

Тема 7. Применение эквивалентных преобразований при расчетах электрических цепей

Расчет сложных электрических цепей можно упростить путем различных эквивалентных преобразований активных участков схем, содержащих ветви с идеальными источниками ЭДС и тока. В частях схемы, не затронутых преобразованиями, должно выполняться условие неизменности напряжений и токов ветвей. Упрощение расчета сводится, как правило, к уменьшению числа ветвей или узлов схемы и, в конечном счете, к сокращению расчетных уравнений.

Задача 7.1

Для цепи (рис. 7.1) требуется определить показание вольтметра, если $E = 60 \text{ В}$, $I_{k1} = 0,5 \text{ А}$, $I_{k2} = 0,1 \text{ А}$, $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$. Внутреннее сопротивление вольтметра принять $r_V = \infty$.

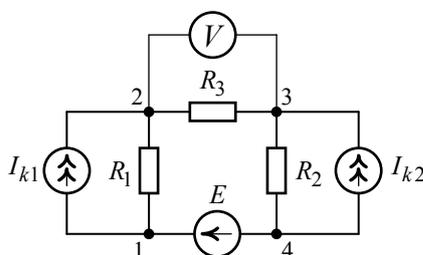


Рис. 7.1

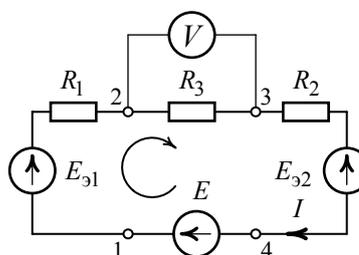


Рис. 7.2

Решение

1. Преобразуем источники тока I_{k1} и I_{k2} (рис. 7.1) в эквивалентные источники ЭДС $E_{э1}$, $E_{э2}$ (рис. 7.2).
2. Значения ЭДС эквивалентных источников:

$$E_{э1} = R_1 I_{k1} = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ В}; \quad E_{э2} = R_2 I_{k2} = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ В}.$$

3. Ток, протекающий в контуре (рис. 7.2), найдем на основании второго закона Кирхгофа:

$$I(R_1 + R_3 + R_2) = E_{э1} - E_{э2} + E,$$

откуда

$$I = \frac{E_{э1} - E_{э2} + E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{100 - 10 + 60}{200 + 100 + 300} = 0,25 \text{ А}.$$

4. Показание вольтметра V , установленного в схеме, будет соответствовать напряжению U_{R3} на сопротивлении R_3 :

$$V \rightarrow U_{R3} = IR_3 = 0,25 \cdot 300 = 75 \text{ В}.$$

Задача 7.2

Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях с сопротивлениями R_3 и R_5 схемы (рис. 7.3), если $E = 30 \text{ В}$, $I_k = 1,2 \text{ А}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $R_3 = 50 \text{ Ом}$, $R_4 = 110 \text{ Ом}$, $R_5 = 40 \text{ Ом}$.

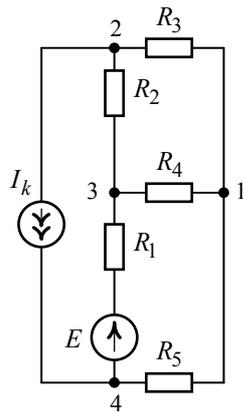


Рис. 7.3

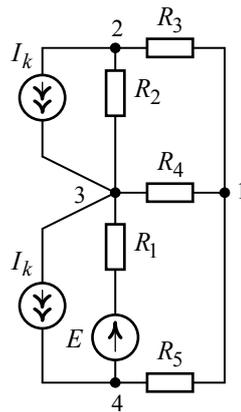


Рис. 7.4

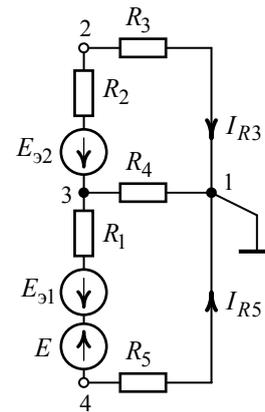


Рис. 7.5

Решение

1. Чтобы уменьшить число узлов расчетной схемы и упростить расчет, преобразуем источник тока I_k в эквивалентные источники ЭДС.

Включая в узле 3 два равных и противоположно направленных источника тока I_k , получим эквивалентную схему (рис. 7.4).

После преобразования источников тока в эквивалентные источники ЭДС получим эквивалентную схему (рис. 7.3) схему, представленную на рис. 7.5.

2. Значения ЭДС эквивалентных источников:

$$E_{\vartheta 1} = R_1 I_k = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ В}; \quad E_{\vartheta 2} = R_2 I_k = 60 \cdot 1,2 = 72 \text{ В}.$$

3. Расчет токов преобразованной схемы (рис. 7.5) выполним методом двух узлов. Потенциал узловой точки 1 принимаем равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Напряжение между узлами 3 и 1 найдем по выражению

$$U_{31} = \frac{\frac{E_{\vartheta 2}}{(R_2 + R_3)} + \frac{E - E_{\vartheta 1}}{(R_1 + R_5)}}{\frac{1}{(R_2 + R_3)} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{(R_1 + R_5)}} = \frac{\frac{72}{(60 + 50)} + \frac{30 - 24}{(20 + 60)}}{\frac{1}{(60 + 50)} + \frac{1}{110} + \frac{1}{(20 + 40)}} = 20,9 \text{ В}.$$

4. Интересующие в схеме токи:

$$I_{R3} = \frac{U_{31} - E_{\vartheta 2}}{(R_2 + R_3)} = \frac{20,9 - 72}{(60 + 50)} = -0,46 \text{ А},$$

$$I_{R5} = \frac{U_{31} - E + E_{\vartheta 2}}{(R_1 + R_5)} = \frac{20,9 - 30 + 24}{(20 + 40)} = 0,25 \text{ А}.$$

Задача 7.3

Определить показание амперметра для схемы рис. 7.6, если $E_1 = 36 \text{ В}$, $E_2 = 56 \text{ В}$, $E_3 = 12 \text{ В}$, $E_4 = 24 \text{ В}$, $I_k = 0,8 \text{ А}$, $R_1 = 24 \text{ Ом}$, $R_2 = 16 \text{ Ом}$, $R_3 = 42 \text{ Ом}$, $R_4 = 12 \text{ Ом}$, $R_5 = 28 \text{ Ом}$.

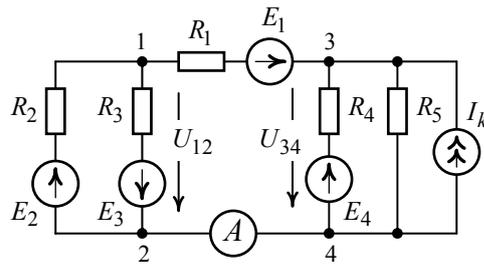


Рис. 7.6

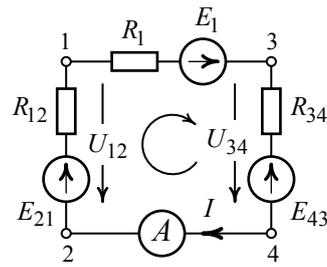


Рис. 7.7

Решение

1. Для упрощения расчета воспользуемся преобразованиями активных участков схем с параллельными ветвями одной эквивалентной.

2. Эквивалентная ЭДС E_{21} и эквивалентное сопротивление R_{21} двух параллельных ветвей левой части схемы (рис. 7.6):

$$E_{21} = U_{12} = \frac{-\frac{E_3}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = \frac{-\frac{12}{42} + \frac{56}{16}}{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{42}\right)} = 37,2 \text{ В},$$

$$R_{12} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{42}\right)} = 11,6 \text{ Ом}.$$

3. Эквивалентная ЭДС E_{43} и эквивалентное сопротивление R_{34} трех параллельных ветвей правой части схемы (рис. 7.6):

$$E_{43} = U_{34} = \frac{\frac{E_4}{R_4} + I_k}{\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)} = \frac{\frac{24}{12} + 0,8}{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{28}\right)} = 23,5 \text{ В},$$

$$R_{34} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{28}\right)} = 8,4 \text{ Ом}.$$

4. В результате выполненных преобразований получаем эквивалентную схему, приведенную на рис. 7.7. Показание амперметра определим, составив выражение по второму закону Кирхгофа для обозначенного в схеме (рис. 7.7) контура:

$$I(R_{12} + R_1 + R_{34}) = E_{21} + E_1 - E_{43},$$

откуда определим показания амперметра:

$$A \rightarrow I = \frac{E_{21} + E_1 - E_{43}}{(R_{12} + R_1 + R_{34})} = \frac{37,2 + 36 - 23,5}{(11,6 + 24 + 8,4)} = 1,13 \text{ А}.$$

Задача 7.4

Для схемы рис. 7.8, используя метод узловых потенциалов, определить все токи. Дано $E_1 = 9 \text{ В}$, $E_2 = 5 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_4 = 25 \text{ Ом}$.

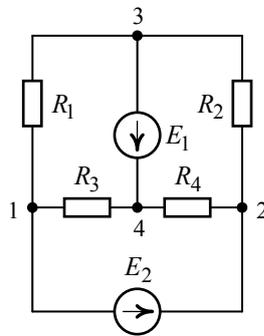


Рис. 7.8

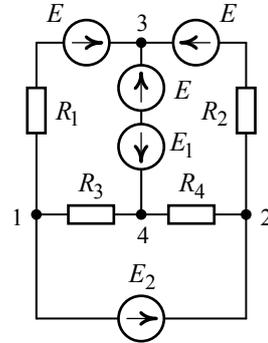


Рис. 7.9

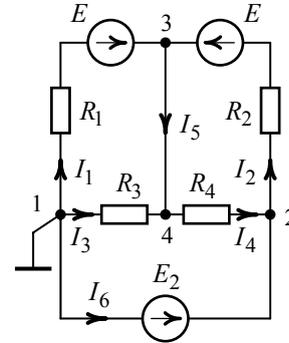


Рис. 7.10

Решение

1. Применение метода узловых потенциалов к расчетной схеме рис. 7.8 затруднительно, так как две ветви с источниками ЭДС имеют бесконечно большую проводимость. Указанное затруднение можно легко обойти, если вынести одну из ЭДС за узел и преобразовать цепь.

2. Вынесем ЭДС E_1 за узел 3. Для этого в ветвь с источником ЭДС E_1 внесем ЭДС E , равную по значению и противоположную по направлению E_1 , а в оставшиеся ветви, примыкающие к узлу 3, внесем дополнительные ЭДС $E = E_1$, направленные к этому узлу (рис. 7.9).

Это не окажет влияния на распределение токов в схеме, так как внесенные ЭДС взаимно компенсируются.

В ветви с источниками ЭДС, включенной между узлами 3 и 4, действуют одинаковые по значению и противоположно направленные ЭДС, их сумма равна нулю. Поэтому узлы 3 и 4 имеют одинаковый потенциал и их можно закоротить и объединить (рис. 7.10).

3. Примем потенциал узла 1 (рис. 7.10) равным нулю ($\varphi_1 = 0$), тогда потенциал узла 2 равен E_2 ($\varphi_2 = E_2$) и, следовательно, по методу узловых потенциалов достаточно составить только одно уравнение для потенциала ранее объединенного узла 3:

$$\varphi_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2}.$$

4. Решение уравнения позволяет определить неизвестный потенциал узла 3:

$$\varphi_3 = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)} = \frac{\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + 5 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25} \right)}{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} \right)} = 6,2 \text{ В}.$$

Следовательно: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 5 \text{ В}$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 6,2 \text{ В}$.

5. В соответствии с заданными направлениями токов в ветвях схемы (рис. 7.10), получим:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E}{R_1} = \frac{0 - 6,2 + 9}{10} = 0,28 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E}{R_2} = \frac{5 - 6,2 + 9}{100} = 0,078 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_3} = \frac{0 - 6,2}{20} = -0,31 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{R_4} = \frac{6,2 - 5}{25} = 0,048 \text{ A}.$$

Токи I_5 и I_6 в ветвях схемы с источниками ЭДС найдем, составив уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 3 и 2:

$$I_5 = I_1 + I_2 = 0,28 + 0,078 = 0,36 \text{ A},$$

$$I_6 = I_2 - I_4 = 0,078 - 0,048 = 0,03 \text{ A}.$$