8. Вычеты функции

Определение

Вычетом аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\,dz,$$

взятого в положительном направлении по любому замкнутому контуру L, содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 и лежащему в области аналитичности функции $f(z)$

Обозначение $\operatorname{Res} f(z_0)$, $\operatorname{Res}(f(z); z_0)$

Вычет функции

Если в формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

положить $n = -1$, то получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L f(z)\, dz \qquad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1},$$

вычет функции f(z) относительно изолированной особой точки z_0 равен коэффициенту при первом члене с отрицательным показателем в разложении функции f(z) в ряд Лорана

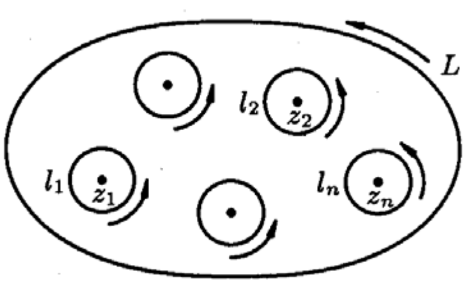
Теорема Коши о вычетах

Если функция *f(z)* является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром *L*, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = 1,2,..., n$), лежащих внутри области *D*, то

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$$

Доказательство

Вокруг каждой изолированной особой точки z_k опишем окружность l_k так, чтобы она целиком содержалась в области D, не содержала внутри других изолированных особых точек и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек.



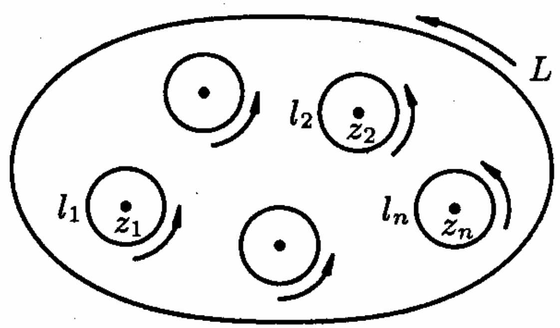
На основании теоремы Коши для многосвязной области

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_{l_1} f(z)\,dz + \oint_{l_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{l_n} f(z)\,dz,$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки

Доказательство

Согласно определению вычета



$$\oint_{l_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1),$$

$$\oint_{l_2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\oint_{l_n} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n).$$

Следовательно,

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) + \ldots + 2\pi i \operatorname{Res} f(z_n),$$

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Определение

Если $z = z_0$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то Res $f(z_0) = 0$.

В разложении Лорана в этих случаях отсутствует главная часть, поэтому $c_{-1} = 0$

Определение

Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0}.$$

или

$$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Замечание

Если функция *f(z)* является частным двух функций, аналитических в окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)},$$

и при этом

$$g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0)$$

$$\varphi(z_0) \neq 0,$$

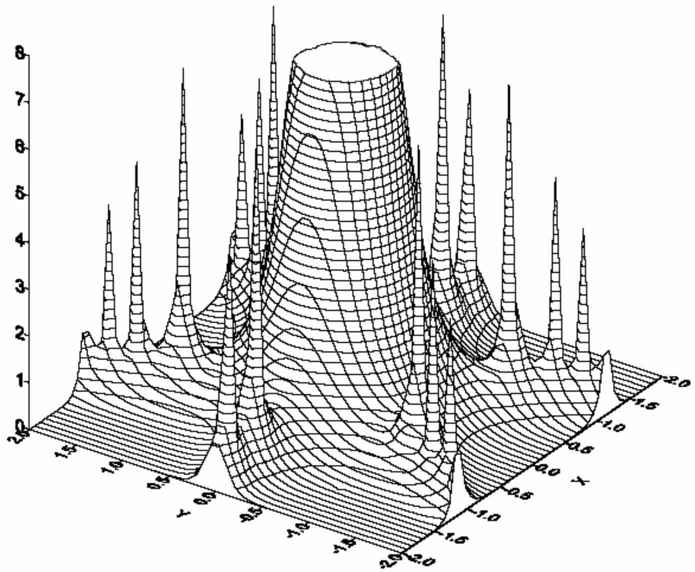
то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)},$$

Пример

$$F(z)=\frac{1}{\sin(z^3)}.$$

Функция имеет полюсы первого порядка, лежащие на действительной оси и двух лучах, наклонённых под углами 60 градусов к ней, в точках $\sqrt[3]{\pi k},\ k=0,\pm1,\ldots$



Модуль функции

В точке z = 0 три полюса сливаются вместе и образуют полюс третьего порядка.

Вычеты в простых полюсах

$$\operatorname{Res}\left[F(z),\sqrt[3]{\pi k}\right]=-\frac{(-1)^k}{3\sqrt[3]{\pi k}}.$$

Определение

Пусть точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$. Лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}.$$

Отсюда $(z-z_0)^m f(z)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}+c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}.$$

Формула для вычисления вычета

Дифференцируя последнее равенство (*m* -1) раз, получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) =$$

$$= (m-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+2)(z-z_0)^{n+1}.$$

Переходя к пределу, получаем формулу для вычисления вычета

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

Пример

Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 - z^4}$

Решение

Изолированные особые точки функции *f(z)*

$z_1 = 1$ — простой полюс

$z_2 = 0$ — полюс третьего порядка $(m = 3)$

$$\mathrm{Res}\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$\mathrm{Res}\ f(1) = \left.\frac{z+2}{(z^3 - z^4)'}\right|_{z=1} = \frac{1+2}{3-4} = -3$$

Решение

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

$$\operatorname{Res}\ f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-0)^3 \frac{z+2}{z^3-z^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+2}{1-z}\right) = \frac{1}{2} 6 = 3$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+2}{1-z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1-z+z+2}{(1-z)^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{3}{(1-z)^2}\right) = -3\frac{2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} = \frac{6}{(1-z)^3}$$

Пример

Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-3)}$

относительно полюса второго порядка $z = 2$

Решение

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\Big((z-2)^2 f(z)\Big) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\frac{1}{z-3} = \lim_{z\to 2} \frac{-1}{(z-3)^2} = -1$$

Вычет в существенно особой точке

Если точка z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$, то для вычисления вычета функции в этой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана

Пример

Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

в изолированной особой точке $z = 0$

Решение

Лорановское разложение данной функции в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

Из него находим $c_{-1} = 1$, т.е. Res $f(0) = 1$