} = 15$ А, $U_V = 120$ В. Определить показания первого и второго амперметров и параметры цепи, если $I_{A1} = I_{A2}$.

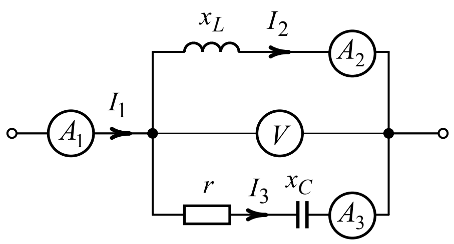

Рис. 6.5

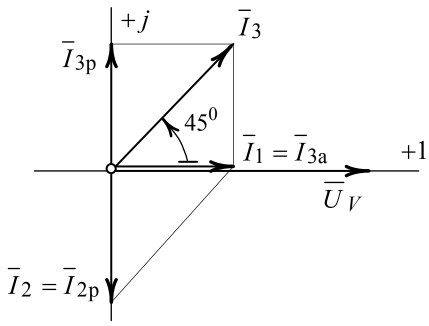

Рис. 6.6

Решение

1. В цепи (рис. 6.5) имеет место резонанс токов. Фаза тока I_1 (показание первого амперметра A_1) совпадает с фазой напряжения U_V (показание вольтметра V) и определяется активной составляющей тока. Реактивные составляющие токов I_2 и I_3 равны по модулю, но противоположны по знаку и в сумме составляют ноль.

2. Векторная диаграмма токов цепи в режиме резонанса приведена на рис. 6.6. Согласно первому закону Кирхгофа $\overline{I}_1 = \overline{I}_2 + \overline{I}_3$. Ток через индуктивность $\overline{I}_2$ по фазе отстает от напряжения $\overline{U}_V$ на угол 90°. Реактивная составляющая тока $\overline{I}_{3р}$ в ветви с емкостью по величине равна току $\overline{I}_2 = \overline{I}_{2р}$ (из условия резонанса).

Активная составляющая тока $\overline{I}_{3а}$ совпадает по фазе с напряжением $\underline{U}_V$ и определяет ток $\underline{I}_1$. Из условия задачи $|I_1| = |I_2|$, следовательно, $|I_1| = |I_{2р}|$, поэтому следует полагать, что угол сдвига по фазе между векторами токов $\overline{I}_3$ и $\overline{I}_1$ составляет 45° (из диаграммы).

3. Из диаграммы токов (рис. 6.6) следует:

$$I_1 = I_{3а} = I_3 \cos 45^{\circ} = 15 \cos 45^{\circ} = 10{,}61 \text{ А},$$

$$I_2 = I_1 = 10{,}6 \text{ А},$$

$$x_L = \frac{U_V}{I_2} = \frac{120}{10{,}61} = 11{,}31 \text{ Ом}.$$

Из равенства токов $I_{3р} = I_{3а}$ следует, что $r = x_C$:

$$r = x_C = Z \cos 45^{\circ} = \frac{U_V}{I_3} \cos 45^{\circ} = \frac{120}{15} \cos 45^{\circ} = 5{,}66 \text{ Ом}.$$

Задача 6.5

Для цепи (рис. 6.7) в режиме резонанса показание ваттметра составляет $P = 600$ Вт. Определить величины сопротивлений r и x_C, если $U = 60$ В, $x_L = 12{,}4$ Ом.

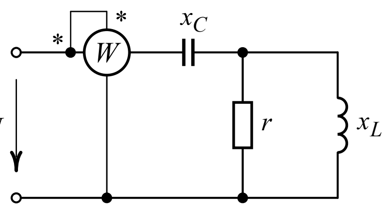

Рис. 6.7

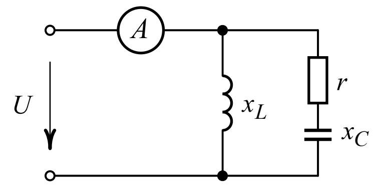

Рис. 6.8

Решение

1. В цепи (рис. 6.7) имеет место резонанс напряжений. Входное сопротивление цепи при резонансе является чисто активным, следовательно,

$$r_{\text{вх}} = \frac{U^2}{P} = \frac{60^2}{600} = 6 \text{ Ом}.$$

2. Выражение входного комплексного сопротивления цепи:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = -jx_C + \frac{jx_L r}{r + jx_L} = -jx_C + \frac{jx_L r(r - jx_L)}{(r + jx_L)(r - jx_L)} =$$

$$= -jx_C + j\frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} + \frac{r x_L^2}{r^2 + x_L^2}.$$

3. При резонансе входное сопротивление определяется вещественной частью (действительной составляющей) входного комплексного сопротивления $r_{\text{вх}} = \mathrm{Re}(\underline{Z}_{\text{вх}})$:

$$r_{\text{вх}} = \mathrm{Re}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = \mathrm{Re}\left(-jx_C + j\frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} + \frac{r x_L^2}{r^2 + x_L^2}\right) = \frac{r x_L^2}{r^2 + x_L^2}.$$

Из полученного условия следует уравнение

$$r^2 - \frac{x_L^2}{r_{\text{вх}}} r + x_L^2 = 0.$$

При $r_{\text{вх}} = 6$ Ом и $x_L = 12{,}4$ Ом уравнение приводится к виду

$$r^2 - 25{,}6 \cdot r + 153{,}8 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно r, найдем его корни:

$$r_{1,2} = \frac{25{,}6 \pm \sqrt{25{,}6^2 - 4 \cdot 153{,}8}}{2} = \frac{25{,}6 \pm 6{,}3}{2},$$

$$r_1 = 16 \text{ Ом}, \quad r_2 = 9{,}7 \text{ Ом}.$$

Полученное решение означает, что резонанс напряжения возможен при двух значениях резистивных сопротивлений.

4. Из второго условия резонанса $\mathrm{Im}(\underline{Z}_{\text{вх}}) = 0$ определим значение x_C:

$$\operatorname{Im}\left(\underline{Z}_{\text{вх}}\right)=\operatorname{Im}\left(-jx_C+j\frac{r^2x_L}{r^2+x_L^2}+\frac{rx_L^2}{r^2+x_L^2}\right)=-jx_C+j\frac{r^2x_L}{r^2+x_L^2}=0,$$

следовательно,

$$-jx_C+j\frac{r^2x_L}{r^2+x_L^2}=0,$$

откуда находим $x_C=\dfrac{r^2x_L}{r^2+x_L^2}$.

Каждому значению сопротивления r цепи будет соответствовать значение резонансного сопротивления x_C.

Для $r_1=16$ Ом: $x_{C1}=\dfrac{r_1^2x_L}{r_1^2+x_L^2}=\dfrac{16^2\cdot 12{,}4}{16^2+12{,}4^2}=7{,}8$ Ом.

Для $r_2=9{,}7$ Ом: $x_{C2}=\dfrac{r_2^2x_L}{r_2^2+x_L^2}=\dfrac{9{,}7^2\cdot 12{,}4}{9{,}7^2+12{,}4^2}=4{,}7$ Ом.

Задача 6.6

В режиме резонанса определить емкостное сопротивление x_C и показание амперметра в схеме (рис. 6.8), если $U=30$ В, $r=2$ Ом, $x_L=5$ Ом.

Решение

1. В схеме (рис. 6.8) имеет место резонанс токов. Входная комплексная проводимость цепи:

$$\underline{Y}_{\text{вх}}=\frac{1}{jx_L}+\frac{1}{r-jx_C}=-j\frac{1}{x_L}+\frac{r+jx_C}{\left(r-jx_C\right)\left(r+jx_C\right)}=$$

$$=-j\frac{1}{x_L}+\frac{r}{r^2+x_C^2}+j\frac{x_C}{r^2+x_C^2}.$$

2. Из условия резонанса токов $\operatorname{Im}\left(\underline{Y}_{\text{вх}}\right)=0$ получим:

$$\frac{1}{x_L}=\frac{x_C}{r^2+x_C^2}.$$

Из выражения следует квадратное уравнение

$$x_C^2-x_Lx_C+r^2=0.$$

После подстановки значений x_L и r квадратное уравнение относительно x_C приводится к виду

$$x_C^2-5x_C+4=0.$$

Из решения квадратного уравнения находим:

$$x_{C1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm 3}{2},$$

$$x_{C1}=4\text{ Ом},\ x_{C2}=1\text{ Ом}.$$

Резонанс токов возможен при двух значениях емкостных сопротивлений x_{C1} и x_{C2}.

3. Показание амперметра определим как действующее значение тока в неразветвленной части схемы.

Ток в неразветвленной части схемы определим по закону Ома через полную входную проводимость $\underline{Y}_{\text{вх}}$, которая является чисто активной:

$$I_A = UY_{\text{вх}} = \frac{U r}{r^2 + x_C^2}.$$

При $x_C = x_{C1} = 4$ Ом, для тока получим:

$$I_A = \frac{30 \cdot 2}{2^2 + 4^2} = 3 \text{ А}.$$

При $x_C = x_{C2} = 1$ Ом, для тока получим:

$$I_A = \frac{30 \cdot 2}{2^2 + 1} = 12 \text{ А}.$$