9. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов

9.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

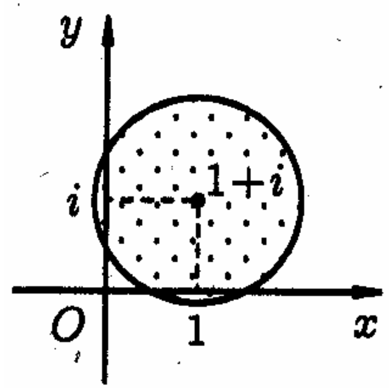
9.2. Вычисление интегралов
от функций вещественной переменной

9.3. Вычисление несобственных интегралов

Пример

Вычислить $\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$,

где L — окружность $|z-1-i| = \sqrt{2}$.



Решение

Функция $f(z)$ имеет в круге $|z-1-i| < \sqrt{2}$

простой полюс $z = i$ и полюс второго порядка $z = 1$

Решение

По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f(z);i) + \operatorname{Res}(f(z);1)\right) =$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^2(z+i)(z-i)} + \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'\right] =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)} + \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Вычисление интегралов от функций вещественной переменной

Определенный интеграл вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x; \cos x)\, dx$

с помощью замены $z = e^{ix}$ в некоторых случаях удается преобразовать в интеграл по замкнутому контуру $|z| = 1$ от функции комплексного переменного, к которому уже применима основная теорема о вычетах

$$z = e^{ix} \qquad dz = d(e^{ix}) = ie^{ix}dx = izdx$$

$$\cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

$$\oint\limits_{|z|=1} \mathrm{R}\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2z}\right)\frac{1}{iz}dz$$

Пример

Вычислить с помощью вычетов интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

Решение

Произведем замену $z = e^{ix}$

$$dz = d(e^{ix}) = ie^{ix}dx = izdx$$

$$\cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

Решение

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(3+2\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z^2+3z+1)^2} = I.$$

Решение

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+3z+1)^2}$$

В круге $|z|=1$ имеет полюс второго порядка $z_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\operatorname{Res}\left(f(z);\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\left(\left(z-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\frac{z}{\left(z-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\left(z-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-z}{\left(z+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

$$I=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{3}{5\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{25}\pi.$$

Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Если рациональная функция $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$

не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}R(a_k) \qquad (*)$$

где $a_1,a_2,\dots,a_n$ - полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней $(\operatorname{Im}z>0)$ полуплоскости

Пример

Вычислить $$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)}$$

Решение

Подынтегральная функция четная, поэтому

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)}.$$

Функция имеет числитель – многочлен нулевой степени, знаменатель – многочлен шестой степени.

Решение

$$R(z)=\frac{1}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)}$$

Полюсы $z=\pm i\sqrt{2},\quad z=\pm i\sqrt{3}$ функции лежат вне вещественной оси, причем в верхней полуплоскости лежат полюсы $z=i\sqrt{2}$ кратности два и $z=i\sqrt{3}$ - простой полюс

$$I=\frac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname{res}R\left(i\sqrt{2}\right)+\operatorname{res}R\left(i\sqrt{3}\right)\right)$$

Решение

Для простого полюса $z = i\sqrt{3}$ вычет равен

$$\operatorname{Res} R\left(i\sqrt{3}\right) = \lim_{z \to i\sqrt{3}} \frac{z - i\sqrt{3}}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)} = \lim_{z \to i\sqrt{3}} \frac{1}{\left(z^2+2\right)^2\left(z+i\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(-3+2\right)^2\left(i\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{i2\sqrt{3}}$$

Решение

Для полюса $z = i\sqrt{2}$ кратности два вычет равен

$$\operatorname{Res} R\left(i\sqrt{2}\right) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{\left(z - i\sqrt{2}\right)^2}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)} =$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \frac{1}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^2\left(z^2+3\right)} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} -\frac{2\left(z^2+3\right)+\left(z+i\sqrt{2}\right)\cdot 2z}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^3\left(z^2+3\right)^2} =$$

$$= -\frac{2(-2+3)+\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\cdot 2i\sqrt{2}}{\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3(-2+3)^2} = -\frac{3}{i8\sqrt{2}}$$

Решение

Подставляя $\operatorname{Res} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)$ и $\operatorname{Res} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)$ в формулу, получим

$$\boldsymbol{I} = \pi \boldsymbol{i}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}} - \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{i}\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{2}}}\right) = \frac{\pi\left(\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}\right)}{\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{6}}}$$

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$

Решение

$$\operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2i)^2} =$$

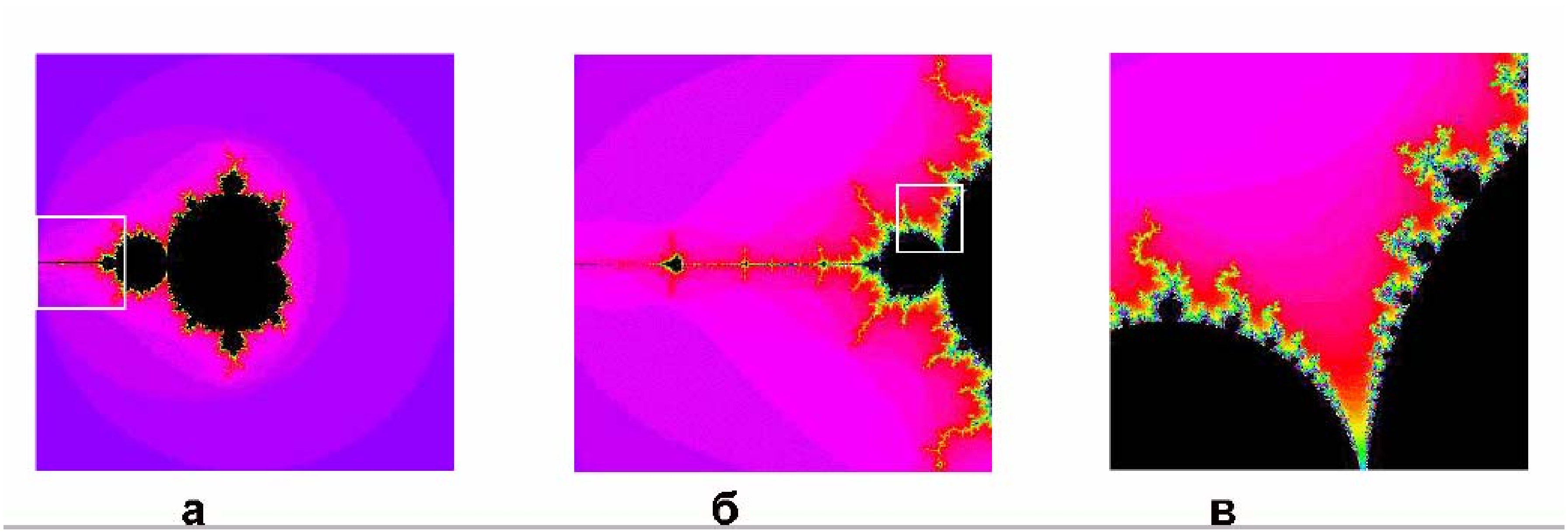
$$= \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = -\frac{2}{(4i)^3} = \frac{1}{32i}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

Множество Мандельброта и множество Жюлиа

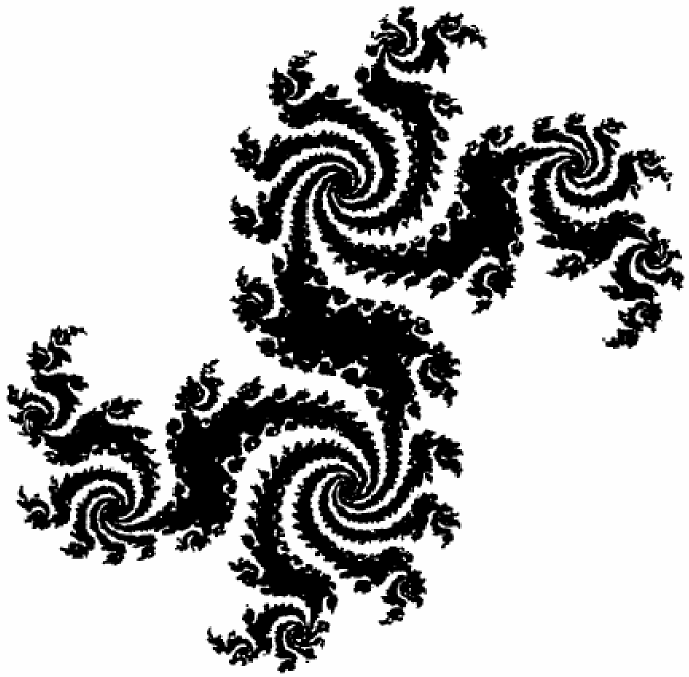
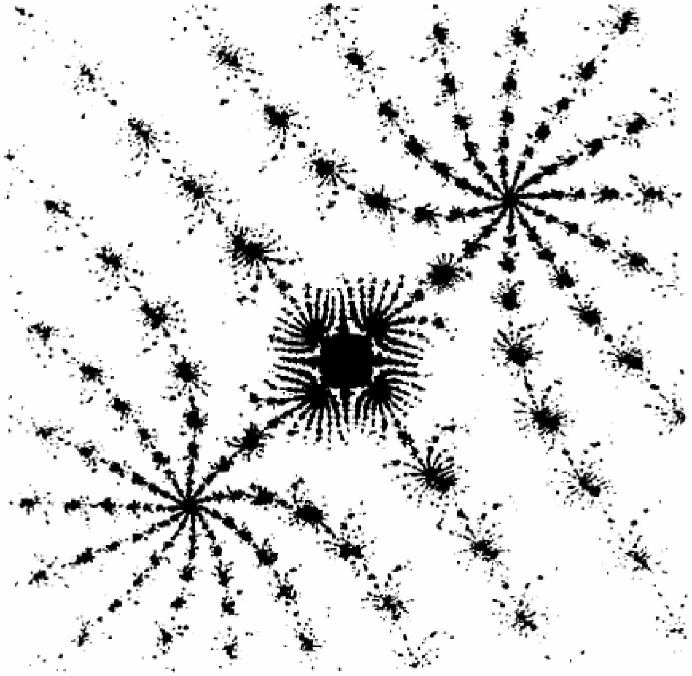
Дискретная динамическая система $z_{n+1} = z_n^2 + b$

Множество Мандельброта:
$z_0 = 0$, *параметр b - варьируется*



Дискретная динамическая система

Множество Жюлиа:
b - фиксировано, z_0 - *варьируется*

Приложение