

Тема 1. Расчет по мгновенным значениям синусоидального тока и напряжения

Для электрических цепей, в которых значения и направления напряжения и тока периодически изменяются во времени по синусоидальному закону и имеют одинаковую частоту, операции сложения, вычитания, дифференцирования и интегрирования можно производить, пользуясь аналитическими формулами преобразования тригонометрических функций.

Задача 1.1

Мгновенные значения тока и напряжения на входе двухполюсника (рис. 1.1) равны:

$$u = 120 \sin(314t + 50^\circ) \text{ В},$$

$$i = 60 \sin(314t - 35^\circ) \text{ А}.$$

Построить кривые изменения напряжения и тока во времени. Определить сдвиг фаз между напряжением и током, период, частоту, амплитудные и действующие значения величин. Определить мгновенные значения на момент времени $t = 0$.

Решение

1. Синусоиды напряжения и тока изображены на рис. 1.2.
2. Угол сдвига между фазами напряжения и тока

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 50^\circ - (-35^\circ) = 85^\circ.$$

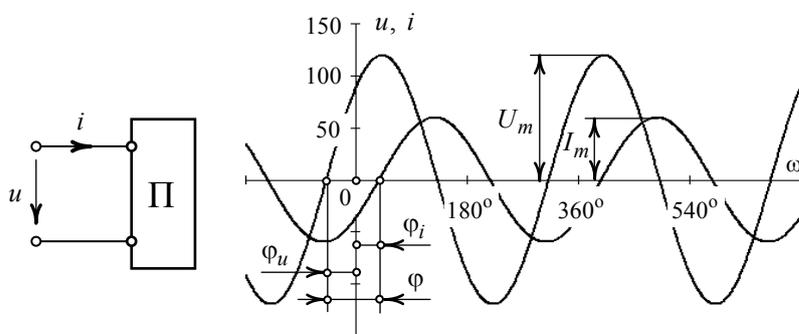


Рис. 1.1

Рис. 1.2

3. Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} = 0,02 \text{ с}.$$

4. Частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ Гц}.$$

5. Амплитудные значения величин:

$$U_m = 120 \text{ В}, \quad I_m = 60 \text{ А}.$$

6. Действующие значения величин:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{120}{\sqrt{2}} = 84,9 \text{ В},$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 42,43 \text{ А}.$$

7. Мгновенные значения напряжения и тока в момент $t = 0$:

$$u = 120 \sin 50^\circ = 91,92 \text{ В},$$

$$i = 60 \sin(-35^\circ) = -34,42 \text{ А}.$$

Задача 1.2

Токи в узле разветвленного участка схемы (рис. 1.3): $i_1 = 20,6 \sin(\omega t + 60^\circ)$ А, $i_2 = 15,3 \sin(\omega t - 45^\circ)$ А. Определить амплитудное значение и начальную фазу тока i_3 , записать выражение его мгновенного значения.

Решение

1. На основании первого закона Кирхгофа для узла схемы (рис. 1.3) мгновенное значение тока i_3

$$i_3 = i_1 + i_2 = 20,6 \sin(\omega t + 60^\circ) + 15,3 \sin(\omega t - 45^\circ) = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_3).$$

Непосредственное суммирование гармонических функций времени связано с тригонометрическими преобразованиями. Выполним операцию сложения заданных токов i_1 и i_2 по правилу сложения векторов (рис. 1.4).

Результирующий вектор, соответствующий амплитуде тока I_{3m} , найдем как диагональ параллелограмма. По теореме косинусов

$$I_{3m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2 I_{1m} I_{2m} \cos(\psi_1 - \psi_2)} =$$

$$= \sqrt{20,6^2 + 15,3^2 + 2 \cdot 20,6 \cdot 15,3 \cos(60^\circ - (-45^\circ))} = 22,3 \text{ А}.$$

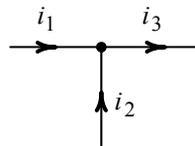


Рис. 1.3

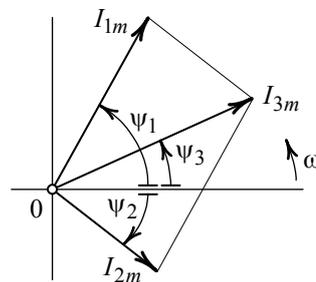


Рис. 1.4

2. Из диаграммы (рис. 1.4) начальная фаза тока

$$\psi_3 = \arctg \left(\frac{I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2}{I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2} \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \left[\frac{20,6 \sin 60^\circ + 15,3 \sin(-45^\circ)}{20,6 \cos 60^\circ + 15,3 \cos(-45^\circ)} \right] = \operatorname{arctg}(0,332) = 18,4^\circ.$$

3. Мгновенное значение тока

$$i_3 = 22,3 \sin(\omega t + 18,4^\circ) \text{ А}.$$

Задача 1.3

По цепи (рис. 1.5) протекает синусоидальный ток с амплитудным значением $I_m = 2,5 \text{ А}$, частотой $f = 50 \text{ Гц}$ и начальной фазой $\psi_i = 15^\circ$. Определить мгновенные значения напряжений на резисторе $u_r(t)$, индуктивности $u_L(t)$ и конденсаторе $u_C(t)$, если $r = 100 \text{ Ом}$, $L = 0,064 \text{ Гн}$, $C = 53 \text{ мкФ}$. Построить кривые изменения напряжений во времени.

Решение

1. Расчет проведем по мгновенным значениям. Мгновенное значение тока в цепи

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 2,5 \sin(314t + 15^\circ) \text{ А},$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$.

2. Напряжение на сопротивлении определим по закону Ома:

$$u_r(t) = ri(t) = 250 \sin(314t + 15^\circ) \text{ В}.$$

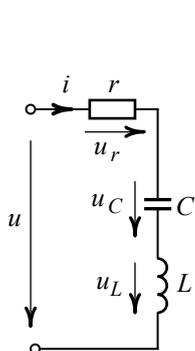


Рис. 1.5

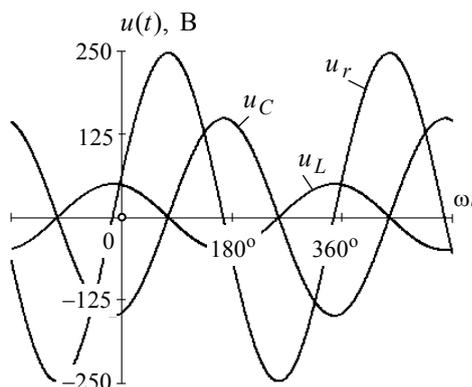


Рис. 1.6

3. Мгновенное значение напряжения на индуктивности:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \psi_i\right) = 314 \cdot 0,064 \cdot 2,5 \sin\left(314t + \frac{\pi}{2} + 15^\circ\right) = \\ &= 50,2 \sin(314t + 105^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

4. Мгновенное значение напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \\
 &= -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) + C_1 = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \psi_i\right) + C_1 = \\
 &= \frac{1}{314 \cdot 53 \cdot 10^{-6}} 2,5 \sin\left(314t - \frac{\pi}{2} + 15^\circ\right) = 150,2 \sin(314t - 75^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования $C_1 = 0$, так как при синусоидальном токе и установившемся процессе напряжение на конденсаторе не имеет постоянной составляющей.

5. Кривые изменения напряжений $u_r(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$ приведены на рис. 1.6.

Задача 1.4

Мгновенное значение напряжения на индуктивности составляет $u_L = 141 \sin(\omega t + 20^\circ)$ В (рис. 1.7). Записать выражение мгновенного значения входного напряжения, если частота источника $f = 100$ Гц, $r = 42$ Ом, $L = 0,05$ Гн.

1. Мгновенное значение тока в цепи (рис. 1.7):

$$\begin{aligned}
 i(t) = i_L(t) &= \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_1) dt = \\
 &= -\frac{1}{\omega L} U_{Lm} \cos(\omega t + \psi_1) + C_1 = \frac{1}{\omega L} U_{Lm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \psi_1\right) + C_1 = \\
 &= \frac{1}{628 \cdot 0,05} 141 \sin\left(628t - \frac{\pi}{2} + 20^\circ\right) = 4,5 \sin(628t - 70^\circ) \text{ А,}
 \end{aligned}$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ с}^{-1}$, $C_1 = 0$, так как при синусоидальном напряжении и установившемся процессе ток через индуктивность не имеет постоянной составляющей.

Обозначим $\psi_2 = -70^\circ$ начальную фазу при токе.

2. Мгновенное значение напряжения на сопротивлении:

$$u_r(t) = r i(t) = 42 \cdot 4,5 \sin(628t - 70^\circ) = 189 \sin(628t - 70^\circ) \text{ В.}$$

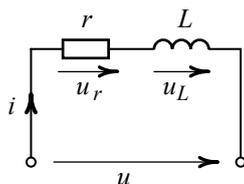


Рис. 1.7

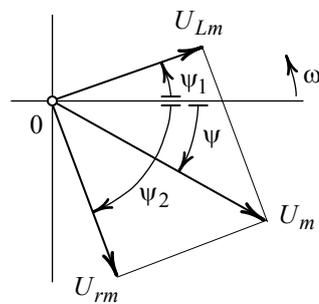


Рис. 1.8

По правилу сложения векторов (рис. 1.8) с использованием тригонометрических преобразований результирующий вектор, соответствующий амплитуде входного напряжения U_m , полагая, что угол между векторами составляет 90° , определим как

$$U_m = \sqrt{U_{rm}^2 + U_{Lm}^2} = \sqrt{189^2 + 141^2} = 235,8 \text{ В.}$$

Из диаграммы (рис. 1.8) получаем начальную фазу входного напряжения

$$\begin{aligned} \psi &= \arctg \left(\frac{U_{Lm} \sin \psi_1 + U_{rm} \sin \psi_2}{U_{Lm} \cos \psi_1 + U_{rm} \cos \psi_2} \right) = \\ &= \arctg \left[\frac{141 \sin 20^\circ + 189 \sin(-70^\circ)}{141 \cos 20^\circ + 189 \cos(-70^\circ)} \right] = \arctg(-0,656) = -33,3^\circ. \end{aligned}$$

Выражение для мгновенного значения входного напряжения

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = 235,8 \sin(628t - 33,3^\circ) \text{ В.}$$