Тема 9. Расчет электростатических цепей

Расчет электростатических цепей с емкостью на постоянном токе в установившемся режиме сводится к определению напряжений и зарядов отдельных конденсаторов. Особенностью работы цепи с идеальной емкостью на постоянном токе является то, что в установившемся режиме токи через конденсатор не протекают.

Задача 9.1

Конденсаторы соединены по схеме (рис. 9.1) и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 120\,\text{В}$. Определить общую емкость цепи относительно зажимов с источником, заряд и напряжение каждого конденсатора, если $C_1 = 1{,}2\,\text{мкФ}$, $C_2 = 4{,}5\,\text{мкФ}$, $C_3 = 2{,}8\,\text{мкФ}$, $C_4 = 3{,}6\,\text{мкФ}$.

Решение

1. Определяя общую емкость, воспользуемся методом свертывания цепи. Конденсаторы C_1 и C_2 включены параллельно (рис. 9.1). Их общая емкость равна

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 = 1{,}2 + 4{,}5 = 5{,}7\,\text{мкФ}.$$

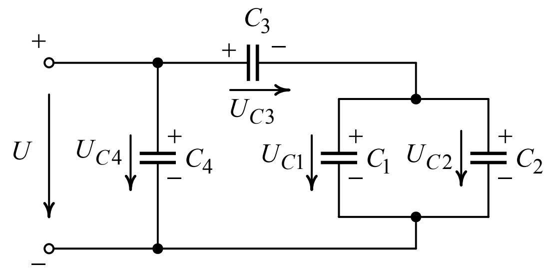

Рис. 9.1

Конденсаторы C_3 и $C_{1,2}$ включены последовательно:

$$C_{1-3} = \frac{C_{1,2}C_3}{C_{1,2} + C_3} = \frac{5{,}7 \cdot 2{,}8}{5{,}7 + 2{,}8} = 1{,}88\,\text{мкФ}.$$

Конденсаторы C_{1-3} и C_4 включены параллельно. Общая емкость цепи равна

$$C_{\text{общ}} = C_{1-3} + C_4 = 1{,}88 + 3{,}6 = 5{,}48\,\text{мкФ}.$$

2. Заряды в параллельных ветвях распределятся пропорционально емкостям отдельных ветвей. Заряд конденсатора C_4:

$$q_4 = C_4 U_{C4} = C_4 U = 3{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 43{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

Заряд группы конденсаторов C_{1-3}:

$$q_{1-3} = C_{1-3} U = 1{,}88 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 22{,}6 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл}.$$

Заряд q_{1-3} создает напряжения:

$$U_{C1} = U_{C2} = \frac{q_{1-3}}{C_{1,2}} = \frac{22{,}6 \cdot 10^{-5}}{5{,}7 \cdot 10^{-6}} = 39{,}65\,\text{В},$$

$$U_{C3} = \frac{q_{1-3}}{C_3} = \frac{22,6 \cdot 10^{-5}}{2,8 \cdot 10^{-6}} = 80,71 \text{ В}.$$

Заряды конденсаторов C_1, C_2 и C_3 распределятся:

$$q_1 = C_1 U_{C1} = 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 39,65 = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл};$$

$$q_2 = C_2 U_{C2} = 4,5 \cdot 10^{-6} \cdot 39,65 = 17,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл};$$

$$q_3 = C_3 U_{C3} = 2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 80,71 = 22,6 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Задача 9.2

Для схемы, изображенной на рис. 9.2, требуется определить заряды и напряжения на конденсаторах, если $E_1 = 12$ В, $E_2 = 48$ В, $C_1 = 12$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $C_3 = 8$ мкФ.

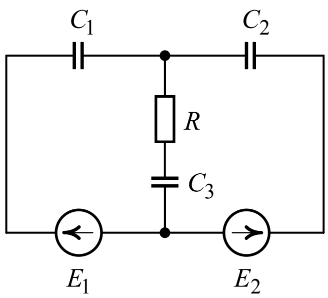

Рис. 9.2

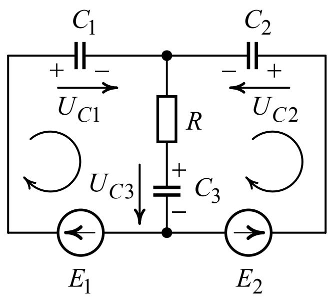

Рис. 9.3

Решение

1. На основании электростатической аналогии получим зависимости, аналогичные законам Кирхгофа путем замены токов I на заряды q и проводимостей g на емкости C.

Цепь (рис. 9.2) содержит три ветви с емкостью ($m_{\text{в}} = 3$), два узла ($n_{\text{у}} = 2$). Зададим произвольно направления напряжений на конденсаторах (рис. 9.3).

2. Определим достаточное количество уравнений для расчета цепи по законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа для зарядов:

$$N_1 = n_{\text{у}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

По второму закону Кирхгофа для напряжений:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) = 3 - (2 - 1) = 2.$$

Положительное направление обхода контуров определим в соответствии с заданными на рис. 9.3.

3. Система уравнений по законам Кирхгофа с учетом, что $U_R = 0$, так как токи по контурам не протекают:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - q_3 = 0, \\ U_{C1} + U_{C3} = E_1, \\ -U_{C3} - U_{C2} = -E_2. \end{cases}$$

Полагая, что $U_C = \dfrac{q}{C}$, представим систему в виде

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - q_3 = 0, \\ \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_3}{C_3} = E_1, \\ -\dfrac{q_3}{C_3} - \dfrac{q_2}{C_2} = -E_2. \end{cases}$$

4. Решение системы получим в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \dfrac{1}{C_1} & 0 & \dfrac{1}{C_3} \\ 0 & -\dfrac{1}{C_2} & -\dfrac{1}{C_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки числовых значений получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \dfrac{1}{12\cdot 10^{-6}} & 0 & \dfrac{1}{8\cdot 10^{-6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{4\cdot 10^{-6}} & -\dfrac{1}{8\cdot 10^{-6}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -48 \end{bmatrix}.$$

6. Решение матричной системы позволяет определить заряды конденсаторов

$$q_1 = -0,24\cdot 10^{-4}\ \text{Кл}, \quad q_2 = 1,36\cdot 10^{-4}\ \text{Кл}, \quad q_3 = 1,12\cdot 10^{-4}\ \text{Кл}.$$

Отрицательный знак заряда q_1 указывает на противоположную указанной на рис. 9.3 полярность заряда C_1.

7. Напряжения на конденсаторах:

$$U_{C1} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{-0,24\cdot 10^{-4}}{12\cdot 10^{-6}} = -2\ \text{В};$$

$$U_{C2} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1,36\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-6}} = 34\ \text{В};$$

$$U_{C3} = \frac{q_3}{C_3} = \frac{-1,12\cdot 10^{-4}}{8\cdot 10^{-6}} = 14\ \text{В}.$$

8. Проверка решения, в соответствии с которой алгебраическая сумма зарядов на обкладках конденсаторов, присоединенных к узлу (рис. 9.3), должна быть равна нулю:

$$q_1 + q_2 - q_3 = -0,24\cdot 10^{-4} + 1,36\cdot 10^{-4} - 1,12\cdot 10^{-4} = 0.$$

Задача 9.3

Определить напряжение каждого конденсатора и энергию электрического поля всей цепи (рис. 9.4). Дано $E_1 = 20$ В, $E_2 = 60$ В, $E_3 = 30$ В, $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $C_3 = 8$ мкФ, $C_4 = 1$ мкФ, $C_5 = 10$ мкФ, $C_6 = 2$ мкФ.

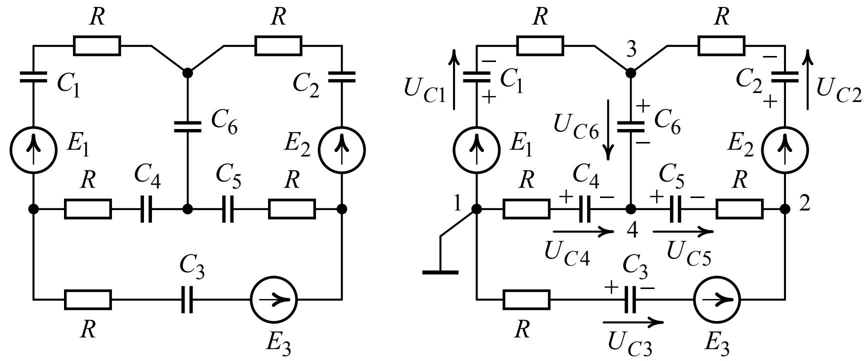

Рис. 9.4 Рис. 9.5

Решение

1. Расчет электрической цепи (рис. 9.4) целесообразно выполнить методом узловых потенциалов.

Цепь (рис. 9.4) содержит шесть ветвей, каждая из которых включает в себя емкостный элемент ($m_в = 6$), четыре узла ($n_у = 4$).

Зададим произвольно положительное направление напряжений на конденсаторах (рис. 9.5).

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу узловых потенциалов равно трем:

$$N_1 = n_у - 1 = 4 - 1 = 3\,.$$

Обозначение узлов в схеме выполним в соответствии с рис. 9.5. Потенциал узла 1 примем равным нулю ($\varphi_1 = 0$).

3. Расчетные уравнения для определения потенциалов φ_2, φ_3 и φ_4 (узлы 2, 3 и 4) на основании формальной аналогии между электрическими и электростатическими цепями будут иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_2\left(C_2 + C_3 + C_5\right) - \varphi_3 C_2 - \varphi_4 C_5 = E_3 C_3 - E_2 C_2, \\ \varphi_3\left(C_1 + C_2 + C_6\right) - \varphi_2 C_2 - \varphi_4 C_6 = E_1 C_1 + E_2 C_2, \\ \varphi_4\left(C_4 + C_5 + C_6\right) - \varphi_2 C_5 - \varphi_3 C_6 = 0. \end{cases}$$

4. Для расчета приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \left(C_2 + C_3 + C_5\right) & -C_2 & -C_5 \\ -C_2 & \left(C_1 + C_2 + C_6\right) & -C_6 \\ -C_5 & -C_6 & \left(C_4 + C_5 + C_6\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 C_3 - E_2 C_2 \\ E_1 C_1 + E_2 C_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки в систему числовых значений и решения матричной системы найдем

$$\varphi_2 = 16{,}78 \text{ В}, \quad \varphi_3 = 48{,}46 \text{ В}, \quad \varphi_4 = 20{,}36 \text{ В}.$$

6. С учетом заданных положительных направлений напряжений на конденсаторах (рис. 9.5) получим:

$$U_{C1}=\varphi_1-\varphi_3+E_1=-48{,}46+20=-28{,}46\text{ В};$$

$$U_{C2}=\varphi_2-\varphi_3+E_2=16{,}78-48{,}46+60=28{,}32\text{ В};$$

$$U_{C3}=\varphi_1-\varphi_2+E_3=-16{,}78+30=13{,}22\text{ В};$$

$$U_{C4}=\varphi_1-\varphi_4=-20{,}36\text{ В};$$

$$U_{C5}=\varphi_4-\varphi_2=20{,}36-16{,}78=3{,}58\text{ В};$$

$$U_{C6}=\varphi_3-\varphi_4=48{,}46-20{,}36=28{,}1\text{ В}.$$

7. Энергия электрического поля всей цепи будет составлять сумму энергий электрического поля каждого конденсатора:

$$W_{\text{эл}}=\frac{C_1U_{C1}^2}{2}+\frac{C_2U_{C2}^2}{2}+\frac{C_3U_{C3}^2}{2}+\frac{C_4U_{C4}^2}{2}+\frac{C_5U_{C5}^2}{2}+\frac{C_6U_{C6}^2}{2}=$$

$$=\frac{3\cdot10^{-6}\left(28{,}46\right)^2}{2}+\frac{5\cdot10^{-6}\left(28{,}32\right)^2}{2}+\frac{8\cdot10^{-6}\left(13{,}22\right)^2}{2}+$$

$$+\frac{1\cdot10^{-6}\left(20{,}36\right)^2}{2}+\frac{10\cdot10^{-6}\left(3{,}58\right)^2}{2}+\frac{2\cdot10^{-6}\left(28{,}1\right)^2}{2}=$$

$$=4{,}98\cdot10^{-3}\text{ Дж}.$$

8. Проверим правильность решения. По второму закону Кирхгофа для внешнего контура цепи (рис. 9.5) запишем:

$$U_{C1}-U_{C2}-U_{C3}=E_1-E_2-E_3.$$

После подстановки числовых значений получим

$$-28{,}46-28{,}32-13{,}22=20-60-30\text{ В},$$

$$-70=-70\text{ В}.$$