Тема 2. Расчет по амплитудным и действующим значениям синусоидальных токов и напряжений с помощью векторных диаграмм и методом проводимостей

Для упрощения анализа и расчета цепей переменного тока синусоидальные величины изображают векторами. Длины векторов эквивалентны амплитудам синусоидальных функций, а углы поворота векторов – их начальным фазам. Таким образом, вектор учитывает все значения, характеризующие синусоидальную величину, а векторная диаграмма цепи дает наглядное представление об их фазовом расположении. При расчете цепи суммирование изображающих векторов осуществляется намного проще, чем сложение мгновенных значений рассматриваемых синусоидальных величин, связанное к тому же с интегрированием и дифференцированием синусоидальных функций.

Построение векторных диаграмм может осуществляться как для амплитудных, так и для действующих значений величин.

Основное преимущество метода проводимостей состоит в том, что расчет токов в цепи может осуществляться без дополнительных графических построений.

Задача 2.1

Определить действующее и мгновенное значения тока в последовательной цепи, схема которой приведена на рис. 2.1 для двух значений частоты питающего источника $f = 50$ Гц и $f = 100$ Гц, если $u = 127\sqrt{2}\sin\omega t$ В, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 30$ Ом, $L = 0{,}12$ Гн, $C = 130$ мкФ.

Решение

1. Расчет цепи для частоты питающего источника $f = 50$ Гц. Реактивное сопротивление индуктивности

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}12 = 37{,}68 \text{ Ом},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

Реактивное сопротивление емкости

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 130 \cdot 10^{-6}} = 24{,}5 \text{ Ом}.$$

2. Действующее значение входного напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{127\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 127 \text{ В}.$$

3. Качественная (не в масштабе) векторная диаграмма цепи (рис. 2.1) для действующих значений тока и напряжений приведена на рис. 2.2.

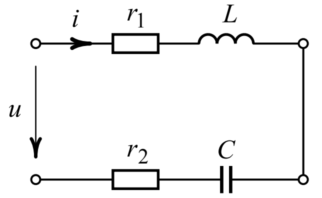

Рис. 2.1

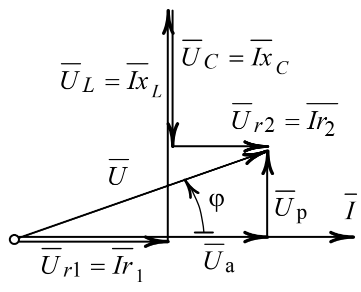

Рис. 2.2

Построение начнем в вектора тока $\overline{I}$, который является общим при последовательном соединении для всех элементов цепи. Вектор напряжения на активном сопротивлении $\overline{U}_{r1}$ совпадет с вектором тока по фазе, вектор напряжения на индуктивности $\overline{U}_L$ опережает по фазе вектор тока на 90°, вектор напряжения на емкости $\overline{U}_C$ отстает по фазе от вектора тока на 90°. Аналогично вектор напряжения на активном сопротивлении $\overline{U}_{r2}$ совпадает с вектором тока по фазе. Вектор входного напряжения $\overline{U}$ складывается из напряжений на отдельных элементах при учете сдвига фаз.

4. Из треугольника напряжений (рис. 2.2) следует значение напряжения, приложенного к цепи:

$$U = \sqrt{U_{\text{а}}^2 + U_{\text{р}}^2} = \sqrt{\left(U_{r1} + U_{r2}\right)^2 + \left(U_L - U_C\right)^2} .$$

Выразив напряжения на элементах через ток и сопротивления, получим:

$$U = \sqrt{\left(I r_1 + I r_2\right)^2 + \left(I x_L - I x_C\right)^2} = I\sqrt{\left(r_1 + r_2\right)^2 + \left(x_L - x_C\right)^2} .$$

5. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(r_1 + r_2\right)^2 + \left(x_L - x_C\right)^2}} = \frac{127}{\sqrt{\left(20 + 30\right)^2 + \left(37{,}68 - 24{,}5\right)^2}} = 2{,}46 \text{ А} .$$

6. Из диаграммы (рис. 2.2) установим угол сдвига фаз между напряжением на входе цепи и током:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{U_{\text{р}}}{U_{\text{а}}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{Ix_L - Ix_C}{Ir_1 + Ir_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_L - x_C}{r_1 + r_2}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{37{,}68 - 24{,}5}{20 + 30}\right) = \operatorname{arctg}(0{,}264) = 14{,}8^{\circ} .$$

7. Мгновенное значение тока в цепи для $f = 50$ Гц, учитывая активно-индуктивный характер цепи ($x_L > x_C$):

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \varphi\right) = 2{,}46\sqrt{2}\sin\left(314t - 14{,}8^{\circ}\right) \text{ А} .$$

8. Расчет цепи при частоте источника $f = 100$ Гц.

Реактивное сопротивление индуктивности

$$x_L = \omega L = 628 \cdot 0{,}12 = 75{,}36 \text{ Ом} ,$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ с}^{-1}$.

Реактивное сопротивление емкости

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{628 \cdot 130 \cdot 10^{-6}} = 12{,}25 \text{ Ом} .$$

9. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(r_1 + r_2\right)^2 + \left(x_L - x_C\right)^2}} = \frac{127}{\sqrt{\left(20 + 30\right)^2 + \left(75{,}36 - 12{,}5\right)^2}} = 1{,}58 \text{ А} .$$

10. Угол сдвига фаз между напряжением на входе цепи и током

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{U_\text{р}}{U_\text{а}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{I x_L - I x_C}{I r_1 + I r_2}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{x_L - x_C}{r_1 + r_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{75{,}36 - 12{,}25}{20 + 30}\right) = \operatorname{arctg}(1{,}262) = 51{,}6^\text{o}\ .$$

11. Мгновенное значение тока в цепи для $f = 100$ Гц, учитывая активно-индуктивный характер цепи ($x_L > x_C$):

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) = 1{,}58\sqrt{2}\sin\left(628t - 51{,}6^\text{o}\right)\ \text{А}\ .$$

Задача 2.2

Определить действующие значения токов цепи (рис. 2.3), активную, реактивную и полную мощность всей цепи. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Дано: $u = 226\sin 314t$, $r_1 = 9$ Ом, $r_2 = 16$ Ом, $L = 0{,}034$ Гн, $C = 260$ мкФ.

Решение

С п о с о б 1. Расчет цепи с помощью построения векторных диаграмм.

1. Реактивные сопротивления элементов цепи:

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}034 = 10{,}68\ \text{Ом},$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 260 \cdot 10^{-6}} = 12{,}25\ \text{Ом}\ .$$

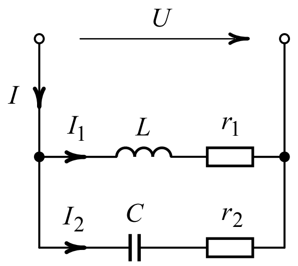

Рис. 2.3

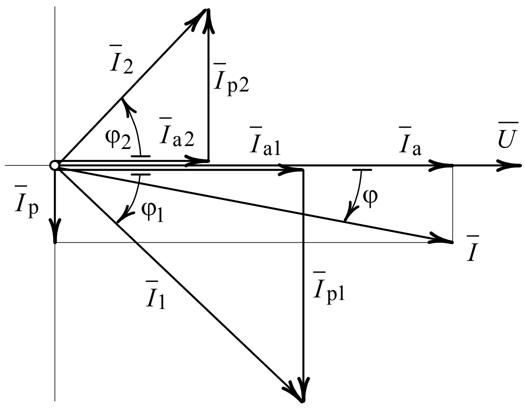

Рис. 2.4

2. Действующее значение напряжения на входе цепи:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{226}{\sqrt{2}} = 159{,}8\ \text{В}\ .$$

3. Расчет цепи (рис. 2.3) сопровождаем построением векторной диаграммы для действующих значений токов и напряжений. Качественно (не в масштабе) построенная векторная диаграмма цепи приведена на рис. 2.4.

За исходный вектор принят вектор напряжения $\overline{U}$, а затем нанесены векторы тока в каждой ветви, причем направления токов $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ относительно вектора напряжения выбраны в соответствии с характером сопротивлений ветвей.

Из векторной диаграммы видно, что все активные составляющие токов ветвей $\overline{I}_{\text{a}1}$, $\overline{I}_{\text{a}2}$ направлены одинаково и параллельно вектору напряжения. Следовательно, активная составляющая общего тока

$$I_{\text{a}} = I_{\text{a}1} + I_{\text{a}2}.$$

Реактивные оставляющие токов ветвей $\overline{I}_{\text{p}1}$, $\overline{I}_{\text{p}2}$ имеют противоположные направления и перпендикулярны вектору напряжения. Следовательно, реактивная составляющая общего тока определяется алгебраической суммой:

$$I_{\text{p}} = I_{\text{p}1} - I_{\text{p}2}.$$

Как видно из диаграммы на рис. 2.4, векторы активной I_{a}, реактивной I_{p} составляющих тока и вектор полного тока I образуют прямоугольный треугольник. Из треугольника следует:

$$I = \sqrt{I_{\text{a}}^2 + I_{\text{p}}^2}.$$

4. Полные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_L^2} = \sqrt{9^2 + 10{,}68^2} = 13{,}97 \text{ Ом},$$

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_C^2} = \sqrt{16^2 + 12{,}25^2} = 20{,}15 \text{ Ом}.$$

5. Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{159{,}8}{13{,}97} = 11{,}44 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{159{,}8}{20{,}15} = 7{,}93 \text{ A}.$$

6. Активные составляющие токов ветвей (рис. 2.4):

$$I_{\text{a}1} = I_1 \cos\varphi_1 = I_1 \frac{r_1}{Z_1} = 11{,}44 \frac{9}{13{,}97} = 7{,}37 \text{ A},$$

$$I_{\text{a}2} = I_2 \cos\varphi_2 = I_2 \frac{r_2}{Z_2} = 7{,}93 \frac{16}{20{,}15} = 6{,}29 \text{ A}.$$

7. Реактивные составляющие токов ветвей (рис. 2.4):

$$I_{\text{p}1} = I_1 \sin\varphi_1 = I_1 \frac{x_L}{Z_1} = 11{,}44 \frac{10{,}68}{13{,}97} = 8{,}75 \text{ A},$$

$$I_{\text{p}2} = I_2 \sin\varphi_2 = I_2 \frac{x_C}{Z_2} = 7{,}93 \frac{12{,}25}{20{,}15} = 4{,}82 \text{ A}.$$

8. Активная и реактивная составляющие общего тока:

$$I_{\text{a}} = I_{\text{a}1} + I_{\text{a}2} = 7{,}37 + 6{,}29 = 13{,}66 \text{ A},$$

$$I_{\text{p}} = I_{\text{p}1} - I_{\text{p}2} = 8{,}75 - 4{,}82 = 3{,}93 \text{ A}.$$

9. Действующее значение полного тока всей цепи:

$$I = \sqrt{I_{\text{a}}^2 + I_{\text{p}}^2} = \sqrt{13{,}66^2 + 3{,}93^2} = 14{,}21 \text{ A}.$$

10. Для определения мощности предварительно вычислим фазный угол сдвига φ между напряжением и током на входе цепи. Из векторной диаграммы (рис. 2.4) найдем:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{I_{\text{р}}}{I_{\text{а}}} = \mathrm{arctg}\left(\frac{3,93}{13,66}\right) = 16,1^{\text{o}} .$$

11. Активная мощность цепи:

$$P = UI\cos\varphi = 159,8\cdot 14,21\cos 16,1^{\text{o}} = 2181,7 \text{ Вт} .$$

11. Реактивная мощность цепи:

$$Q = UI\sin\varphi = 159,8\cdot 14,21\sin 16,1^{\text{o}} = 629,7 \text{ ВАр} .$$

13. Полная мощность цепи:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2181,7^2 + 629,7^2} = 2270,8 \text{ ВА} .$$

С п о с о б 2. Расчет цепи методом проводимостей.

1. Полные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{9^2 + 10,68^2} = 13,97 \text{ Ом} ,$$

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{16^2 + 12,25^2} = 20,15 \text{ Ом} .$$

2. Активная и реактивная проводимости первой ветви:

$$g_1 = \frac{r_1}{Z_1^2} = \frac{9}{13,97^2} = 0,0461 \text{ См} ,$$

$$b_1 = \frac{x_{L1}}{Z_1^2} = \frac{10,68}{13,97^2} = 0,0548 \text{ См} .$$

3. Активная и реактивная проводимости второй ветви:

$$g_2 = \frac{r_2}{Z_2^2} = \frac{16}{20,15^2} = 0,0394 \text{ См} ,$$

$$b_2 = \frac{x_{C2}}{Z_2^2} = \frac{12,25}{20,15^2} = 0,0302 \text{ См} .$$

4. Полные проводимости первой и второй ветвей:

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0,0461^2 + 0,0548^2} = 0,0716 \text{ См} ,$$

$$y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2} = \sqrt{0,0394^2 + 0,0302^2} = 0,0496 \text{ См} .$$

5. Полная проводимость всей цепи:

$$y = \sqrt{\left(g_1 + g_2\right)^2 + \left(b_1 - b_2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(0,0461 + 0,0394\right)^2 + \left(0,0548 - 0,0302\right)^2} = 0,089 \text{ См} .$$

Знак минус перед b_2 указывает на емкостный характер реактивной проводимости второй ветви.

6. Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = Uy_1 = 159{,}8 \cdot 0{,}0716 = 11{,}44 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = Uy_2 = 159{,}8 \cdot 0{,}0496 = 7{,}93 \text{ А},$$

$$I = Uy = 159{,}8 \cdot 0{,}089 = 14{,}22 \text{ А}.$$

7. Активная мощность цепи:

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 = 11{,}44^2 \cdot 9 + 7{,}93^2 \cdot 16 = 2184 \text{ Вт}.$$

8. Реактивная мощность:

$$Q = I_1^2 x_{L1} - I_2^2 x_{C2} = 11{,}44^2 \cdot 10{,}68 - 7{,}93^2 \cdot 12{,}25 = 627{,}4 \text{ ВАр}.$$

9. Полная мощность цепи:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2184^2 + 627{,}4^2} = 2272{,}3 \text{ ВА}.$$

Задача 2.3

Определить действующие значения токов в ветвях схемы (рис. 2.5), если действующее значение напряжения на входе цепи $U = 100$ В. Дано: $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 15$ Ом, $r_3 = 8$ Ом $x_{L1} = 10$ Ом, $x_{L3} = 12$ Ом, $x_{C2} = 30$ Ом.

Решение

Расчет цепи получим методом проводимостей. Заменим параллельные ветви одной эквивалентной (рис. 2.6).

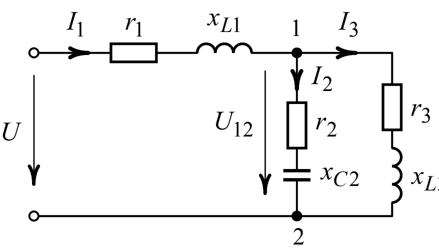

Рис. 2.5

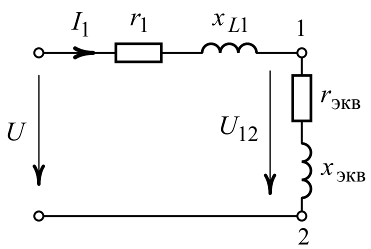

Рис. 2.6

1. Полные сопротивления параллельных ветвей:

$$Z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{15^2 + 30^2} = 33{,}54 \text{ Ом},$$

$$Z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_{L3}^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14{,}42 \text{ Ом}.$$

2. Активная и реактивная проводимость второй ветви (r_2, x_{C2}):

$$g_2 = \frac{r_2}{Z_2^2} = \frac{15}{33{,}54^2} = 0{,}0133 \text{ См},$$

$$b_2 = \frac{x_{C2}}{Z_2^2} = \frac{30}{33{,}54^2} = 0{,}0267 \text{ См}.$$

3. Активная и реактивная проводимость третьей ветви (r_3, x_{L3}):

$$g_3 = \frac{r_3}{Z_3^2} = \frac{8}{14{,}42^2} = 0{,}0385 \text{ См},$$

$$b_3 = \frac{x_{L3}}{Z_3^2} = \frac{12}{14,42^2} = 0,0577\ \text{См}.$$

4. Полная активная проводимость параллельных ветвей:

$$g_{23} = g_2 + g_3 = 0,0133 + 0,0385 = 0,0518\ \text{См}.$$

5. Полная реактивная проводимость параллельных ветвей:

$$b_{23} = b_3 - b_2 = 0,0577 - 0,0267 = 0,031\ \text{См}.$$

Знак минус перед b_2 указывает на емкостный характер реактивной проводимости второй ветви.

6. Полная проводимость параллельных ветвей:

$$y_{23} = \sqrt{g_{23}^2 + b_{23}^2} = \sqrt{0,0518^2 + 0,031^2} = 0,0604\ \text{См}.$$

7. Определяем эквивалентные параметры схемы (рис. 2.6):

эквивалентное активное сопротивление

$$r_{\text{экв}} = \frac{g_{23}}{y_{23}^2} = \frac{0,0518}{0,0604^2} = 14,2\ \text{Ом},$$

эквивалентное реактивное (индуктивное) сопротивление

$$x_{\text{экв}} = \frac{b_{23}}{y_{23}^2} = \frac{0,031}{0,0604^2} = 8,5\ \text{Ом}.$$

8. Ток в неразветвленной части схемы:

$$I_1 = \frac{U}{Z_{\text{вх}}} = \frac{U}{\sqrt{\left(r_1 + r_{\text{экв}}\right)^2 + \left(x_{L1} + x_{\text{экв}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{\left(6 + 14,2\right)^2 + \left(10 + 8,5\right)^2}} = 3,65\ \text{А}.$$

9. Напряжение U_{12} в разветвленной части цепи:

$$U_{12} = I_1 Z_{\text{экв}} = I_1\sqrt{r_{\text{экв}}^2 + x_{\text{экв}}^2} = 3,65\sqrt{14,2^2 + 8,5^2} = 60,4\ \text{В}.$$

10. Токи в параллельных ветвях схемы (рис. 2.5):

$$I_2 = \frac{U_{12}}{Z_2} = \frac{60,4}{33,54} = 1,8\ \text{А},$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{Z_3} = \frac{60,4}{14,42} = 4,19\ \text{А}.$$

Задача 2.4

В цепи (рис. 2.7) показание амперметра A_3 соответствует току $I_3 = 1{,}3$ А . Определить показания остальных приборов, если $r = 25$ Ом , $L = 0{,}065$ Гн , $C = 34$ мкФ . Частота источника питания $f = 50$ Гц .

Решение

1. Расчет реактивных сопротивлений цепи:

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}065 = 20{,}4 \text{ Ом},$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 34 \cdot 10^{-6}} = 93{,}7 \text{ Ом},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

2. Показание вольтметра V равно действующему значению напряжения на входе цепи:

$$U = I_3 Z_3 = I_3 \sqrt{r^2 + x_L^2} = 1{,}3\sqrt{25^2 + 20{,}4^2} = 42 \text{ В}.$$

3. Показание амперметра A_2 определится:

$$I_2 = \frac{U}{x_C} = \frac{42}{93{,}7} = 0{,}45 \text{ А}.$$

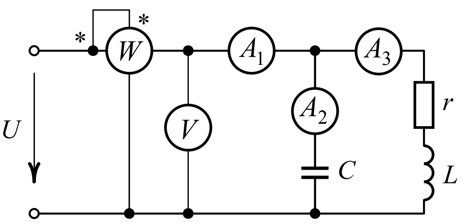

Рис. 2.7

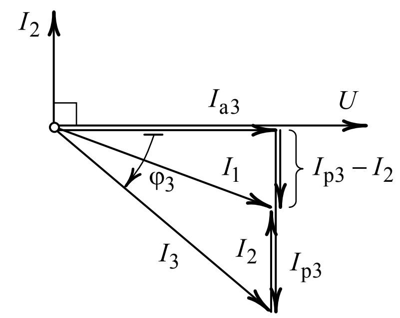

Рис. 2.8

4. Показание амперметра A_1 определим по векторной диаграмме цепи (рис. 2.8), из которой следует:

$$I_1 = \sqrt{I_{\text{а}3}^2 + \left(I_{\text{р}3} - I_2\right)^2} = \sqrt{\left(I_3 \cos\varphi_3\right)^2 + \left(I_3 \sin\varphi_3 - I_2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1{,}3\cos 39{,}2^\circ\right)^2 + \left(1{,}3\sin 39{,}2^\circ - 0{,}45\right)^2} = 1{,}1 \text{ А},$$

где $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{x_L}{r} = \operatorname{arctg}\left(\frac{20{,}4}{25}\right) = 39{,}2^\circ$.

5. Показание ваттметра W будет определяться активной мощностью, выделяемой в резистивном сопротивлении:

$$P = I_3^2 r = 1{,}3^2 \cdot 25 = 42{,}3 \text{ Вт}.$$

Задача 2.5

Для цепи (рис. 2.9) известны показания ваттметра $P = 25$ Вт и амперметра $I = 2{,}5$ А. Определить индуктивность катушки, ее активное сопротивление и действующее значение напряжения на входе цепи, если полное сопротивление катушки $Z_к = 5$ Ом и емкость конденсатора $C = 160$ мкФ. Частота источника $f = 200$ Гц. Построить векторную диаграмму цепи.

Решение

1. Активное сопротивление катушки:

$$r_к = \frac{P}{I^2} = \frac{25}{2{,}5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

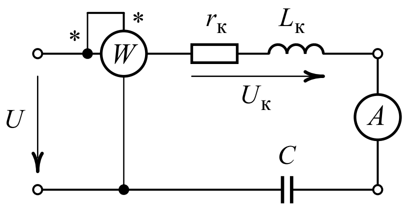

Рис. 2.9

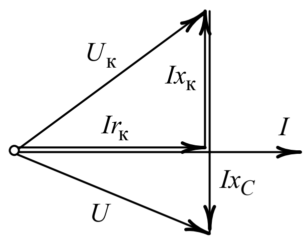

Рис. 2.10

2. Индуктивное сопротивление катушки:

$$x_к = \sqrt{Z_к^2 - r_к^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ Ом}.$$

Индуктивность катушки:

$$L_к = \frac{x_к}{\omega} = \frac{3}{1256{,}6} = 2{,}39 \cdot 10^{-3} \text{ Гн},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 = 1256{,}6 \text{ с}^{-1}$.

3. Полное сопротивление цепи и действующее значение напряжения на входе цепи:

$$Z = \sqrt{r_к^2 + \left(x_к - x_C\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(3 - 4{,}97\right)^2} = 4{,}46 \text{ Ом},$$

где $x_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = 4{,}97$ Ом;

$$U = IZ = 2{,}5 \cdot 4{,}46 = 11{,}15 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма цепи приведена на рис. 2.10.