Тема 2. Расчет сложных цепей с помощью прямого применения законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа лежат в основе расчета сложных цепей, содержащих несколько источников энергии. С помощью двух законов Кирхгофа устанавливаются соотношения между токами и ЭДС в ветвях электрической цепи и напряжениями на элементах цепи.

Задача 2.1

Пользуясь законами Кирхгофа, рассчитать токи в ветвях схемы рис. 2.1, если $E_1 = 100$ В, $E_2 = 20$ В, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 100$ Ом.

Решение

1. Цепь рис. 2.1 содержит три ветви ($m_в = 3$), два узла ($n_у = 2$). Цепь питает два источника ЭДС E_1 и E_2. Источники тока в цепи отсутствуют ($n_т = 0$).

Выберем произвольно положительные направления токов в ветвях схемы и обозначим их, как указано на рис. 2.2.

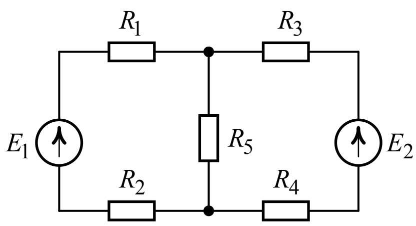

Рис. 2.1

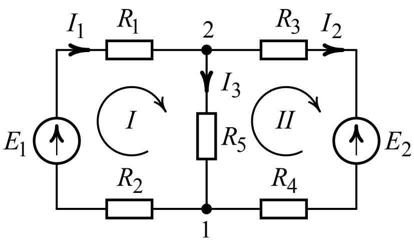

Рис. 2.2

2. Определим достаточное количество уравнений для расчета цепи по законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа:

$$N_1 = n_у - 1 = 2 - 1 = 1.$$

По второму закону Кирхгофа:

$$N_2 = m_в - (n_у - 1) - n_т = 3 - (2 - 1) - 0 = 2.$$

Достаточное количество уравнений равно трем, что соответствует количеству неизвестных токов, обозначенных в ветвях схемы как I_1, I_2 и I_3 (рис. 2.2).

3. Составим систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Одно уравнение по первому закону Кирхгофа, например для узла 1, и два уравнения по второму закону Кирхгофа для двух независимых контуров. Положительные направления обхода контуров соответствуют направлениям, указанным на рис. 2.2.

Для узла 1: $I_3 - I_1 + I_2 = 0$;

Для контура I: $I_1(R_1 + R_2) + I_3 R_5 = E_1$;

Для контура II: $I_2(R_3 + R_4) - I_3 R_5 = -E_2$.

4. После подстановки числовых значений имеем

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ I_1 \cdot 50 + I_3 \cdot 100 = 100, \\ I_2 \cdot 50 - I_3 \cdot 100 = -20. \end{cases}$$

5. Решение системы получим с помощью определителей:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель системы, Δ_1, Δ_2, Δ_3 – алгебраические дополнения.

Главный определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 50 & 0 & 100 \\ 0 & 50 & -100 \end{vmatrix} = 12{,}5 \cdot 10^3.$$

Дополнительные определители равны:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 100 & 0 & 100 \\ -20 & 50 & -100 \end{vmatrix} = 13 \cdot 10^3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 50 & 100 & 100 \\ 0 & -20 & -100 \end{vmatrix} = 7 \cdot 10^3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 100 \\ 0 & 50 & -20 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10^3.$$

6. Токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^3} = 1{,}04 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}56 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}48 \text{ А}.$$

Задача 2.2

Рассчитать с использованием законов Кирхгофа токи в ветвях схемы, изображенной на рис. 2.3, если известны $E = 150$ В, $I_k = 1{,}5$ А, $R_1 = 34$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 42$ Ом, $R_4 = 28$ Ом. Выполнить правильность расчета цепи путем проверки баланса мощностей.

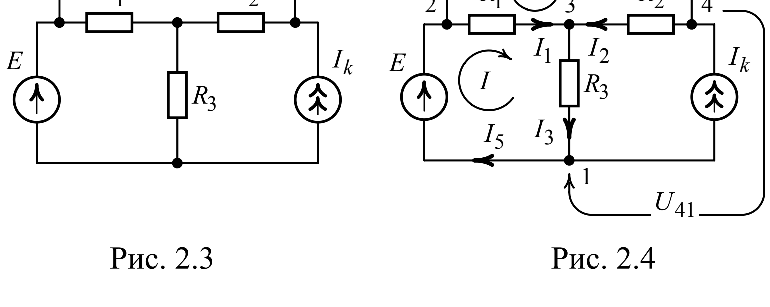

Рис. 2.3 Рис. 2.4

Решение

1. Цепь рис. 2.3 содержит шесть ветвей ($m_{\text{в}} = 6$), четыре узла ($n_{\text{у}} = 4$). Одна ветвь содержит источник тока I_k ($n_{\text{т}} = 1$).

Выберем положительные направления токов в схеме, как это указано на рис. 2.4.

2. Определим достаточное количество уравнений для расчета цепи:

по первому закону Кирхгофа:

$$N_1 = n_{\text{у}} - 1 = 4 - 1 = 3,$$

по второму закону Кирхгофа:

$$N_2 = m_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) - n_{\text{т}} = 6 - (4 - 1) - 1 = 2.$$

Достаточное количество уравнений равно пяти, что соответствует числу неизвестных токов $I_1 - I_5$ (рис. 2.4).

3. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа.

Три уравнения по первому закону Кирхгофа, например, для узлов 2, 3 и 4. Два уравнения по второму закону Кирхгофа. Положительные направления обхода независимых контуров выберем в соответствии с указанными на рис. 2.4.

Для узла 2: $-I_1 + I_4 + I_5 = 0$;

Для узла 3: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

Для узла 4: $-I_2 - I_4 + I_k = 0$;

Для контура I: $I_1R_1 + I_3R_3 = E$;

Для контура II: $-I_1R_1 - I_4R_4 + I_2R_2 = 0$.

П р и м е ч а н и е. При выборе независимых контуров необходимо следить за тем, чтобы контур не содержал ветви с источником тока.

4. После подстановки числовых значений параметров элементов цепи получим:

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 + I_5 = 0, \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ -I_2 - I_4 = -1{,}5, \\ I_1 \cdot 34 + I_3 \cdot 42 = 120, \\ -I_1 \cdot 34 - I_4 \cdot 28 + I_2 \cdot 12 = 0. \end{cases}$$

5. Решение системы получим в матричной форме:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 34 & 0 & 42 & 0 & 0 \\ -34 & 12 & 0 & -28 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \\ 150 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. В результате решения матричной системы уравнений находим токи:

$$I_1 = 0{,}95\ \text{А},\quad I_2 = 1{,}86\ \text{А},\quad I_3 = 2{,}8\ \text{А},\quad I_4 = -0{,}36\ \text{А},\quad I_5 = 1{,}3\ \text{А}.$$

Знак минус у тока I_4 означает, что действительное направление тока противоположно направлению, выбранному на схеме рис. 2.4.

П р и м е ч а н и е: Изменять знак тока на обратный не следует, так как это может привести к ошибке в дальнейших расчетах.

7. Правильность расчета установим путем проверки баланса мощностей. Мощность, поступающая в цепь от источников энергии, должна равняться сумме мощностей потребителей электрической энергии:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пот}} .$$

Предварительно найдем напряжение U_{41} на зажимах с источником тока I_k (рис. 2.4). На основании второго закона Кирхгофа получим:

$$U_{41} = I_3 R_3 + I_2 R_2 .$$

Полная мощность, развиваемая источниками энергии:

$$\sum P_{\text{ист}} = EI_5 + I_k U_{41} = E_5 I_5 + I_k \left(I_3 R_3 + I_2 R_2 \right) =$$

$$= 150 \cdot 1{,}3 + 1{,}5(2{,}8 \cdot 42 + 1{,}86 \cdot 12) = 404{,}88 \text{ Вт} .$$

Полная мощность потерь в резистивных сопротивлениях

$$\sum P_{\text{пот}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 =$$

$$= 0{,}95^2 \cdot 34 + 1{,}86^2 \cdot 12 + 2{,}8^2 \cdot 42 + \left(-0{,}36\right)^2 \cdot 28 = 405{,}11 \text{ Вт} .$$

Следовательно,

$$404{,}88 \approx 405{,}11 \text{ Вт} .$$

Погрешность расчета составляет:

$$\delta\,\% = \frac{\sum P_{\text{пот}} - \sum P_{\text{ист}}}{\sum P_{\text{ист}}} 100\,\% = \frac{405{,}11 - 404{,}88}{405{,}11} 100\,\% = 0{,}06\,\% .$$

Задача 2.3

Для схемы электрической цепи (рис. 2.5) построить график изменения потенциала во внешнем контуре. Параметры элементов цепи заданы: $E_1 = 80$ В, $E_2 = 50$ В, $I_k = 1{,}5$ А, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 90$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $R_5 = 20$ Ом.

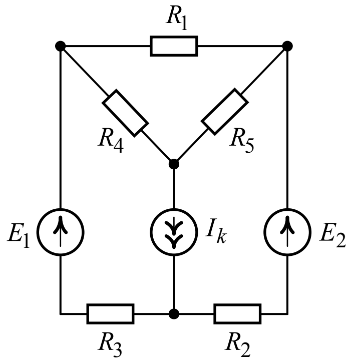

Рис. 2.5

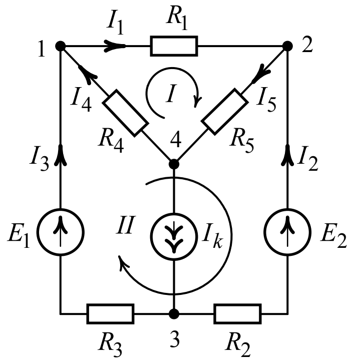

Рис. 2.6

Решение

1. Предварительно выполним расчет токов внешнего контура. Цепь (рис. 2.5) содержит шесть ветвей ($m_{\text{в}} = 6$), четыре узла ($n_{\text{у}} = 4$). Одна ветвь содержит источник тока I_k ($n_{\text{т}} = 1$).

Выберем положительные направления токов в схеме цепи в соответствии с указанными на рис. 2.6.

2. Достаточное количество уравнений для расчета цепи по первому закону Кирхгофа $N_1 = n_у - 1 = 4 - 1 = 3$, по второму закону Кирхгофа $N_2 = m_в - (n_у - 1) - n_т = 6 - (4-1) - 1 = 2$.

Общее количество уравнений равно пяти.

3. Три уравнения по первому закону Кирхгофа составим для узлов 1, 2 и 4.

Два уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров I и II, обозначенных в схеме на рис. 2.6.

$$\begin{cases} -I_1 + I_3 + I_4 = 0, \\ I_1 + I_2 - I_5 = 0, \\ -I_4 + I_5 - I_k = 0, \\ I_1R_1 + I_5R_5 + I_4R_4 = 0, \\ I_3R_3 - I_4R_4 - I_5R_5 - I_2R_2 = E_1 - E_2. \end{cases}$$

4. Запишем систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & R_5 \\ 0 & -R_2 & R_3 & -R_4 & -R_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_k \\ 0 \\ E_1 - E_2 \end{bmatrix}.$$

5. После подстановки числовых значений получим

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 50 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & -90 & 40 & -60 & -20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

6. Решение матричной системы позволяет определить токи

$$I_1 = 0,445 \text{ А}, \quad I_2 = 0,402 \text{ А}, \quad I_3 = 1,098 \text{ А}.$$

7. Выделим элемент внешнего контура (рис. 2.7). Примем потенциал точки 1 равным нулю ($\varphi_1 = 0$). Рассчитаем потенциалы точек контура, обходя его по часовой стрелке:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - I_1R_1 = 0 - 0,445 \cdot 50 = -22,25 \text{ В};$$

$$\varphi_{2^I} = \varphi_2 - E_2 = 22,25 - 50 = -72,25 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_{2^I} + I_2R_2 = -72,25 + 0,402 \cdot 90 = -36,07 \text{ В};$$

$$\varphi_{3^I} = \varphi_3 - I_3R_3 = -36,07 - 1,098 \cdot 40 = -79,99 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \varphi_{3^I} + E_1 = -79,99 + 80 \approx 0.$$

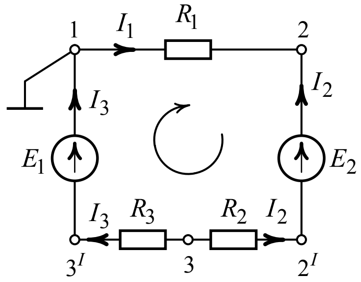

Рис. 2.7

8. Порядок построения потенциальной диаграммы представлен на рис. 2.8. На диаграмме по оси абсцисс откладываем значения сопротивлений участков в последовательности расположения их в контуре.

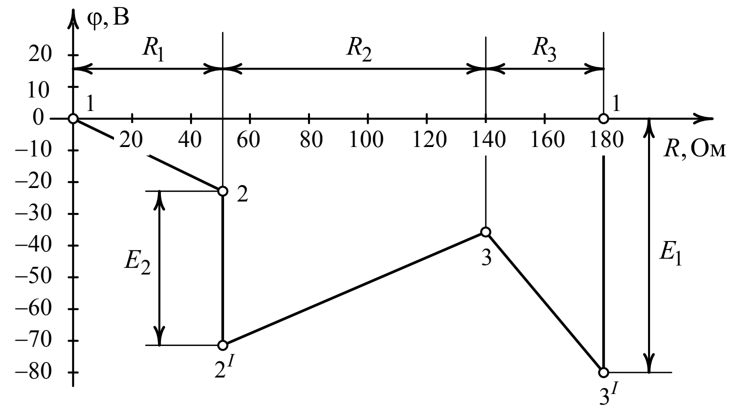

Рис. 2.8

Задача 2.4

Определить показания вольтметров в схеме цепи рис. 2.9, если $I_1 = 2{,}6$ А, $I_2 = 1{,}2$ А, $E_1 = 15$ В, $E_2 = 25$ В, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, $R_3 = 16$ Ом. Внутреннее сопротивление вольтметров принять равным $r_V \to \infty$.

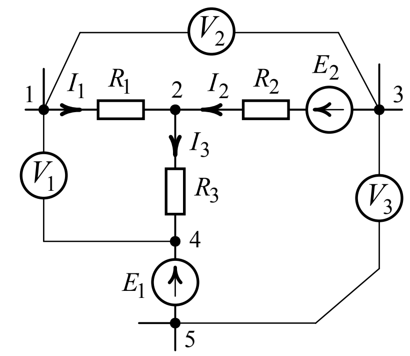

Рис. 2.9

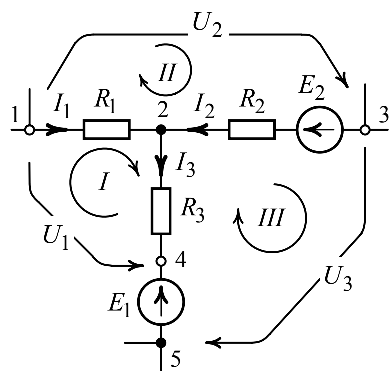

Рис. 2.10

Решение

1. Заменим вольтметры, изображенные на схеме (рис. 2.9), векторами напряжений, указывающих на разность потенциалов между точками их подключения (рис. 2.10). Направления действия векторов напряжений выбираем произвольно.

2. Определим недостающий ток I_3 по первому закону Кирхгофа:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2,6 + 1,2 = 3,8\ \text{А}\,.$$

3. Показание вольтметра V_1 определим из выражения, записанного по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура I (рис. 2.10):

$$I_1R_1 + I_3R_3 - U_1 = 0\,,$$

откуда

$$V_1 \to U_1 = I_1R_1 + I_3R_3 = 2,6\cdot 12 + 3,8\cdot 16 = 92\ \text{В}\,.$$

4. Показание вольтметра V_2 определим из выражения, записанного по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура II, рис. 2.10:

$$U_2 + I_2R_2 - I_1R_1 = E_2\,,$$

откуда

$$V_2 \to U_2 = E_2 + I_1R_1 - I_2R_2 = 25 + 2,6\cdot 12 - 1,2\cdot 24 = 27,4\ \text{В}\,.$$

5. Показание вольтметра V_3 определим из выражения, записанного по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура III, рис. 2.10:

$$U_3 - I_3R_3 - I_2R_2 = E_1 - E_2\,,$$

откуда

$$V_3 \to U_3 = E_1 - E_2 + I_3R_3 + I_2R_2 = 15 - 25 + 3,8\cdot 16 + 1,2\cdot 24 = 80,6\ \text{В}\,.$$

Задача 2.5

Определить показания приборов в схеме рис. 2.11, если $E = 16\ \text{В}$, $I_k = 0,2\ \text{А}$, $R_1 = 100\ \text{Ом}$, $R_2 = 300\ \text{Ом}$, $R_3 = 200\ \text{Ом}$. Внутренние сопротивления вольтметров принять $r_V \to \infty$, амперметров $r_A = 0$.

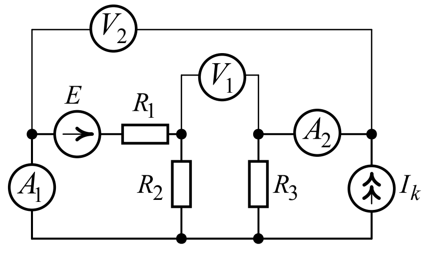

Рис. 2.11

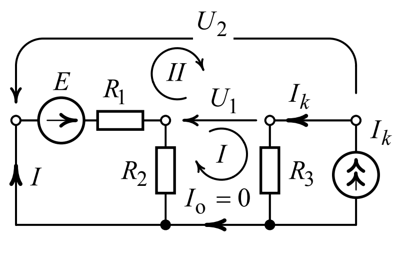

Рис. 2.12

Решение

1. Выполним замену приборов с учетом их внутренних сопротивлений (рис. 2.12) и обозначим токи ветвей.

2. Показание амперметра A_1 равно значению тока I (рис. 2.12)

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{16}{100 + 300} = 0,04 \text{ А} .$$

3. Показание амперметра A_2 будет определяться током источника I_k, включенным последовательно в цепь с амперметром, т.е. $A_2 \to I_k = 0,2$ А .

4. Показание вольтметра V_1 определим из выражения, записанного по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура I (рис. 2.12):

$$-U_1 + I_k R_3 - IR_2 = 0 ,$$

откуда

$$V_1 \to U_1 = I_k R_3 - IR_2 = 0,2 \cdot 200 - 0,04 \cdot 300 = 28 \text{ В} .$$

5. Показание вольтметра V_2 определим по выражению, записанному по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура II (рис. 2.12):

$$-U_2 + U_1 - IR_1 = -E ,$$

откуда
$V_2 \to U_2 = E + U - IR_1 = 16 \cdot 28 - 0,04 \cdot 100 = 40$ В .