Тема 5. Метод узловых потенциалов (узловых напряжений)

Метод узловых потенциалов – это метод расчета электрических цепей, в котором за неизвестные принимаются потенциалы (напряжения) узлов схемы. Использование метода позволяет сократить количество составляемых уравнений по отношению к расчету при непосредственном применении законов Кирхгофа.

Задача 5.1

Определить токи в ветвях цепи (рис. 5.1) методом узловых потенциалов, если $E_1 = 25$ В, $E_2 = 10$ В, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, $R_5 = 7$ Ом, $R_6 = 5$ Ом, $R_7 = 2$ Ом.

Решение

1. Схема (рис. 5.1) содержит пять ветвей ($m_в = 5$), три узла ($n_у = 3$).

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу узловых потенциалов определяется числом уравнений по первому закону Кирхгофа и равно двум:

$$N_1 = n_у - 1 = 3 - 1 = 2\,.$$

Примем потенциал одного из узлов, например узла 1 (рис. 5.2), равным нулю ($\varphi_1 = 0$).

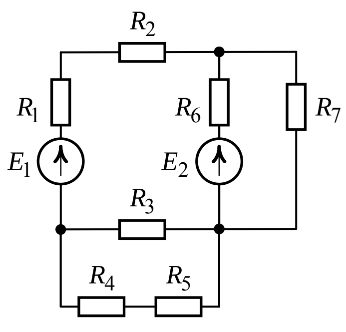

Рис. 5.1

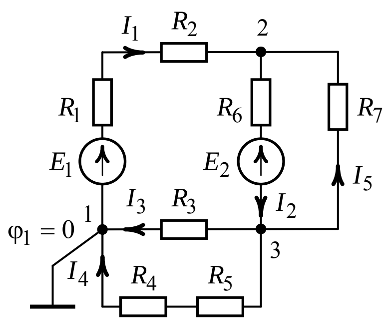

Рис. 5.2

3. Расчетные уравнения для определения потенциалов φ_2 и φ_3 (узел 2, 3) будут иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{1}{(R_1+R_2)}+\dfrac{1}{R_6}+\dfrac{1}{R_7}\right)-\varphi_3\left(\dfrac{1}{R_6}+\dfrac{1}{R_7}\right)=E_1\dfrac{1}{(R_1+R_2)}+E_2\dfrac{1}{R_6}, \\ \varphi_3\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{(R_4+R_5)}+\dfrac{1}{R_7}+\dfrac{1}{R_7}\right)-\varphi_2\left(\dfrac{1}{R_6}+\dfrac{1}{R_7}\right)=-E_2\dfrac{1}{R_6}. \end{cases}$$

4. После подстановки в систему числовых значений имеем

$$\begin{cases} \varphi_2 \cdot 0{,}8 - \varphi_3 \cdot 0{,}7 = 4{,}5, \\ \varphi_3 \cdot 0{,}9 - \varphi_2 \cdot 0{,}7 = -2. \end{cases}$$

5. Решая систему относительно неизвестных потенциалов φ_2 и φ_3, находим

$$\varphi_2 = 11{,}52 \text{ В}, \quad \varphi_3 = 6{,}74 \text{ В}.$$

6. Зададим произвольное направление токов в ветвях схемы (рис. 5.2). По закону Ома для участка цепи, считая, что ток направлен от узла с большим потенциалом к узлу с меньшим потенциалом, выражаем токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1 + R_2} = \frac{-11,52 + 25}{10} = 1,35\ \text{А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_2}{R_6} = \frac{11,52 - 6,74 - 10}{5} = -1,04\ \text{А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = \frac{6,74}{10} = 0,67\ \text{А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4 + R_5} = \frac{6,74}{10} = 0,67\ \text{А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_7} = \frac{6,74 - 11,52}{2} = -2,39\ \text{А}.$$

7. Проверка решения. Проверку решения выполним, составив уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура:

$$I_1\left(R_1 + R_2\right) - I_5 R_7 + I_4\left(R_4 + R_5\right) = E_1.$$

Подставляя числовые значения в уравнение, получим

$$1,35\left(6+4\right) - (-2,39)2 + 0,67\left(3+7\right) = 25\ \text{В},$$

$$24,98 \approx 25\ \text{В}.$$

Задача 5.2

Для схемы, представленной на рис. 5.3, пользуясь методом узловых потенциалов, определить все токи. Дано: $E_1 = 30$ В, $E_2 = 160$ В, $I_{k1} = 1,25$ А, $I_{k2} = 0,75$ А, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 100$ Ом, $R_5 = 60$ Ом, $R_6 = 120$ Ом, $R_7 = 40$ Ом, $R_8 = 30$ Ом.

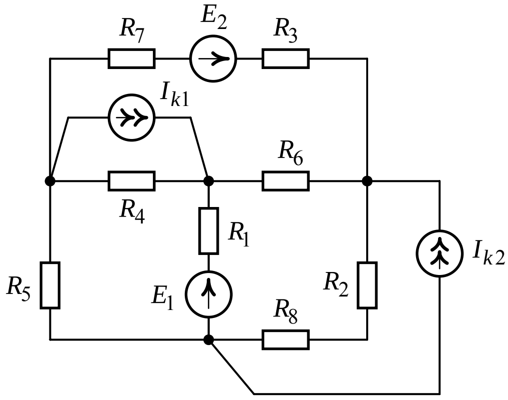

Рис. 5.3

Решение

1. Схема (рис. 5.3) содержит восемь ветвей ($m_\text{в} = 8$), из которых шесть ветвей с неизвестными токами, четыре узла ($n_\text{у} = 4$), две ветви с источниками тока ($n_\text{т} = 2$).

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи равно трем

$$N_1 = n_{\text{у}} - 1 = 4 - 1 = 3\,.$$

Потенциал узла 1 (рис. 5.4) примем равным нулю ($\varphi_1 = 0$).

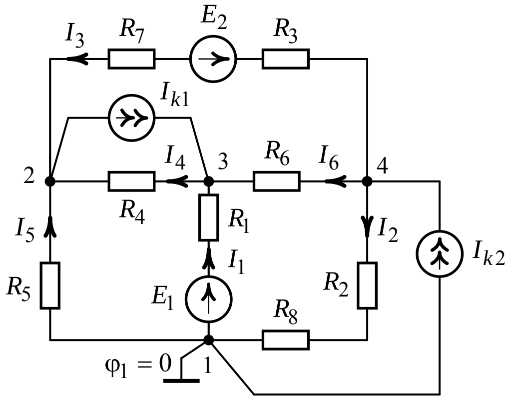

Рис. 5.4

3. Система уравнений для определения потенциалов φ_2, φ_3 и φ_4 (узлы 2, 3 и 4) согласно рис. 5.4 будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{(R_3+R_7)}\right)-\varphi_3\dfrac{1}{R_4}-\varphi_4\dfrac{1}{(R_3+R_7)}=-E_2\dfrac{1}{(R_3+R_7)}-I_{k1}, \\ \varphi_3\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}\right)-\varphi_2\dfrac{1}{R_4}-\varphi_4\dfrac{1}{R_6}=E_1\dfrac{1}{R_1}+I_{k1}, \\ \varphi_4\left(\dfrac{1}{(R_3+R_7)}+\dfrac{1}{R_6}+\dfrac{1}{(R_2+R_8)}\right)-\varphi_2\dfrac{1}{(R_3+R_7)}-\varphi_3\dfrac{1}{R_6}=E_2\dfrac{1}{(R_3+R_7)}+I_{k2}. \end{cases}$$

4. Для расчета приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{(R_3+R_7)}\right) & -\dfrac{1}{R_4} & -\dfrac{1}{(R_3+R_7)} \\ -\dfrac{1}{R_4} & \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}\right) & -\dfrac{1}{R_6} \\ -\dfrac{1}{(R_3+R_7)} & -\dfrac{1}{R_6} & \left(\dfrac{1}{(R_3+R_7)}+\dfrac{1}{R_6}+\dfrac{1}{(R_2+R_8)}\right) \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{E_2}{(R_3+R_7)} \\ \dfrac{E_1}{R_1}+I_{k1} \\ \dfrac{E_2}{(R_3+R_7)}+I_{k2} \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки числовых значений получим

$$\begin{bmatrix} 0,0433 & -0,01 & -0,0166 \\ -0,01 & 0,0383 & -0,0083 \\ -0,0166 & -0,0083 & 0,05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,92 \\ 1,85 \\ 3,42 \end{bmatrix}.$$

6. Решением матричного уравнения будут потенциалы узлов

$$\varphi_2 = -58,33\text{ В};\quad \varphi_3 = 45,36\text{ В};\quad \varphi_4 = 56,68\text{ В}.$$

7. Зададим направление токов в ветвях схемы, как указано на рис. 5.4, и выразим токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_1}{R_1} = \frac{-45,36 + 30}{50} = -0,31\text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_2 + R_8} = \frac{56,68}{40} = 1,42\text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 - E_2}{R_3 + R_7} = \frac{56,68 - (-58,33) - 160}{60} = -0,75\text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} = \frac{45,36 - (-58,33)}{100} = 1,04\text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{-(58,33)}{60} = 0,97\text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_6} = \frac{56,68 - 45,36}{120} = 0,094\text{ А}.$$

8. Проверка решения. Проверку решения выполним по первому закону Кирхгофа, например, для узла 1:

$$-I_5 - I_1 + I_2 - I_{k2} = -0,97 + 0,31 + 1,42 - 0,75 = 0,01 \approx 0.$$

Задача 5.3

Методом узловых потенциалов определить токи во всех ветвях схемы, изображенной на рис. 5.5. Заданы $E = 40$ В, $I_k = 0,1$ А, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 25$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $R_4 = 200$ Ом, $R_5 = 20$ Ом.

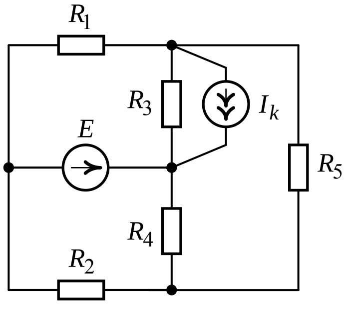

Рис. 5.5

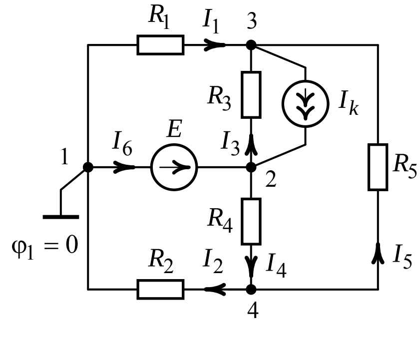

Рис. 5.6

Решение

1. Схема (рис. 5.5) содержит семь ветвей ($m_в = 7$), четыре узла ($n_у = 4$), одну ветвь с источником тока ($m_т = 1$).

В цепи имеется ветвь с источником ЭДС E, не содержащая сопротивления ($n_н = 1$), т.е. с нулевым сопротивлением.

2. Общее число уравнений для расчета цепи по методу узловых потенциалов при наличии ветви с источником ЭДС, не содержащей сопротивления, равно двум:

$$N = n_у - 1 - n_н = 4 - 1 - 1 = 2 .$$

Примем потенциал узла 1 (рис. 5.6) равным нулю ($\varphi_1 = 0$).

П р и м е ч а н и е. Целесообразно принять равным нулю потенциал одной из узловых точек ветви с источником ЭДС с нулевым сопротивлением.

Тогда потенциал узла 2 имеет значение напряжения, равное E, т.е. $\varphi_2 = 40$ В (рис. 5.6).

3. Расчетные уравнения для потенциалов оставшихся узловых точек (узлы 3, 4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_3\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_5}\right)-\varphi_2\dfrac{1}{R_3}-\varphi_4\dfrac{1}{R_5}=-I_k, \\ \varphi_4\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)-\varphi_2\dfrac{1}{R_4}-\varphi_3\dfrac{1}{R_5}=0. \end{cases}$$

4. Подставив в систему числовые значения, получим

$$\begin{cases} \varphi_3 0,08-\varphi_4 0,05=0,7, \\ -\varphi_3 0,05+\varphi_4 0,095=0,2. \end{cases}$$

5. Решение системы относительно неизвестных потенциалов позволяет получить

$$\varphi_3 = 15 \text{ В}, \quad \varphi_4 = 10 \text{ В} .$$

6. Зададим направления токов в ветвях цепи, как указано на рис.5.6. По закону Ома выразим токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_1} = \frac{-15}{100} = -0,15 \text{ А} ;$$

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_2} = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ А} ;$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_3} = \frac{40-15}{50} = 0,5 \text{ А} ;$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{40-10}{200} = 0,15 \text{ А} ;$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R_5} = \frac{10-15}{20} = -0,25 \text{ А} .$$

Ток I_6 в ветви с источником E найдем по первому закону Кирхгофа для узла 1 (рис. 5.6):

$$I_6 = I_2 - I_1 = 0,4 - (-0,15) = 0,55 \text{ А}.$$

7. Проверка решения. По второму закону Кирхгофа для внешнего контура цепи (рис. 5.6) запишем:

$$I_1 R_1 - I_5 R_5 + I_2 R_2 = 0.$$

После подстановки числовых значений получим

$$-0,15 \cdot 100 - (-0,25) \cdot 20 + 0,4 \cdot 25 = 0 \text{ В}.$$

Задача 5.4

Вычислить токи в ветвях схемы (рис. 5.7), методом узловых потенциалов, если $E_1 = 120$ В, $E_2 = 30$ В, $I_k = 1,4$ А, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 6$ Ом.

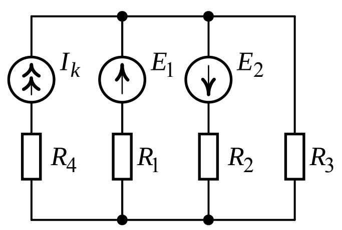

Рис. 5.7

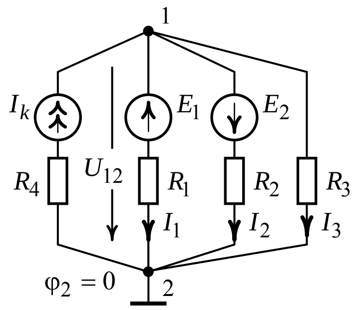

Рис. 5.8

Решение

1. Схема (рис. 5.7) содержит четыре ветви ($m_в = 4$), два узла ($n_у = 2$), одну ветвь с источником тока ($n_т = 1$).

Рассматривая частный случай схемы с двумя узлами, воспользуемся для расчета методом двух узлов.

2. Потенциал узла 2 (рис. 5.8) примем равным нулю ($\varphi_2 = 0$). Тогда напряжение между узлами 1 и 2 найдем как

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_k}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{(R_4 + \infty)}} = \frac{\frac{120}{12} - \frac{30}{15} + 1,4}{\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} + 0} =$$

$$= \frac{9,4}{0,275} = 34,18 \text{ В}.$$

3. Направление токов в ветвях цепи зададим в соответствии с указанными на рис. 5.8, тогда

$$I_1 = \frac{U_{12} - E_1}{R_1} = \frac{34,18 - 120}{12} = -7,15 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{12} + E_2}{R_2} = \frac{34,18 + 30}{15} = 4,28 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3} = \frac{34{,}18}{8} = 4{,}27\ \text{А}.$$

7. Проверка решения. По первому закону Кирхгофа для узла 2 запишем:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_k = -7{,}15 + 4{,}28 + 4{,}27 - 1{,}4 = 0.$$

Задача 5.5

Определить показание вольтметра, установленного в схеме (рис. 5.9), если $E_1 = 18$ В, $E_2 = 36$ В, $I_k = 0{,}1$ А, $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 600$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $R_4 = 250$ Ом, $R_5 = 150$ Ом. Внутреннее сопротивление вольтметра принять равным $r_V = \infty$. Расчет цепи выполнить по методу узловых потенциалов.

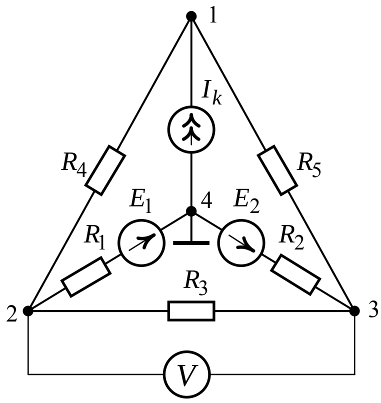

Рис. 5.9

Решение

Показание вольтметра определим как разность потенциалов узловых точек 3 и 2 в местах его подключения: $V \to U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2$.

1. Определим потенциалы φ_2 и φ_3 узловых точек 2 и 3. Схема содержит шесть ветвей ($m_\text{в} = 6$), четыре узла ($n_\text{у} = 4$), одну ветвь с источником тока ($n_\text{т} = 1$).

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи методом узловых потенциалов равно трем:

$$N = n_\text{у} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Потенциал узла 4 (рис. 5.9) примем равным нулю ($\varphi_4 = 0$).

3. Система уравнений для определения неизвестных потенциалов φ_1, φ_2 и φ_3 узловых точек 1, 2 и 3 будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_1\left(\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}\right) - \varphi_2\dfrac{1}{R_4} - \varphi_3\dfrac{1}{R_5} = I_k, \\ \varphi_2\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) - \varphi_1\dfrac{1}{R_4} - \varphi_3\dfrac{1}{R_3} = -E_1\dfrac{1}{R_1}, \\ \varphi_3\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}\right) - \varphi_2\dfrac{1}{R_3} - \varphi_1\dfrac{1}{R_5} = E_2\dfrac{1}{R_2}. \end{cases}$$

4. Приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k \\ -\frac{E_1}{R_1} \\ \frac{E_2}{R_2} \end{bmatrix}.$$

5. Подставив в систему числовые значения заданных параметров элементов цепи, получим

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{250}+\frac{1}{150}\right) & -\frac{1}{250} & -\frac{1}{150} \\ -\frac{1}{250} & \left(\frac{1}{400}+\frac{1}{200}+\frac{1}{250}\right) & -\frac{1}{200} \\ -\frac{1}{150} & -\frac{1}{200} & \left(\frac{1}{600}+\frac{1}{200}+\frac{1}{150}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -\frac{18}{400} \\ \frac{36}{600} \end{bmatrix}.$$

6. Из решения системы получим

$$\varphi_2 = 24 \text{ В}, \quad \varphi_3 = 33 \text{ В}.$$

7. Показания вольтметра найдем как разность потенциалов узловых точек 3 и 2:

$$V \to U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = 33 - 24 = 9 \text{ В}.$$