Тема 8. Энергетические расчеты в цепях постоянного тока

При выполнении энергетических расчетов в электрических цепях постоянного тока интересуют характеристики, связанные с определением мощности, рассеиваемой в сопротивлениях резисторов, условий потребления максимальной мощности в нагрузке, мощности источников напряжения и тока и режимов их работы, баланса мощностей, КПД передачи энергии.

Задача 8.1

Для цепи (рис. 8.1) требуется определить режим работы каждого источника и установить баланс мощностей, если $E_1 = 24$ В, $E_2 = 142$ В, $E_3 = 12$ В, $I_k = 0{,}4$ А, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом.

Решение

1. Выполним расчет токов в ветвях схемы по методу узловых потенциалов. Схема (рис. 8.1) содержит пять ветвей ($m_в = 5$), из которых четыре с неизвестными токами, три узла ($n_у = 3$) и одна ветвь с нулевым сопротивлением, содержащая источник ЭДС $- E_3$ ($n_н = 1$).

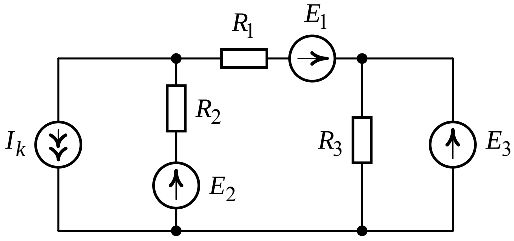

Рис. 8.1

2. Общее число расчетных уравнений равно одному

$$N = n_у - 1 - n_н = 3 - 1 - 1 = 1 .$$

Потенциал узловой точки 1 (рис. 8.2) примем равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Тогда потенциал узловой точки 3 (рис. 8.2) равен E_3 ($\varphi_3 = E_3$).

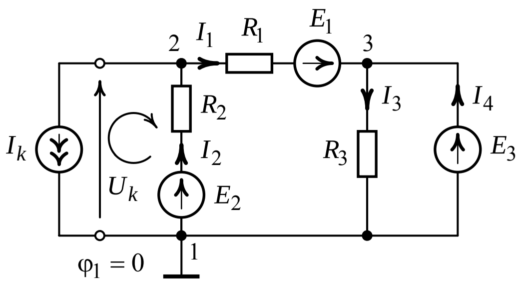

Рис. 8.2

3. Потенциал узловой точки 2 найдем на основании уравнения, составленного для φ_2:

$$\varphi_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \varphi_3\frac{1}{R_1} = \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_1}{R_1} - I_k .$$

4. Решением уравнения относительно неизвестного потенциала, с учетом того, что $\varphi_3 = E_3$, будет

$$\varphi_2 = \frac{\dfrac{E_2}{R_2} - \dfrac{E_1}{R_1} - I_k + \dfrac{E_3}{R_1}}{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)} = \frac{\dfrac{142}{20} - \dfrac{24}{30} - 0,4 + \dfrac{12}{30}}{\left(\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{20}\right)} = 75,6 \text{ В}.$$

5. Зададим положительное направление токов в ветвях схемы , как указано на рис. 8.2. По закону Ома выразим токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_1}{R_1} = \frac{75,6 - 12 + 24}{30} = 2,92 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-75,6 + 142}{20} = 3,32 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа для узла 3 найдем I_4:

$$I_4 = I_3 - I_1 = 1,2 - 2,92 = -1,72 \text{ А}.$$

6. Определяем режимы работы источников энергии. Отрицательный знак для тока I_4 означает, что действительное направление тока противоположно указанному на схеме (рис. 8.2). Из этого следует, что источник E_3 работает в режиме приемника (потребителя) электрической энергии. Его мощность

$$P_{E3} = E_3 I_4 = 12(-1,72) = -20,64 \text{ Вт}.$$

Источники E_1 и E_2 генерируют электрическую энергию в цепь, так как действительное направление тока совпадает с направлением источников:

$$P_{E1} = E_1 I_1 = 24 \cdot 2,92 = 70,08 \text{ Вт};$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = 142 \cdot 3,32 = 471,44 \text{ Вт}.$$

Мощность источника тока

$$P_{I_k} = I_k U_k = I_k\left(I_2 R_2 - E_2\right) = 0,4\left(3,32 \cdot 20 - 142\right) = -30,24 \text{ Вт}.$$

Напряжение U_k на зажимах источника тока также можно было принять равным напряжению узловой точки 2, т.е. $U_k = -\varphi_2$.

Отрицательный знак мощности означает, что источник тока работает в режиме приемника (потребителя) электрической энергии.

7. Уравнение баланса мощностей

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_4 + I_k\left(I_2 R_2 - E_2\right) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3.$$

После подстановки в уравнение числовых значений получим

$$24 \cdot 2,92 + 142 \cdot 3,32 + 12(-1,72) + 0,4(3,32 \cdot 20 - 142) =$$

$$= (2,92)^2 \cdot 30 + (3,32)^2 \cdot 20 + (1,2)^2 \cdot 10 \text{ Вт};$$

$$490,64 \approx 488,24 \text{ Вт}.$$

Результаты расчета показывают, что баланс мощностей выполняется. Ошибка при расчетах составляет.

$$\delta\,\% = \frac{490,64 - 488,24}{490,64} 100\,\% = 0,49\,\%\,.$$

Задача 8.2

Для схемы (рис. 8.3) определить показание ваттметра и убедиться в том, что оно равно сумме мощностей, расходуемых во всех резистивных сопротивлениях, если $U = 25$ В, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $R_4 = 10$ Ом, $R_5 = 30$ Ом.

Решение

1. Выполним расчет всех токов в ветвях схемы. Расчеты целесообразно выполнить по методу узловых потенциалов.

Потенциал узловой точки 1 (рис. 8.3) примем равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Тогда потенциал узловой точки 3 равен U, т.е. напряжению на входе цепи ($\varphi_3 = U$).

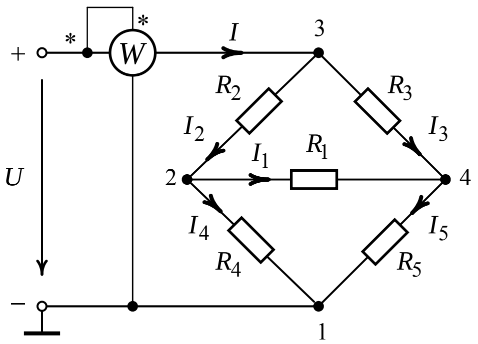

Рис. 8.3

2. Расчетные уравнения для определения потенциалов φ_2 и φ_4 будут иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}\right) - \varphi_3\dfrac{1}{R_2} - \varphi_4\dfrac{1}{R_1} = 0, \\ \varphi_4\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}\right) - \varphi_2\dfrac{1}{R_1} - \varphi_3\dfrac{1}{R_3} = 0. \end{cases}$$

3. После подстановки числовых значений получим

$$\begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10}\right) - \varphi_4\dfrac{1}{40} = \dfrac{25}{5}, \\ \varphi_4\left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{30}\right) - \varphi_2\dfrac{1}{40} = \dfrac{25}{50}, \end{cases}$$

откуда $\varphi_2 = 16,27$ В, $\varphi_4 = 11,58$ В.

4. Находим токи в ветвях схемы:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_1} = \frac{16,27 - 11,58}{40} = 0,117\text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_2} = \frac{25 - 16,27}{5} = 1,746\text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = \frac{25 - 11,58}{50} = 0,268 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} = \frac{16,27}{10} = 1,627 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_5} = \frac{11,58}{30} = 0,386 \text{ А}.$$

Ток на входе цепи $I = I_2 + I_3 = 1,746 + 0,268 = 2,014$ А.

5. Показание ваттметра

$$P = U_W I = 25 \cdot 2,014 = 50,35 \text{ Вт},$$

где $U_W = U$.

6. Суммарная мощность, расходуемая во всех резистивных сопротивлениях:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 =$$

$$= (0,117)^2 \cdot 40 + (1,746)^2 \cdot 5 + (0,286)^2 \cdot 50 + (1,627)^2 \cdot 10 + (0,386)^2 \cdot 30 =$$

$$= 50,32 \text{ Вт}.$$

На основании выполненных расчетов следует тождество

$$50,35 \approx 50,32 \text{ Вт}.$$

Погрешность при выполнении баланса вызвана заданной перед расчетом точностью определения токов в расчетной схеме.

Задача 8.3

Для цепи (рис. 8.4) требуется определить показания ваттметра для различных схем включения измерительных обмоток. Дано: $E_1 = 120$ В, $E_2 = 40$ В, $R_1 = 26$ Ом, $R_2 = 32$ Ом, $R_3 = 42$ Ом, $R_4 = 16$ Ом, $R_5 = 21$ Ом.

Решение

1. Выполним расчет токов в ветвях схемы по методу двух узлов. Потенциал узловой точки 1 примем равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Напряжение между узловыми точками 2 и 1 (рис. 8.4, а)

$$U_{21} = \frac{\dfrac{E_1}{(R_1 + R_2)} + \dfrac{E_2}{(R_4 + R_5)}}{\left(\dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4 + R_5}\right)} = \frac{\dfrac{120}{(26+32)} + \dfrac{40}{(16+21)}}{\left(\dfrac{1}{26+32} + \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{16+21}\right)} = 46,3 \text{ В}.$$

2. Токи в ветвях цепи:

$$I_1 = \frac{-U_{21} + E_1}{(R_1 + R_2)} = \frac{-46,3 + 120}{(26+32)} = 1,27 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{-U_{21} + E_2}{(R_4 + R_5)} = \frac{-46,3 + 40}{(16+21)} = -0,17 \text{ А}.$$

3. Показание ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.4, а). Напряжение, приложенное к измерительной обмотке, $U_W = U_{21}$.

Ваттметр покажет мощность:

$$P = I_1 U_W = I_1 U_{21} = 1{,}27 \cdot 46{,}3 = 58{,}8 \text{ Вт}.$$

4. Показание ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.4, б). Напряжение, приложенное к измерительной обмотке, найдем по второму закону Кирхгофа для указанного на схеме рис. 8.4, б контура:

$$U_W + I_2 R_4 = E_2,$$

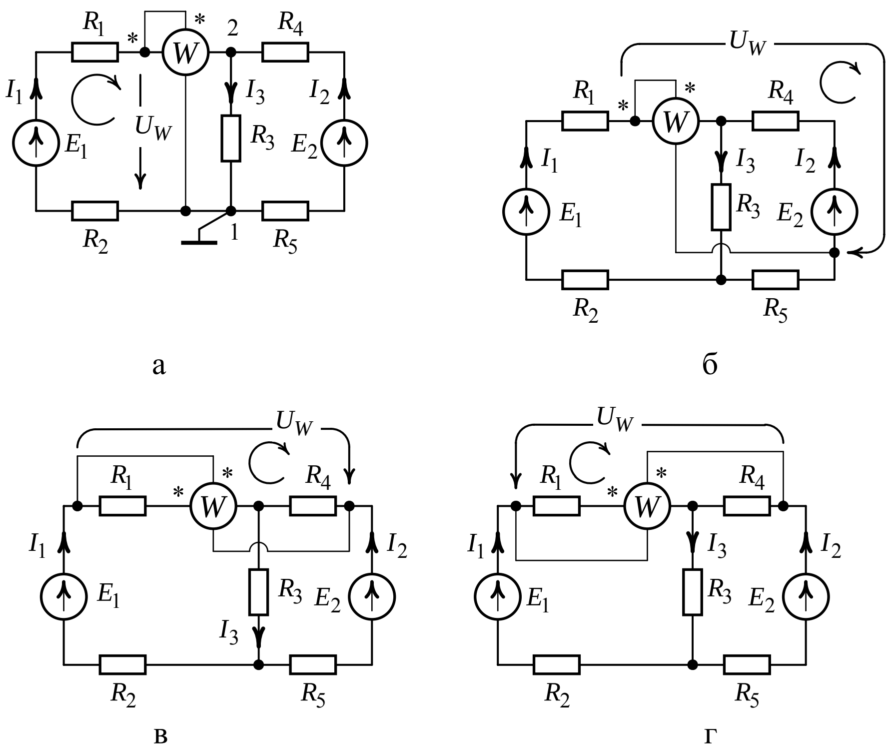

Рис. 8.4

откуда

$$U_W = E_2 - I_2 R_4 = 40 - (-0{,}17)16 = 42{,}7 \text{ В}.$$

Ваттметр покажет мощность:

$$P = I_1 U_W = 1{,}27 \cdot 42{,}7 = 54{,}3 \text{ Вт}.$$

5. Показание ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.4, в). Напряжение, приложенное к измерительной обмотке

$$U_W + I_2 R_4 - I_1 R_1 = 0,$$

откуда

$$U_W = I_1 R_1 - I_2 R_4 = 1{,}27 \cdot 26 - (-0{,}17)16 = 35{,}7 \text{ В}.$$

Ваттметр покажет мощность

$$P = I_1 U_W = 1{,}27 \cdot 35{,}7 = 45{,}3 \text{ Вт}.$$

6. Показание ваттметра, включенного по схеме (рис. 8.4, г). Напряжение, приложенное к измерительной обмотке

$$-U_W + I_2 R_4 - I_1 R_1 = 0,$$

откуда

$$U_W = I_2 R_4 - I_1 R_1 = (-0{,}17)16 - 1{,}27 \cdot 26 = -35{,}7 \text{ В}.$$

Ваттметр покажет мощность

$$P = I_1 U_W = 1{,}27(-35{,}7) = -45{,}3 \text{ Вт}.$$

Задача 8.4

Для цепи (рис. 8.5) определить ток в линейном резисторе $R_н$ при условии потребления в нем максимальной мощности, определить максимально возможную мощность $P_{н\max}$ и построить зависимость $P_н = f(R_н)$. Известно: $E_1 = 25$ В, $E_2 = 240$ В, $I_k = 1$ А, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $R_4 = 100$ Ом, $R_5 = 80$ Ом.

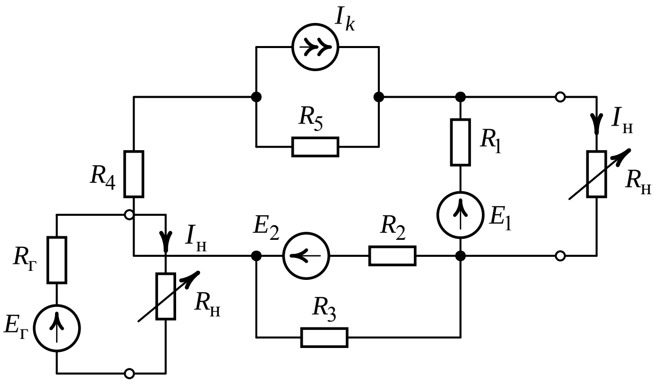

Рис. 8.5

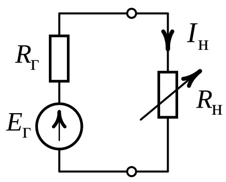

Рис. 8.6

Решение

1. Применим теорему об эквивалентном генераторе к схеме рис. 8.5 и рассчитаем ток $I_н$ в указанной ветви в соответствии с приведенной схемой (рис. 8.6):

$$I_н = \frac{E_г}{R_г + R_н}.$$

1. Найдем ЭДС генератора. Разомкнем ветвь с сопротивлением $R_н$ (рис. 8.7) и определим напряжение между точками 1 и 2 ($U_{12} = E_г$).

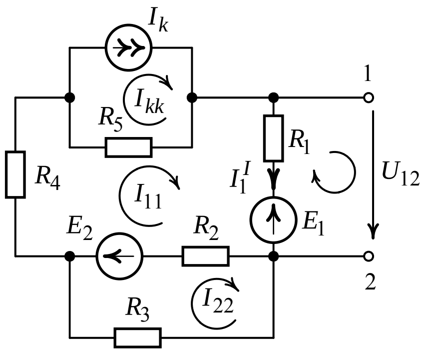

Рис. 8.7

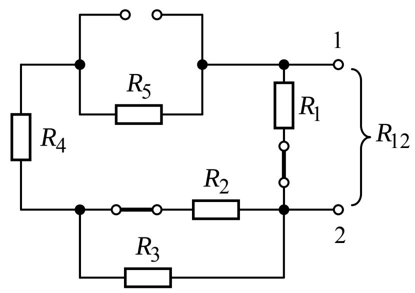

Рис. 8.8

Расчет цепи (рис. 8.7) выполним по методу контурных токов. Достаточное количество уравнений равно двум:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) - n_{\text{т}} = 6 - (4-1) - 1 = 2 .$$

Система контурных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_1 + R_2 + R_4 + R_5\right) - I_{22}R_2 - I_{kk}R_5 = E_2 - E_1, \\ I_{22}\left(R_2 + R_3\right) - I_{11}R_2 = -E_2. \end{cases}$$

Подставим в систему уравнений числовые значения

$$\begin{cases} I_{11} \cdot 410 - I_{22} \cdot 30 = 295, \\ I_{22} \cdot 90 - I_{11} \cdot 30 = -240. \end{cases}$$

Решение системы позволяет получить

$$I_{11} = 0{,}54 \text{ А}, \quad I_{22} = -2{,}49 \text{ А} .$$

Действительное значение интересующего тока $I_1^I = I_{11} = 0{,}54$ А .

На основании второго закона Кирхгофа найдем напряжение U_{12} (рис. 8.7):

$$U_{12} - I_1^I R_1 = E_1 ,$$

откуда $U_{12} = E_1 + I_1^I R_1 = 25 + 0{,}54 \cdot 200 = 133$ В .

3. Найдем сопротивление $R_{\text{г}}$ генератора, равное сопротивлению цепи относительно зажимов 1, 2 разомкнутой ветви с сопротивлением $R_{\text{н}}$ (рис. 8.8).

$$R_{\text{г}} = R_{12} = \frac{\left(\dfrac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} + R_4 + R_5\right) R_1}{\dfrac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} + R_4 + R_5 + R_1} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{30 \cdot 60}{(30+60)} + 100 + 80\right) 200}{\dfrac{30 \cdot 60}{(30+60)} + 100 + 80 + 200} = 100 \text{ Ом} .$$

4. Найдем сопротивление нагрузки $R_н$. Максимальная мощность выделится в случае, если сопротивление нагрузки $R_н = R_г$, т.е. $R_н = R_{12} = 100\ Ом$. Данное утверждение следует из условия выделения максимальной мощности в нагрузке.

5. Найдем ток $I_н$ в нагрузке для случая $P_{н\,max}$:

$$I_н = \frac{E_г}{R_г + R_н} = \frac{U_{12}}{2R_{12}} = \frac{133}{2 \cdot 100} = 0,67\ А .$$

6. Максимально возможная мощность, которая выделится в нагрузке, составит

$$P_{н\,max} = I_н^2 R_н = \frac{U_{12}^2}{4R_{12}} = \frac{(133)^2}{4 \cdot 100} = 44,22\ Вт .$$

7. Построим функциональную зависимость $P_н = f(R_н)$. Мощность, выделяемая в нагрузке при изменении нагрузочного сопротивления, будет определяться выражением

$$P_н(R_н) = \frac{U_{12}^2 R_н}{(R_{12} + R_н)^2} = \frac{133^2 \cdot R_н}{(100 + R_н)^2} .$$

Результирующая зависимость $P_н(R_н)$ при изменении сопротивления нагрузки в установленных пределах $R_н = (0...5)R_г = 0...500\ Ом$ приведена на рис. 8.9.

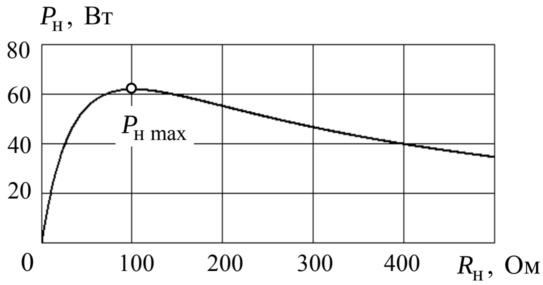

Рис. 8.9

Задача 8.5

К выходным зажимам двухпроводной линии подключена нагрузка сопротивлением $R_н$, получающая питание от источника энергии с ЭДС $E_г = 127\ В$ и внутренним сопротивлением $R_{вн} = 0,4\ Ом$ по схеме рис. 8.10. Определить КПД системы передачи электрической энергии от источника в нагрузку при условии выделения в нагрузочном сопротивлении максимальной мощности, если $R_ш = 250\ Ом$, сопротивление линии передачи $R_л = 1,2\ Ом$.

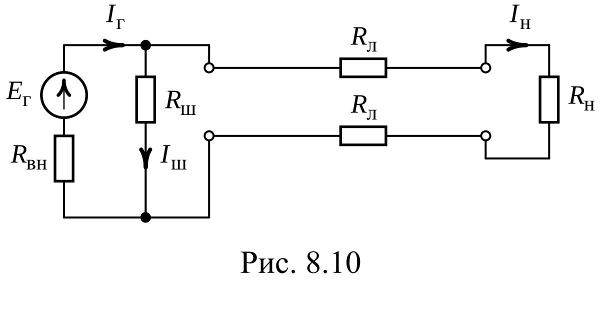

Рис. 8.10

Решение

1. Определим ток $I_н$, проходящий через сопротивление нагрузки $R_н$:

$$I_н = I_г \frac{R_ш}{(R_ш + 2R_л + R_н)} = \left(\frac{E_г}{R_{вн} + \dfrac{R_ш(2R_л + R_н)}{(R_ш + 2R_л + R_н)}} \right) \frac{R_ш}{(R_ш + 2R_л + R_н)} =$$

$$= \frac{E_г R_ш}{R_{вн}(R_ш + 2R_л + R_н) + R_ш(2R_л + R_н)}.$$

2. Рассчитаем выделяемую в сопротивлении нагрузки мощность

$$P_н = I_н^2 R_н = \frac{E_г^2 R_ш^2 R_н}{\left[R_{вн}(R_ш + 2R_л + R_н) + R_ш(2R_л + R_н)\right]^2}.$$

3. Определим $R_н$ при условии выделения в нагрузке максимальной мощности. Для расчета $R_н$ возьмем производную от $P_н$ по $R_н$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP_н}{dR_н} = \frac{E_г^2 R_ш^2 \left[\left[R_н(R_{вн} + R_ш) + R_о\right]^2 - 2R_н^2(R_{вн} + R_ш)^2 + 2R_о R_н(R_{вн} + R_ш)\right]}{\left[R_н(R_{вн} + R_ш) + R_о\right]^4} = 0,$$

где $R_о = 2R_л\,(R_{вн} + R_ш) + R_{вн}R_ш$.

Из условия

$$\left[R_н(R_{вн} + R_ш) + R_о\right]^2 - 2R_н^2(R_{вн} + R_ш)^2 + 2R_о R_н(R_{вн} + R_ш) = 0$$

получим

$$R_н = 2R_л + \frac{R_{вн}R_ш}{R_{вн} + R_ш} = 2 \cdot 1{,}2 + \frac{0{,}4 \cdot 250}{0{,}4 + 250} = 2{,}799 \text{ Ом}.$$

Как известно, в схеме, эквивалентной заданной (рис. 8.10), максимальная мощность выделится, если сопротивление нагрузки $R_н$ будет равно входному сопротивлению цепи относительно зажимов разомкнутой нагрузки и при закороченном источнике ЭДС.

Согласно схеме рис. 8.10 можно определить

$$R_н = 2R_л + \frac{R_{вн}R_ш}{R_{вн} + R_ш} = 2{,}799 \text{ Ом}.$$

Следовательно, получено то же значение $R_н$, но более простым способом исходя из условия выделения максимальной мощности в нагрузке.

4. Подставляя найденное значение $R_н$ в выражение для мощности, получим значение максимальной мощности, которая выделится в нагрузке:

$$P_н = \frac{E_г^2 R_ш^2 R_н}{\left[R_{вн}(R_ш + 2R_л + R_н) + R_ш(2R_л + R_н)\right]^2} =$$

$$= \frac{127^2 \cdot 250^2 \cdot 2{,}799}{\left[0{,}4(250 + 2 \cdot 1{,}2 + 2{,}799) + 250(2 \cdot 1{,}2 + 2{,}799)\right]^2} = 1435{,}8 \text{ Вт}.$$

5. Вычислим мощность, доставляемую источником ЭДС в схему:

$$P_{\text{г}} = E_{\text{г}} I_{\text{г}} = \frac{E_{\text{г}}^2}{R_{\text{вн}} + \dfrac{R_{\text{ш}}(2R_{\text{л}} + R_{\text{н}})}{(R_{\text{ш}} + 2R_{\text{л}} + R_{\text{н}})}} = \frac{127^2}{0{,}4 + \dfrac{250\cdot(2\cdot 1{,}2 + 2{,}799)}{(250 + 2\cdot 1{,}2 + 2{,}799)}} =$$

$$= 2936{,}2 \text{ Вт}.$$

6. КПД системы передачи электрической энергии

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{г}}} 100\,\% = \frac{1435{,}8}{2936{,}2} 100\,\% = 48{,}9\,\%.$$