Тема 1. Расчет разветвленных электрических цепей при постоянных токах и напряжениях

Рассматривается расчет электрических цепей, содержащих один источник напряжения или тока и смешанное соединение сопротивлений. В основу расчета таких цепей положены методы преобразования (свертывания) цепей в простейшие эквивалентные.

Задача 1.1

В цепи (рис. 1.1) $R_1 = R_7 = 50$ Ом, $R_2 = 120$ Ом, $R_3 = R_6 = 20$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 60$ Ом. Напряжение на входе цепи $U = 280$ В. Определить токи во всех ветвях схемы.

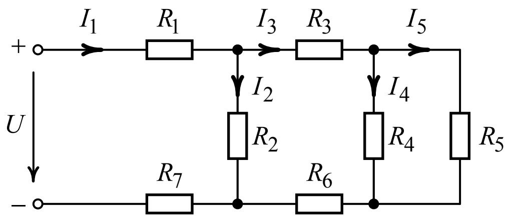

Рис. 1.1

Решение

1. Воспользуемся методом свертывания и преобразуем цепь (рис. 1.1) к виду рис. 1.2.

В рассматриваемой цепи (рис. 1.1) определяются группы сопротивлений, которые имеют последовательное или параллельное соединение.

Сопротивления R_4, R_5 соединены параллельно (рис. 1.1). Их общее сопротивление (рис. 1.3) равно:

$$R_{4,5} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 20 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_3, $R_{4,5}$ и R_6 (рис.1.3) соединены последовательно. Их общее сопротивление (рис. 1.4) равно:

$$R_{3-6} = R_3 + R_{4,5} + R_6 = 20 + 20 + 20 = 60 \text{ Ом}.$$

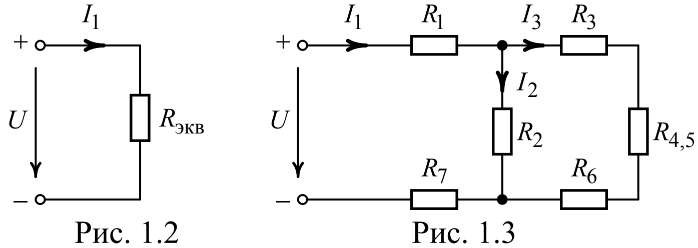

Рис. 1.2 Рис. 1.3

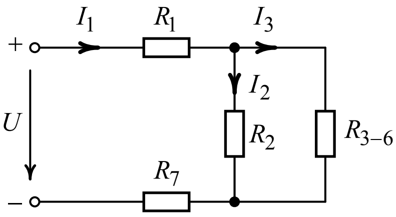

Рис. 1.4

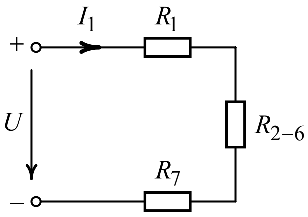

Рис. 1.5

Сопротивления R_2, R_{3-6} соединены параллельно (рис. 1.4) и их общее сопротивление равно (рис. 1.5):

$$R_{2-6} = \frac{R_2 R_{3-6}}{R_2 + R_{3-6}} = \frac{120 \cdot 60}{120 + 60} = 40 \text{ Ом} .$$

Сопротивления R_1, R_{2-6} и R_7 включены последовательно (рис. 1.5). Эквивалентное сопротивление всей цепи (рис. 1.2) равно:

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_{2-6} + R_7 = 50 + 40 + 50 = 140 \text{ Ом} .$$

2. Ток I_1 (рис. 1.2) соответствует току в неразветвленной части схемы (рис. 1.1)

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{280}{140} = 2 \text{ А} .$$

3. Токи I_2 и I_3 (рис. 1.4) равны:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{3-6}}{(R_2 + R_{3-6})} = 2 \frac{60}{(120 + 60)} = 0{,}667 \text{ А} ,$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{(R_2 + R_{3-6})} = 2 \frac{120}{(120 + 60)} = 1{,}333 \text{ А} .$$

4. Токи I_4 и I_5 (рис. 1.1) соответственно равны:

$$I_4 = I_3 \frac{R_5}{(R_4 + R_5)} = 1{,}333 \frac{60}{(30 + 60)} = 0{,}889 \text{ А} ,$$

$$I_5 = I_3 \frac{R_4}{(R_4 + R_5)} = 1{,}333 \frac{30}{(30 + 60)} = 0{,}444 \text{ А} .$$

Задача 1.2

Определить токи в ветвях цепи, схема которой приведена на рис. 1.6, если заданы: $E = 36$ В, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 16$ Ом, $R_3 = 7$ Ом, $R_4 = 8$ Ом, $R_5 = 3$ Ом, $R_6 = 5$ Ом, $R_7 = R_8 = 0{,}6$ Ом.

Решение

1. Преобразуем всю цепь к виду (рис. 1.7). Заменим звезду сопротивлений R_3, R_4, R_5, подключенную к точкам 1, 2 и 3 эквивалентным треугольником (рис. 1.8).

Величины сопротивлений эквивалентного треугольника:

$$R_{3,5} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_4} = 7 + 3 + \frac{7 \cdot 3}{8} = 12{,}63 \text{ Ом} ;$$

$$R_{4,5} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_3} = 8 + 3 + \frac{8 \cdot 3}{7} = 14,43\ \text{Ом};$$

$$R_{4,3} = R_4 + R_3 + \frac{R_4 R_3}{R_5} = 8 + 7 + \frac{8 \cdot 7}{3} = 33,67\ \text{Ом}.$$

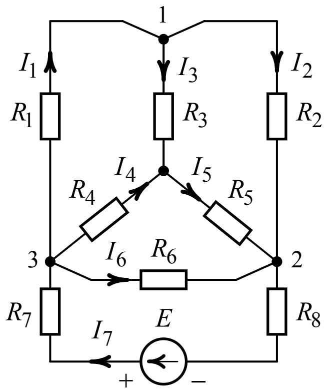

Рис. 1.6

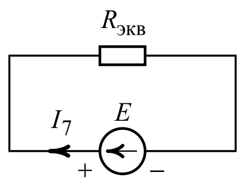

Рис. 1.7

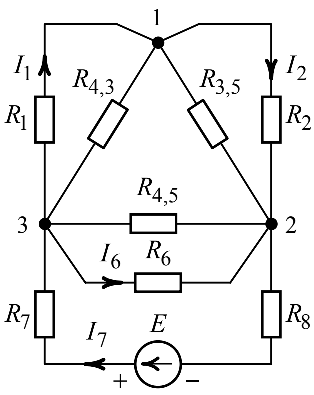

Рис. 1.8

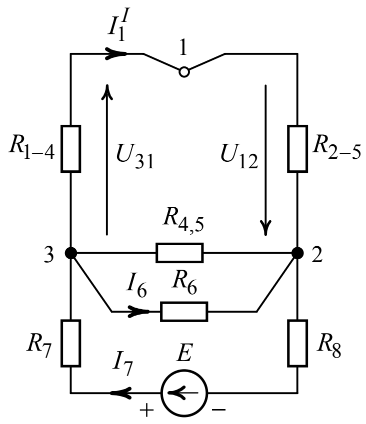

Рис. 1.9

Сопротивление R_1 соединено параллельно с $R_{4,3}$, а сопротивление R_2 параллельно с $R_{3,5}$ (рис. 1.8), их общие сопротивления (рис. 1.9) равны:

$$R_{1-4} = \frac{R_1 R_{4,3}}{R_1 + R_{4,3}} = \frac{12 \cdot 33,67}{12 + 33,67} = 8,85\ \text{Ом};$$

$$R_{2-5} = \frac{R_2 R_{3,5}}{R_2 + R_{3,5}} = \frac{16 \cdot 12,63}{16 + 33,67} = 7,06\ \text{Ом}.$$

Сопротивление R_{1-4} соединено последовательно с R_{2-5} (рис. 1.9), следовательно, общее сопротивление участка цепи (рис. 1.10) равно:

$$R_{1-5} = R_{1-4} + R_{2-5} = 8,85 + 7,06 = 15,91\ \text{Ом}.$$

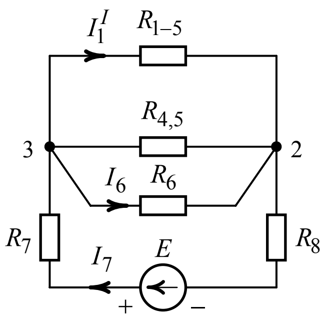

Рис. 1.10

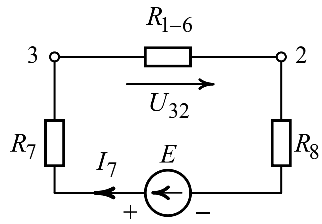

Рис. 1.11

Очевидно, сопротивления R_{1-5}, $R_{4,5}$ и R_6 соединены параллельно (рис. 1.10) и их общее сопротивление (рис. 1.11):

$$\frac{1}{R_{1-6}} = \frac{1}{R_{1-5}} + \frac{1}{R_{4,5}} + \frac{1}{R_6},$$

откуда

$$R_{1-6} = \frac{R_{1-5}R_{4,5}R_6}{R_{4,5}R_6 + R_{1-5}R_6 + R_{1-5}R_{4,5}} =$$

$$= \frac{15,91 \cdot 14,43 \cdot 5}{14,43 \cdot 5 + 15,91 \cdot 5 + 15,91 \cdot 14,43} = 3,01\ \text{Ом}.$$

Сопротивления R_7, R_{1-6} и R_8 соединены последовательно (рис. 1.11). Эквивалентное сопротивление всей цепи (рис. 1.7) равно:

$$R_{\text{экв}} = R_7 + R_{1-6} + R_8 = 0,6 + 3,01 + 0,6 = 4,21\ \text{Ом}.$$

2. Ток I_7 (рис. 1.7):

$$I_7 = \frac{E}{R_{\text{экв}}} = \frac{36}{4,21} = 8,55\ \text{А}.$$

3. Ток I_6 (рис. 1.10) найдем через напряжение U_{32} (рис. 1.11):

$$I_6 = \frac{U_{32}}{R_6} = \frac{I_7 R_{1-6}}{R_6} = \frac{8,55 \cdot 3,01}{5} = 5,15\ \text{А}.$$

4. Токи I_1 и I_2 (рис. 1.8) найдем, предварительно определив ток I^I (рис. 1.9):

$$I^I = \frac{U_{32}}{R_{1-5}} = \frac{I_7 R_{1-6}}{R_{1-5}} = \frac{8,55 \cdot 3,01}{15,91} = 1,62\ \text{А}.$$

Напряжение U_{31} и U_{12} (рис. 1.9) найдем как

$$U_{31} = I^I R_{1-4} = 1,62 \cdot 8,85 = 14,34\ \text{В};$$

$$U_{12} = I^I R_{2-5} = 1,62 \cdot 7,06 = 11,44\ \text{В}.$$

Окончательно для токов I_1, I_2 получим (рис. 1.8)

$$I_1 = \frac{U_{31}}{R_1} = \frac{14,34}{12} = 1,19\ \text{А};$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{11,44}{16} = 0,71\text{ А}.$$

5. Ток I_3 определим из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа для узла 1 (рис. 1.6):

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1,19 - 0,71 = 0,48\text{ А}.$$

6. Из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, для узлов 3 и 2 (рис. 1.6) определим токи I_4 и I_5:

$$I_4 = I_7 - I_6 - I_1 = 8,55 - 5,15 - 1,19 = 2,21\text{ А};$$

$$I_5 = I_7 - I_6 - I_2 = 8,55 - 5,15 - 0,71 = 2,69\text{ А}.$$

Задача 1.3

Определить показание амперметра, установленного в ветви с источником ЭДС (рис. 1.12), если $E = 250$ В, $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $R_3 = 250$ Ом, $R_4 = 150$ Ом, $R_5 = 300$ Ом, $R_6 = R_7 = 100$ Ом. Внутренним сопротивлением амперметра можно пренебречь ($r_A = 0$).

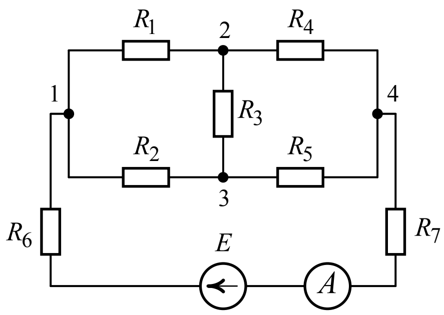

Рис. 1.12

Ошибка!

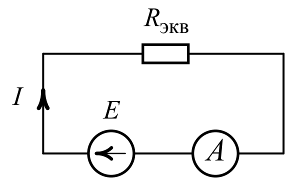

Рис. 1.13

Решение

1. Методом свертывания цепи преобразуем схему рис. 1.12 к виду, приведенному на рис. 1.13.

Заменим треугольник сопротивлений, подключенный к точкам 1, 2 и 3 (рис. 1.12), эквивалентной звездой с вершинами 1, 2 и 3 (рис. 1.14).

Величины сопротивлений эквивалентной звезды:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120 \cdot 200}{120 + 200 + 250} = 42,11\text{ Ом};$$

$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{200 \cdot 250}{120 + 200 + 250} = 87,72\text{ Ом};$$

$$R_{3,1} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{250 \cdot 120}{120 + 200 + 250} = 52,63\text{ Ом}.$$

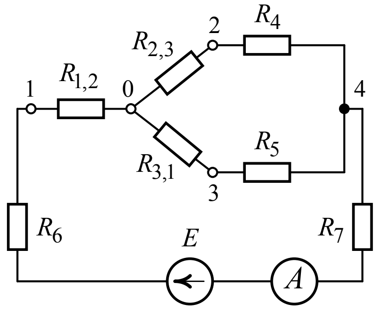

Рис. 1.14

Ошибка!

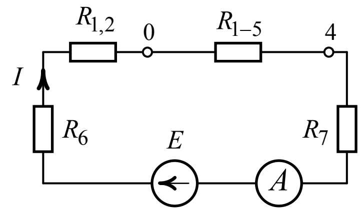

Рис. 1.15

Сопротивление $R_{2,3}$ соединено последовательно с R_4, а сопротивление $R_{3,1}$ последовательно с R_5 (рис. 1.14). Участок цепи с сопротивлениями $R_{2,3}$ и R_4 включен параллельно участку с сопротивлениями $R_{3,1}$ и R_5 (рис. 1.14).

Общее сопротивление обоих участков схемы (рис. 1.15) равно:

$$R_{1-5} = \frac{(R_{2,3}+R_4)(R_{3,1}+R_5)}{R_{2,3}+R_4+R_{3,1}+R_5} = \frac{(87,72+150)(52,63+300)}{87,72+150+52,63+300} = 142 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_6, $R_{1,2}$, R_{1-5}, R_7 (рис. 1.15) включены последовательно. Эквивалентное сопротивление всей цепи (рис. 1.13)

$$R_{\text{экв}} = R_6 + R_{1,2} + R_{1-5} + R_7 = 100 + 42,11 + 142 + 100 = 384,11 \text{ Ом}.$$

2. Показание амперметра соответствует току I (рис. 1.13):

$$I = \frac{E}{R_{\text{экв}}} = \frac{250}{384,11} = 0,65 \text{ А}.$$

Задача 1.4

Определить величину источника тока, установленного на входе цепи (рис. 1.16), если показание амперметра в разветвленной части схемы составляет 4 А. Сопротивления резисторов $R_1 - R_8$ равны 12 Ом.

Внутреннее сопротивление источника $r_k = \infty$. Внутренним сопротивлением амперметра можно пренебречь ($r_A = 0$).

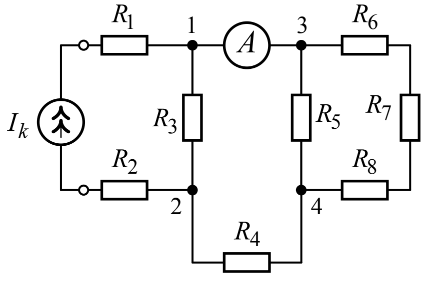

Рис. 1.16

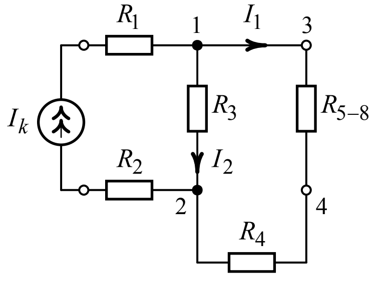

Рис. 1.17

Решение

1. Пользуясь методом свертывания, приведем участок цепи (рис. 1.16) относительно узлов 3 и 4 к виду, представленному на рис. 1.17.

Общее сопротивление участка цепи

$$R_{5-8} = \frac{R_5\left(R_6 + R_7 + R_8\right)}{R_5 + R_6 + R_7 + R_8} = \frac{12 \cdot 36}{48} = 9 \text{ Ом}.$$

2. Напряжение U_{12} между узлами 1 и 2 (рис. 1.17)

$$U_{12} = I_1\left(R_{5-8} + R_4\right) = 4\left(9 + 12\right) = 84 \text{ В}.$$

3. Ток I_2 в ветви с сопротивлением R_3 (рис. 1.17)

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_3} = \frac{84}{12} = 7 \text{А}.$$

4. Ток источника I_k на входе цепи определим на основании первого закона Кирхгофа:

$$I_k = I_1 + I_2 = 4 + 7 = 11 \text{ А}.$$

Задача 1.5

В схеме (рис. 1.18) найти токи, применив метод пропорционального пересчета, если $U_{\text{вх}} = 56$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 45$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 30$ Ом.

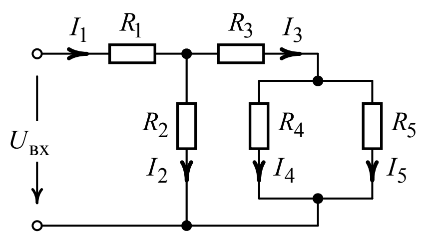

Рис. 1.18

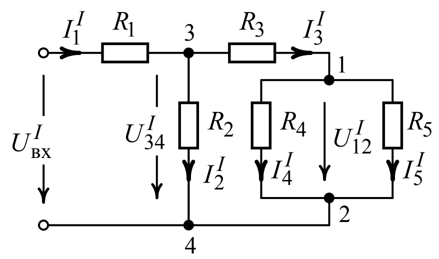

Рис. 1.19

Решение

1. В рассматриваемой цепи зададим ток в одной из удаленных от источника ветвей, например, с сопротивлением R_5, равным 1 А, и определим некоторое напряжение источника на входе цепи $U_{\text{вх}}^I$, при котором $I_5^I = 1$ А (рис. 1.19).

2. Определим токи $I_1^I - I_4^I$ (рис. 1.19).

Напряжение U_{12}^I

$$U_{12}^I = I_5^I R_5 = 1 \cdot 30 = 30 \text{ В}.$$

Ток I_4^I равен: $I_4^I = \dfrac{U_{12}^I}{R_4} = \dfrac{30}{15} = 2$ А.

Ток I_3^I определим как сумму токов I_5^I и I_4^I:

$$I_3^I = I_5^I + I_4^I = 1 + 2 = 3 \text{ А}.$$

Напряжение на сопротивлении R_3

$$U_{R3}^{I} = I_3^{I} R_3 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В} .$$

Напряжение U_{34}^{I} между узловыми точками 3 и 4

$$U_{34}^{I} = U_{R3}^{I} + U_{12}^{I} = 60 + 30 = 90 \text{ В} .$$

Ток I_2^{I} определим как

$$I_2^{I} = \frac{U_{34}^{I}}{R_2} = \frac{90}{45} = 2 \text{ А} .$$

Ток I_1^{I} на входе цепи определим как сумму токов I_2^{I} и I_3^{I}:

$$I_1^{I} = I_2^{I} + I_3^{I} = 2 + 3 = 5 \text{ А} .$$

Напряжение на сопротивлении R_1

$$U_{R1}^{I} = I_1^{I} R_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ В} .$$

Напряжение на входе цепи

$$U_{\text{вх}}^{I} = U_{R1}^{I} + U_{34}^{I} = 50 + 90 = 140 \text{ В} .$$

3. Определим коэффициент пересчета, как отношение напряжения на входе цепи, заданного по условию задачи $U_{\text{вх}} = 56 \text{ В}$, к найденному при расчетах $U_{\text{вх}}^{I} = 140 \text{ В}$:

$$k_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}^{I}} = \frac{56}{140} = 0,4 .$$

4. Действительные токи в ветвях цепи найдем следующим образом:

$$I_1 = I_1^{I} k_{\text{пер}} = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ А} ;$$

$$I_2 = I_2^{I} k_{\text{пер}} = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ А} ;$$

$$I_3 = I_3^{I} k_{\text{пер}} = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ А} ;$$

$$I_4 = I_4^{I} k_{\text{пер}} = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ А} ;$$

$$I_5 = I_5^{I} k_{\text{пер}} = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ А} .$$