Тема 4. Метод контурных токов

Задачу расчета разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами расчета сложных цепей. Одним из этих методов является метод контурных токов. Метод контурных токов можно определить как метод расчета, в котором за неизвестные принимаются токи контуров. Использование этого метода позволяет сократить количество составляемых уравнений по отношению к расчету при непосредственном применении законов Кирхгофа.

Задача 4.1

Методом контурных токов рассчитать все токи в ветвях схемы (рис. 4.1). Даны: $E_1 = 240$ В, $E_2 = 160$ В, $E_3 = 70$ В, $E_4 = 120$ В, $R_1 = 24$ Ом, $R_2 = 16$ Ом, $R_3 = 34$ Ом, $R_4 = 12$ Ом, $R_5 = 21$ Ом, $R_6 = 18$ Ом. Выполнить проверку решения по второму закону Кирхгофа.

Решение

1. Цепь (рис. 4.1) содержит шесть ветвей ($m_{\text{в}} = 6$), четыре узла ($n_{\text{у}} = 4$). Ветви с источниками тока в цепи отсутствуют ($n_{\text{т}} = 0$).

Зададим произвольное положительное направление токов в ветвях схемы и обозначим их, как указано на рис. 4.2.

2. Определим достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу контурных токов:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) - n_{\text{т}} = 6 - (4 - 1) - 0 = 3.$$

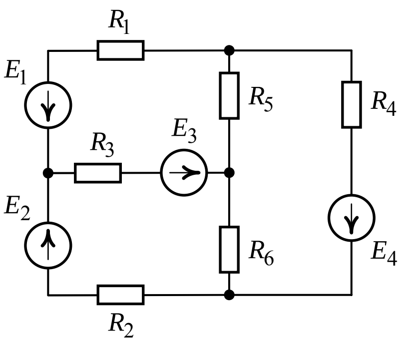

Рис. 4.1

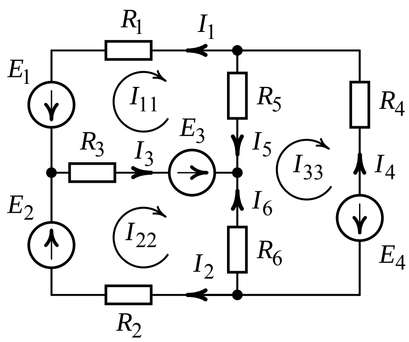

Рис. 4.2

Достаточное количество контурных уравнений равно трем. Выделим в схеме три независимых контура, по которым замкнем контурные токи I_{11}, I_{22} и I_{33} (рис. 4.2). Направление действия контурных токов выберем по часовой стрелке. Положительное направление обхода контура совместим с направлением контурного тока.

3. Система контурных уравнений (уравнений по второму закону Кирхгофа) имеет вид (рис. 4.2)

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_1 + R_3 + R_5\right) - I_{22}R_3 - I_{33}R_5 = -E_1 - E_3, \\ I_{22}\left(R_2 + R_3 + R_6\right) - I_{11}R_3 - I_{33}R_6 = E_2 + E_3, \\ I_{33}\left(R_4 + R_5 + R_6\right) - I_{11}R_5 - I_{22}R_6 = E_4. \end{cases}$$

4. Выполним подстановку числовых значений:

$$\begin{cases} I_{11}\cdot 79 - I_{22}\cdot 34 - I_{33}\cdot 21 = -310, \\ -I_{11}\cdot 34 + I_{22}\cdot 68 - I_{33}\cdot 18 = 230, \\ -I_{11}\cdot 21 - I_{22}\cdot 18 + I_{33}\cdot 51 = 120. \end{cases}$$

5. Решение полученной системы уравнений выполним с помощью определителей по методу Крамера:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}, \quad I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta}.$$

Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 79 & -34 & -21 \\ -34 & 68 & -18 \\ -21 & -18 & 51 \end{vmatrix} = 1,337\cdot 10^5 .$$

Дополнительные определители:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -310 & -34 & -21 \\ 230 & 68 & -18 \\ 120 & -18 & 51 \end{vmatrix} = -2,441\cdot 10^5 ,$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 79 & -310 & -21 \\ -34 & 230 & -18 \\ -21 & 120 & 51 \end{vmatrix} = 4,268\cdot 10^5 ,$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 79 & -34 & -310 \\ -34 & 68 & 230 \\ -21 & -18 & 120 \end{vmatrix} = 3,648\cdot 10^5 .$$

6. Контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{-2,441\cdot 10^5}{1,337\cdot 10^5} = -1,825 \text{ А},$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{4,268\cdot 10^5}{1,337\cdot 10^5} = 3,192 \text{ А},$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{3,648\cdot 10^5}{1,337\cdot 10^5} = 2,728 \text{ А}.$$

7. Действительные токи в ветвях схемы (рис. 4.2) определим как алгебраическую сумму контурных токов смежных контуров:

$$I_1 = -I_{11} = 1,825 \text{ А};$$

$$I_2 = I_{22} = 3,192 \text{ А};$$

$$I_3 = -I_{11} + I_{22} = -(-1,825) + 3,192 = 5,017 \text{ А};$$

$$I_4 = -I_{33} = -2,728 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{11} - I_{33} = -1,825 - 2,728 = -4,553 \text{ А};$$

$$I_6 = I_{33} - I_{22} = 2,728 - 3,192 = -0,464 \text{ А}.$$

8. Проверку расчета выполним, составив уравнение по второму закону Кирхгофа, например для внешнего контура (рис. 4.2). Направление обхода контура по часовой стрелке:

$$-I_1R_1 - I_4R_4 + I_2R_2 = -E_1 + E_2 + E_4 .$$

Подставляя в уравнение числовые значения, получим

$$-1{,}825 \cdot 24 - (-2{,}728) \cdot 1{,}2 + 3{,}192 \cdot 16 = -240 + 160 + 120 \text{ В},$$

$$40 = 40 \text{ В}.$$

Задача 4.2

Для схемы, рис. 4.3, пользуясь методом контурных токов, определить все токи, если $E_1 = 36$ В, $E_2 = 67$ В, $I_k = 0{,}1$ А, $R_1 = 400$ Ом $R_2 = 200$ Ом, $R_3 = 250$ Ом, $R_4 = 600$ Ом, $R_5 = 300$ Ом .

Решение

1. Схема (рис. 4.3) содержит шесть ветвей ($m_в = 6$), четыре узла ($n_у = 4$). Одна ветвь содержит источник тока I_k ($n_т = 1$).

Положительные направления токов в ветвях схемы обозначим в соответствии с рис. 4.4.

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по методу контурных токов равно двум:

$$N_2 = m_в - (n_у - 1) - n_т = 6 - (4 - 1) - 1 = 2 .$$

Независимые контуры и направления протекания контурных токов I_{11}, I_{22} обозначены на рис. 4.4.

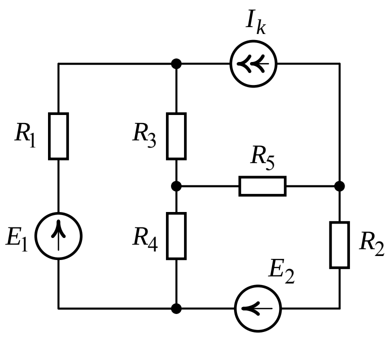

Рис. 4.3

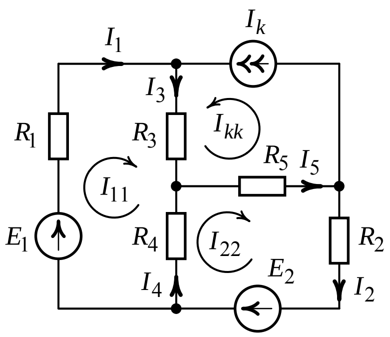

Рис. 4.4

Для ветви с источником тока I_k создадим третий контур с контурным током I_{kk} по направлению, совпадающему с направлением источника (рис. 4.4).

Считаем, что $I_{kk} = I_k = 0{,}1$ А является известным контурным током, который будем учитывать только при составлении уравнений независимых контуров.

3. Система уравнений, составленная по методу контурных токов, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_1+R_3+R_4\right)-I_{22}R_4+I_{kk}R_3=E_1, \\ I_{22}\left(R_2+R_4+R_5\right)-I_{11}R_4+I_{kk}R_5=E_2. \end{cases}$$

4. После подстановки числовых значений параметров цепи получим

$$\begin{cases} I_{11}\cdot 1250-I_{22}\cdot 600=11, \\ -I_{11}\cdot 600+I_{22}\cdot 1100=37. \end{cases}$$

5. Решение системы позволяет получить значения контурных токов:

$$I_{11}=33,79\cdot 10^{-3}\,\text{А}, \qquad I_{22}=52,06\cdot 10^{-3}\,\text{А}.$$

6. Действительные токи в ветвях (рис. 4.4) находим как алгебраическую сумму контурных токов смежных контуров:

$$I_1=I_{11}=33,79\cdot 10^{-3}\,\text{А};$$

$$I_2=I_{22}=52,06\cdot 10^{-3}\,\text{А};$$

$$I_3=I_{11}+I_{kk}=33,79\cdot 10^{-3}+0,1=133,79\cdot 10^{-3}\,\text{А};$$

$$I_4=-I_{11}+I_{22}=-33,79\cdot 10^{-3}+52,06\cdot 10^{-3}=18,27\cdot 10^{-3}\,\text{А};$$

$$I_5=I_{22}+I_{kk}=52,06\cdot 10^{-3}+0,1=152,06\cdot 10^{-3}\,\text{А}.$$

Задача 4.3

Требуется рассчитать токи в ветвях цепи (рис. 4.5), если $E_1=18\,\text{В}$, $E_2=24\,\text{В}$, $E_3=36\,\text{В}$, $I_{k1}=4\,\text{А}$, $I_{k2}=5\,\text{А}$, $R_1=2\,\text{Ом}$, $R_2=4\,\text{Ом}$, $R_3=6\,\text{Ом}$, $R_4=3\,\text{Ом}$, $R_5=8\,\text{Ом}$, $R_6=5\,\text{Ом}$. Расчеты выполнить методом контурных токов.

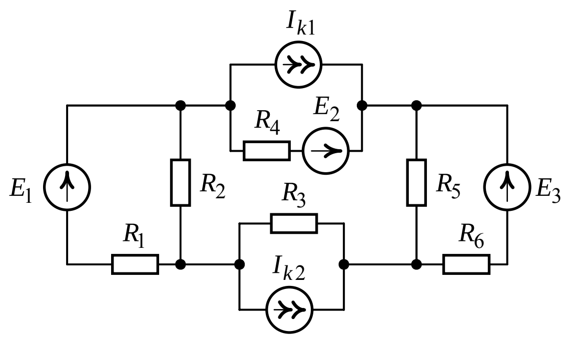

Рис. 4.5

Решение

1. Преобразуем цепь (рис. 4.5) к виду, более удобному для расчета, объединив в один узел узлы равного потенциала (рис. 4.6).

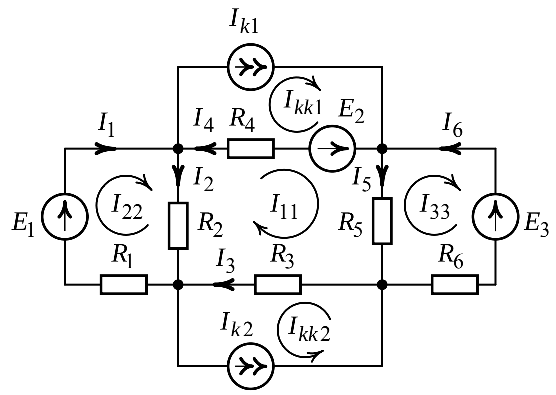

Рис. 4.6

Цепь (рис. 4.6) содержит восемь ветвей ($m_{\text{в}} = 8$), четыре узла ($n_{\text{у}} = 4$). Две ветви содержат источники тока I_{k1}, I_{k2} ($n_{\text{т}} = 2$).

Зададимся произвольным положительным направлением токов в ветвях схемы и обозначим их, как указано на рис. 4.6.

2. Определим достаточное количество уравнений, которое равно трем:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) - n_{\text{т}} = 8 - (4 - 1) - 2 = 3.$$

Выделим в схеме три независимых контура, по которым замкнем контурные токи I_{11}, I_{22} и I_{33}.

Направление контурных токов выберем по часовой стрелке. Для ветвей с источниками тока создадим два дополнительных контура с контурным током I_{kk1}, I_{kk2}. Направления дополнительных контурных токов выберем так, чтобы они совпадали с направлениями действия источников тока I_{k1} и I_{k2}.

3. Система контурных уравнений, записанных по втором закону Кирхгофа относительно неизвестных контурных токов, имеет вид

$$\begin{cases} I_{11}\left(R_2 + R_3 + R_4 + R_5\right) - I_{22}R_2 - I_{33}R_5 - I_{kk1}R_4 + I_{kk2}R_3 = E_2, \\ I_{22}\left(R_1 + R_2\right) - I_{11}R_2 = E_1, \\ I_{33}\left(R_5 + R_6\right) - I_{11}R_5 = -E_3. \end{cases}$$

4. Приведем систему к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & -R_2 & -R_5 \\ -R_2 & (R_1 + R_2) & 0 \\ -R_5 & 0 & (R_5 + R_6) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 + I_{kk1}R_4 - I_{kk2}R_3 \\ E_1 \\ -E_3 \end{bmatrix}.$$

5. Подставив числовые значения параметров элементов цепи, получим

$$\begin{bmatrix} 21 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

6. Решение матричной системы позволяет определить контурные токи

$$I_{11} = -0{,}31 \text{ А}, \quad I_{22} = 2{,}79 \text{ А}, \quad I_{33} = -2{,}96 \text{ А}.$$

7. Определяем действительные токи в ветвях схемы (рис. 4.6):

$$I_1 = I_{22} = 2,793\ \text{А};$$

$$I_2 = -I_{11} + I_{22} = -(-0,31) + 2,79 = 3,10\ \text{А};$$

$$I_3 = I_{11} + I_{kk2} = -0,31 + 5 = 4,69\ \text{А};$$

$$I_4 = -I_{11} + I_{kk1} = -(-0,31) + 4 = 4,31\ \text{А};$$

$$I_5 = I_{11} - I_{33} = -0,31 - (-2,96) = 2,65\ \text{А};$$

$$I_6 = -I_{33} = 2,96\ \text{А}.$$