

Тема 4. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока символическим (комплексным) методом

Рассматриваются приемы расчета цепей синусоидального тока, содержащих один источник напряжения или тока и смешанное соединение сопротивлений. При расчете таких цепей целесообразно использовать символический метод, основанный на использовании комплексных чисел.

Задача 4.1

Определить комплексное сопротивление цепи (рис. 4.1) относительно входных зажимов, если $r_1 = 24 \text{ Ом}$, $r_2 = 32 \text{ Ом}$, $r_3 = 15 \text{ Ом}$, $L_2 = 7,91 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$, $C_1 = 120 \text{ мкФ}$, $C_3 = 50 \text{ мкФ}$, $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$.

Решение

1. Расчет сопротивлений реактивных элементов цепи (рис. 4.1) для $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$:

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{628 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} = 13,27 \text{ Ом},$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{628 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 31,85 \text{ Ом},$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 628 \cdot 7,91 \cdot 10^{-2} = 49,68 \text{ Ом}.$$

2. Для упрощения расчетов преобразуем схему (рис. 4.1) к виду, показанному на рис. 4.2. Комплексные сопротивления участков схемы (рис. 4.2):

$$\underline{Z}_1 = r_1 - jx_{C1} = 24 - j13,27 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_{L2} = 32 + j49,68 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_{C3} = 15 - j31,85 \text{ Ом}.$$

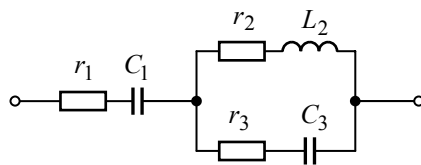


Рис. 4.1

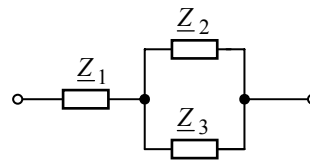


Рис. 4.2

3. Полное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 24 - j13,27 + \frac{(32 + j49,68)(15 - j31,85)}{32 + j49,68 + 15 - j31,85} = \\ &= 24 - j13,27 + \frac{2062,3 - j274}{47 + j17,83} = 24 - j13,27 + \frac{2080,4 \angle -7,6^\circ}{50,27 \angle 20,8^\circ} = \\ &= 24 - j13,7 + 41,38 \angle -28,4^\circ = 24 - j13,27 + 36,43 - j19,64 = \\ &= 60,43 - j32,92 = 68,81 \angle -28,6^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Задача 4.2

Определить действующие и мгновенные значения токов в ветвях схемы (рис. 4.3), если $u = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$ В, $r_1 = 30$ Ом, $r_2 = 40$ Ом, $r_3 = 120$ Ом, $L_1 = 0,34$ Гн, $C_3 = 60$ мкФ, $\omega = 314$ с⁻¹.

Решение

1. Расчет сопротивлений реактивных элементов цепи для частоты $\omega = 314$ с⁻¹:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,34 = 106,8 \text{ Ом},$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 60 \cdot 10^{-6}} = 53,1 \text{ Ом}.$$

2. Комплекс действующего значения напряжения на входе:

$$\underline{U} = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j120^\circ} = 200 \angle -120^\circ \text{ В}.$$

1. Преобразуем сопротивления отдельных последовательных участков цепи (рис. 4.3). Расчет токов выполним для преобразованной эквивалентной комплексной цепи (рис. 4.4).

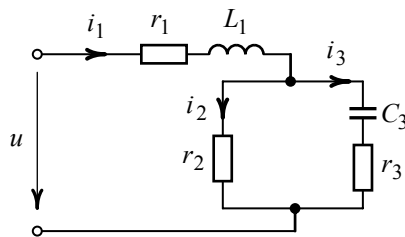


Рис. 4.3

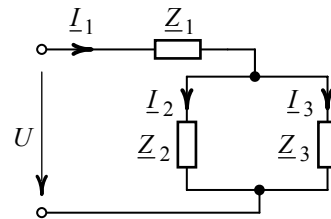


Рис. 4.4

Комплексы полных сопротивлений отдельных последовательных участков цепи:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_{L1} = 30 + j106,8 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 = 40 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_{C3} = 120 - j53,1 \text{ Ом}.$$

4. Полное комплексное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 30 + j106,8 + \frac{40(120 - j53,1)}{40 + 120 - j53,1} = \\ &= 30 + j106,8 + \frac{5248,9 \angle -23,9^\circ}{168,6 \angle -18,4^\circ} = 30 + j106,8 + 31 - j3 = \\ &= 61 + j103,8 = 120,4 \angle 59,6^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

5. Определяем комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{200 \angle -120^\circ}{120,4 \angle 59,6^\circ} = 1,66 \angle -179,6^\circ \text{ A}.$$

6. Токи \underline{I}_2 и \underline{I}_3 в параллельных ветвях могут быть найдены через ток \underline{I}_1 в неразветвленной части:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot \frac{120 - j53,1}{160 - j53,1} = \\ &= 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot 0,78 \angle -5,5^\circ = 1,29 \angle 174,9^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot \frac{40}{160 - j53,1} = \\ &= 1,66 \angle -179,6^\circ \cdot 0,24 \angle 18,4^\circ = 0,4 \angle -161,2^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

7. Действующие значения токов:

$$I_1 = 1,66 \text{ A}, \quad I_2 = 1,29 \text{ A}, \quad I_3 = 0,4 \text{ A}.$$

8. Мгновенные значения токов:

$$i_1 = 1,66\sqrt{2} \sin(\omega t - 179,6^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 1,29\sqrt{2} \sin(\omega t + 174,9^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 0,4\sqrt{2} \sin(\omega t - 161,2^\circ) \text{ A}.$$

Задача 4.3

Определить действующие значения токов в ветвях схемы (рис. 4.5) и мощность, отдаваемую источником. Дано: $e = 120\sqrt{2} \sin \omega t$ В, $r_1 = 26$ Ом, $r_2 = 32$ Ом, $x_{L1} = 18$ Ом, $x_{L2} = 15$ Ом, $x_{C1} = 36$ Ом, $x_{C2} = 12$ Ом.

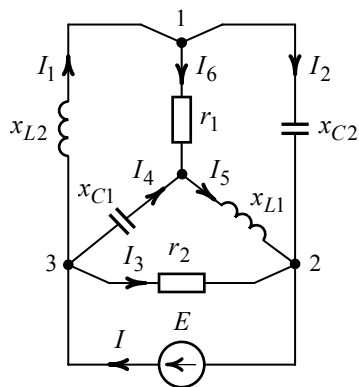


Рис. 4.5

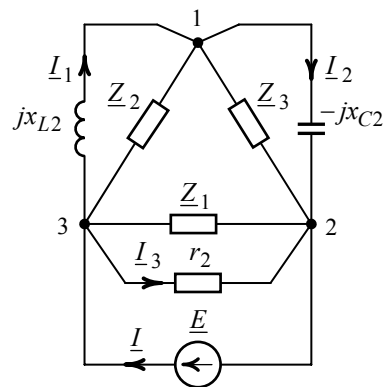


Рис. 4.6

Решение

1. Определим комплекс действующего значения источника ЭДС:

$$\underline{E} = \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 120 \angle 0^\circ \text{ В.}$$

2. Преобразуем звезду сопротивлений r_1 , x_{C1} , x_{L1} , подключенную к точкам 1, 2 и 3 в эквивалентный треугольник (рис. 4.6).

Комплексные сопротивления эквивалентного треугольника:

$$\underline{Z}_1 = jx_{L1} - jx_{C1} + \frac{jx_{L1}(-jx_{C1})}{r_1} = j18 - j36 + \frac{j18(-j36)}{26} = 25 - j18 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_2 = r_1 - jx_{C1} + \frac{r_1(-jx_{C1})}{jx_{L1}} = 26 - j36 + \frac{26(-j36)}{j18} = -26 - j36 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_3 = r_1 + jx_{L1} + \frac{r_1 jx_{L1}}{-jx_{C1}} = 26 + j18 + \frac{26 \cdot j18}{-j36} = 13 + j18 \text{ Ом.}$$

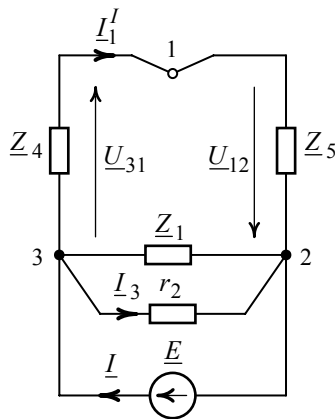


Рис. 4.7

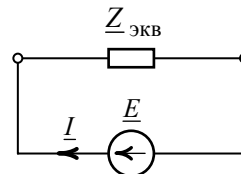


Рис. 4.8

3. Сопротивление x_{L2} соединено параллельно с Z_2 , а сопротивление x_{C2} параллельно Z_3 (рис. 4.6), их общие комплексные сопротивления равны (рис. 4.7):

$$\underline{Z}_4 = \frac{jx_{L2}Z_2}{jx_{L2} + Z_2} = \frac{j15(-26 - j36)}{j15 - 26 - j36} = -5,2 + j19,2 = 19,9 \angle 105,2^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{-jx_{C2}Z_3}{-jx_{C2} + Z_3} = \frac{-j12(13 + j18)}{-j12 + 13 + j18} = 9,1 - j16,2 = 18,5 \angle -60,7^\circ \text{ Ом.}$$

4. Комплекс тока \underline{I}^I (рис. 4.7):

$$\underline{I}^I = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \frac{120 \angle 0^\circ}{3,9 + j3} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,9 \angle 37,6^\circ} = 24,4 \angle -37,6^\circ \text{ А.}$$

Комплексы напряжений \underline{U}_{31} и \underline{U}_{12} :

$$\underline{U}_{31} = \underline{I}^I \underline{Z}_4 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 19,9 \angle 105,2^\circ = 485,6 \angle 67,6^\circ \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}' \underline{Z}_5 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 18,5 \angle -60,7^\circ = 451,4 \angle -98,3^\circ \text{ В.}$$

5. Комплексы действующих токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 найдем через комплексы напряжений \underline{U}_{31} и \underline{U}_{12} (рис. 4.6):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{31}}{jx_{L2}} = \frac{485,6 \angle 67,6^\circ}{j15} = 32,4 \angle -22,4^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{-jx_{C2}} = \frac{451,4 \angle -98,3^\circ}{-j12} = 37,6 \angle -8,3^\circ \text{ А.}$$

6. Комплекс действующего тока \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{r_2} = \frac{120 \angle 0^\circ}{32} = 3,8 \angle 0^\circ \text{ А.}$$

7. Комплекс полного сопротивления $\underline{Z}_{\text{эКВ}}$ всей цепи и комплекс действующего тока \underline{I} (рис. 4.8).

Согласно (рис. 4.7) для $\underline{Z}_{\text{эКВ}}$ запишем:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{эКВ}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} + \frac{1}{r_2},$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{эКВ}} &= \frac{\underline{Z}_1 (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) r_2}{r_2 \underline{Z}_1 + r_2 (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) + \underline{Z}_1 (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)} = \\ &= \frac{(25 - j18)(3,9 + j3)32}{32(25 - j18) + 32(3,9 + j3) + (25 - j18)(3,9 + j3)} = \\ &= \frac{4,9 \cdot 10^3 \angle 1,8^\circ}{1,2 \cdot 10^3 \angle -23,8^\circ} = 4,1 \angle 25,6^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплекс действующего тока:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{эКВ}}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,1 \angle 25,6^\circ} = 29,3 \angle -25,6^\circ \text{ А.}$$

7. Комплексы действующих значений токов звезды сопротивлений (рис. 4.5) определим из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3:

$$\underline{I}_4 = \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 32,4 \angle -22,4^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 7,4 \angle -176,6^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I} - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 16,3 \angle -153,6^\circ \text{ А,}$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 32,4 \angle -22,4^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ = 10 \angle -136,3^\circ \text{ А.}$$

8. Окончательно для действующих значений токов имеем:

$$I = 29,3 \text{ А, } I_1 = 32,4 \text{ А, } I_2 = 37,6 \text{ А, } I_3 = 3,8 \text{ А,}$$

$$I_4 = 7,4 \text{ А, } I_5 = 16,3 \text{ А, } I_6 = 10 \text{ А.}$$

9. Мощность, отдаваемая источником.
Комплекс полной мощности источника:

$$\underline{S} = \underline{E}\bar{I} = 120|0^\circ \cdot 29,3|+25,6^\circ = 3516|25,6^\circ = 3170,8 + j1519,2 \text{ ВА},$$

где $\bar{I} = 29,3|+25,6^\circ \text{ А}$ – сопряженный комплекс тока.

Активная мощность источника:

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = \text{Re}(3170,8 + j1519,2) = 3170,8 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность источника:

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = \text{Im}(3170,8 + j1519,2) = 1519,2 \text{ ВАр}.$$

Задача 4.4

Определить показания приборов электромагнитной системы в схеме (рис. 4.9), если показание амперметра A_5 соответствует току $I_5 = 1,72 \text{ А}$. Сопротивления элементов цепи заданы: $r_1 = 5 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_4 = 20 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 12 \text{ Ом}$, $x_{L3} = 6 \text{ Ом}$, $x_{C4} = 15 \text{ Ом}$.

Решение

1. Обозначим токи в ветвях цепи в соответствии с установленными в схеме приборами (рис. 4.9).

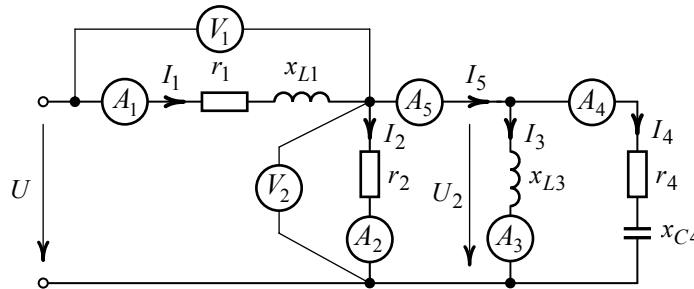


Рис. 4.9

2. Комплексы действующих значений токов \underline{I}_3 , \underline{I}_4 и показания амперметров A_3 и A_4 определим через ток $\underline{I}_5 = 1,72|0^\circ \text{ А}$ в неразветвленной части:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_5 \frac{r_4 - jx_{C4}}{r_4 - jx_{C4} + jx_{L3}} = 1,72|0^\circ \frac{20 - j15}{20 - j15 + j6} = \\ &= 1,72|0^\circ \cdot 1,14|-12,6^\circ = 1,96|-12,6^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

По первому закону Кирхгофа для узла:

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_5 - \underline{I}_3 = 1,72|0^\circ - 1,96|-12,6^\circ = -0,19 + j0,42 = 0,47|114,3^\circ \text{ А}.$$

Показания амперметров A_3 и A_4 будут соответствовать действующим значениям токов: $I_{A3} = I_3 = 1,96 \text{ А}$, $I_{A4} = I_4 = 0,47 \text{ А}$.

3. Комплекс действующего значения тока \underline{I}_2 и показание амперметра A_2 найдем через напряжение параллельных ветвей \underline{U}_2 :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{r_2} = \frac{\underline{I}_3 jx_{L3}}{r_2} = \frac{1,96|-12,6^\circ \cdot j6}{10} = \frac{1,96|-12,6^\circ \cdot 6|90^\circ}{10} =$$

$$= 1,18 \angle 77,4^\circ \text{ А ,}$$

где $\underline{U}_2 = \underline{I}_3 jx_{L3}$.

Показание амперметра A_2 будет соответствовать действующему значению тока I_2 :

$$I_{A2} = I_2 = 1,18 \text{ А .}$$

4. Комплекс действующего значения тока \underline{I}_1 и показание амперметра A_1 найдем на основании первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 1,18 \angle 77,4^\circ + 1,72 \angle 0^\circ = \\ &= 1,98 + j1,15 = 2,29 \angle 30,2^\circ \text{ А .} \end{aligned}$$

Показание амперметра A_1 будет соответствовать действующему значению тока I_1 :

$$I_{A1} = I_1 = 2,29 \text{ А .}$$

5. Показание вольтметра V_1 определим по закону Ома через комплекс напряжения \underline{U}_{V1} :

$$\underline{U}_{V1} = \underline{I}_1 (r_1 + jx_{L1}) = 2,29 \angle 30,2^\circ \cdot (5 + j12) = 29,8 \angle 97,6^\circ \text{ В .}$$

Следовательно, показание вольтметра V_1 будет соответствовать действующему значению напряжения $U_{V1} = 29,8 \text{ В}$ участка цепи.

6. Показание вольтметра V_2 равно действующему значению напряжения параллельных ветвей. По закону Ома

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_3 jx_{L3} = 1,96 \angle -12,6^\circ \cdot j6 = 11,8 \angle 77,4^\circ \text{ В ,}$$

откуда $U_{V2} = U_2 = 11,8 \text{ В}$.

Задача 4.5

Определить действующие значения токов и напряжений всех участков цепи (рис. 4.10), применив метод пропорционального пересчета, если действующее напряжение на входе цепи $U = 230 \text{ В}$.

Дано: $r_2 = 20 \text{ Ом}$, $r_4 = 15 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 25 \text{ Ом}$, $x_{L4} = 40 \text{ Ом}$, $x_{L5} = 30 \text{ Ом}$, $x_{C2} = 20 \text{ Ом}$, $x_{C3} = 60 \text{ Ом}$.

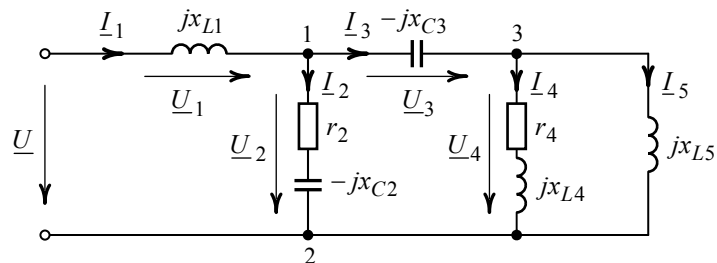


Рис. 4.10

Решение

1. Задаемся комплексным током в удаленной от источника ветви

$$\underline{I}_5^I = 1 \angle 0^\circ \text{ А.}$$

2. Напряжение параллельных ветвей на участке 3, 2:

$$\underline{U}_4^I = \underline{I}_5^I jx_{L5} = 1 \angle 0^\circ \cdot j30 = 30 \angle 90^\circ \text{ В.}$$

3. Комплекс тока \underline{I}_4^I :

$$\underline{I}_4^I = \frac{\underline{U}_4^I}{r_4 + jx_{L4}} = \frac{30 \angle 90^\circ}{15 + j40} = \frac{30 \angle 90^\circ}{42,7 \angle 69,4^\circ} = 0,7 \angle 20,6^\circ \text{ А.}$$

4. Комплекс тока \underline{I}_3^I найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_3^I = \underline{I}_4^I + \underline{I}_5^I = 0,7 \angle 20,6^\circ + 1 \angle 0^\circ = 1,66 + j0,25 = 1,67 \angle 8,46^\circ \text{ А.}$$

5. Напряжение на участке 1, 3:

$$\underline{U}_3^I = \underline{I}_3^I (-jx_{C3}) = 1,67 \angle 8,46^\circ \cdot (-j60) = 100,2 \angle -81,5^\circ \text{ В.}$$

6. Напряжение на участке 1, 2:

$$\underline{U}_2^I = \underline{U}_3^I + \underline{U}_4^I = 100,2 \angle -81,5^\circ + 30 \angle 90^\circ = 14,8 - j69,1 = 70,7 \angle -77,9^\circ \text{ В.}$$

7. Комплекс тока \underline{I}_2^I :

$$\underline{I}_2^I = \frac{\underline{U}_2^I}{r_2 - jx_{C2}} = \frac{70,7 \angle -77,9^\circ}{20 - j20} = \frac{70,7 \angle -77,9^\circ}{28,3 \angle -45^\circ} = 2,5 \angle -32,9^\circ \text{ А.}$$

8. Комплекс тока \underline{I}_1^I на входе цепи:

$$\underline{I}_1^I = \underline{I}_2^I + \underline{I}_3^I = 2,5 \angle -32,9^\circ + 1,67 \angle 8,46^\circ = 3,75 - j1,11 = 3,91 \angle -16,5^\circ \text{ А.}$$

9. Напряжение \underline{U}_1^I :

$$\underline{U}_1^I = \underline{I}_1^I jx_{L1} = 3,91 \angle -16,5^\circ \cdot j25 = 97,8 \angle 73,5^\circ \text{ А.}$$

10. Напряжение на входе цепи:

$$\begin{aligned} \underline{U}^I &= \underline{U}_1^I + \underline{U}_2^I = 97,8 \angle 73,5^\circ + 70,7 \angle -77,9^\circ = \\ &= 42,6 + j24,6 = 49,2 \angle 30^\circ \text{ В.} \end{aligned}$$

11. Для определения действительных значений токов и напряжений участков схемы определим коэффициент пересчета как отношение модулей действующего напряжения на входе цепи, заданного по условию задачи $U = 230 \text{ В}$, к найденному $U^I = 49,2 \text{ В}$:

$$k_{\text{пер}} = \frac{U}{U^I} = \frac{230}{49,2} = 4,67.$$

12. Действительные значения токов и напряжений участков схемы для действующих значений:

$$I_1 = I_1^I k_{\text{пер}} = 3,91 \cdot 4,67 = 18,26 \text{ A} ,$$

$$I_2 = I_2^I k_{\text{пер}} = 2,5 \cdot 4,67 = 11,67 \text{ A} ,$$

$$I_3 = I_3^I k_{\text{пер}} = 1,67 \cdot 4,67 = 7,8 \text{ A} ,$$

$$I_4 = I_4^I k_{\text{пер}} = 0,7 \cdot 4,67 = 3,27 \text{ A} ,$$

$$I_5 = I_5^I k_{\text{пер}} = 1 \cdot 4,67 = 4,67 \text{ A} ,$$

$$U_1 = U_1^I k_{\text{пер}} = 97,8 \cdot 4,67 = 456,7 \text{ В} ,$$

$$U_2 = U_2^I k_{\text{пер}} = 70,7 \cdot 4,67 = 330,2 \text{ В} ,$$

$$U_3 = U_3^I k_{\text{пер}} = 100,2 \cdot 4,67 = 467,9 \text{ В} ,$$

$$U_4 = U_4^I k_{\text{пер}} = 30 \cdot 4,67 = 140,1 \text{ В} .$$