3. Функции комплексного переменного

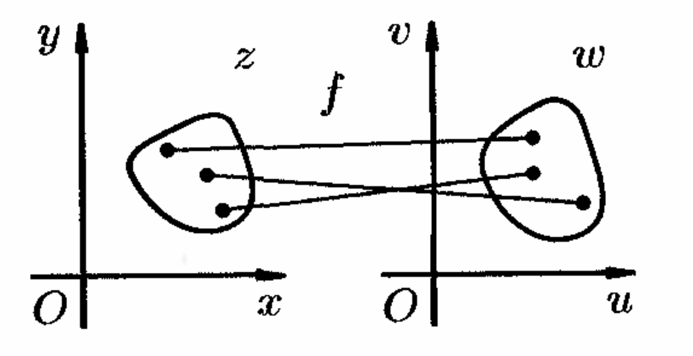
Введем два множества

Пусть даны два множества D и E, элементами которых являются комплексные числа.

Числа $z = x + iy$ множества D будем изображать точками комплексной плоскости z,
а числа $w = u + iv$ множества E – точками комплексной плоскости w

Определение

Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка) $w \in E$, то говорят, что на множестве определена однозначная функция комплексного переменного $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E



Определение

Множество D называется области определения функции $w = f(z)$.

Множество E_1 всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E, называется множеством значений этой функции; если же каждая точка множества E является значением функции, то E – область значений функции; в этом случае функция $f(z)$ отображает D на E

Определение

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений $w \in E$, то функция $w = f(z)$ называется многозначной

Замечание

Функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\operatorname{Re} f(z)} + i\,\underbrace{v(x,y)}_{\operatorname{Im} f(z)}.$$

Задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных

Далее, как правило, будем рассматривать такие функции $w = f(z)$, для которых множества D и E_1 являются областями

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$

Решение

Пусть $z = x + iy,\ \ w = u + iv,$

тогда функцию $w = z^2$ можно записать в виде

$$u + iv = \left(x + iy\right)^2,$$

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

т.е. действительная и мнимая части функции

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Определение

Функцию $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ можно геометрически представить как отображение множества D плоскости z на множество E плоскости w:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

Отображение называется взаимно однозначным (или однолистным) отображением D в E, если функция $w=f(z)$ однозначна на множестве D и при этом двум различным точкам $z_1,\ z_2 \in D$ соответствуют различные точки $w_1,\ w_2 \in E$

Определение

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0

Число w_0 называется пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0 (при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

Определение

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ \forall z: \ 0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Определение

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

если $\forall E > 0,\ E \in \mathbf{R}$, хоть и сколь угодно большого, $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall z:\ 0 < |z - z_0| < \delta$ соответствующие значения функции $|f(z)| > E$

Определение

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0,\ M \in \mathbf{R}\ \ \forall z : |z| > M \ \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$$

Теорема

Для того, чтобы (комплексное) число $A = a + ib$ было пределом функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы действительные функции имели предел в точке (x_0, y_0) и

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \operatorname{Re} A = a, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \operatorname{Im} A = b$$

Замечание

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного

Арифметические свойства пределов ФКП

Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A, \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B,$ тогда

1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[c_1 f(z) \pm c_2 g(z)\right] = c_1 A \pm c_2 B, \quad c_1, c_2 - const$

2. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot g(z)\right] = A\cdot B,$

3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}, \qquad B \neq 0$

Теорема

Пусть существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \quad (A \neq \infty)$$

Тогда в некоторой окрестности точки $z = z_0$ функция $f(z)$ ограничена: $\exists M > 0$ такое, что

$$|f(z)| \leq M$$

Эквивалентные определения непрерывности

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 2. Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0$.

Определение

- Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

- Непрерывная функция комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного

1. Линейная функция
2. Экспонента
3. Логарифмическая функция
4. Степенная функция
5. Общая показательная функция
6. Тригонометрические функции
7. Гиперболические функции
8. Обратные тригонометрические функции
9. Обратные гиперболические функции

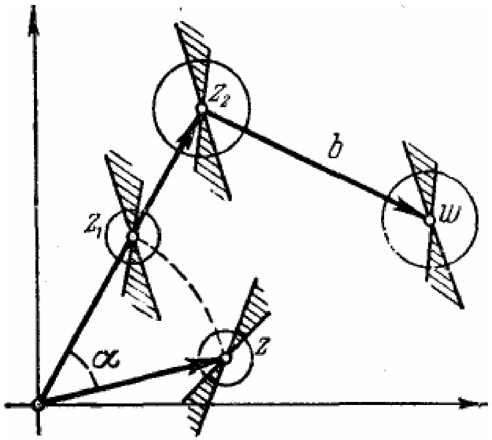
1. Линейная функция $w = az + b,\ a \neq 0,\ b \in \mathbf{C}$

Пусть $k = |a|, \quad \alpha = \operatorname{Arg} a,$ т.е. $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Представим *w* как сложную функцию, составленную из функций:

$$a)\ \ z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z,\quad b)\ z_2 = kz,\quad c)\ w = z_2 + b$$

Отображения a) и b) сводятся соответственно к повороту плоскости *z* на угол *α* и подобному преобразованию плоскости z_1 с коэффициентом подобия *k*. Отображение *c*) геометрически означает сдвиг всей плоскости z_2 на постоянный вектор b



Линейная функция $w = az + b, \ a \neq 0, \ b \in \mathbf{C}$

Отображение $w = az + b$ взаимно однозначно во всей плоскости, оно преобразует прямые в прямые (причем углы между двумя прямыми сохраняются) и окружности — в окружности

2. Экспонента

Функция $w = e^z$ определяется формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

- Если $y = 0$, то $e^z = e^{x+i0} = e^x$

- Положив x=0, получим формулу Эйлера

$$e^z = e^{0+iy} = \cos y + i\sin y$$

Свойство 1

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

По правилу умножения комплексных чисел

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) =$$

$$= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) =$$

$$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Свойство 2

Для функции $w = e^z$ имеем $\left|e^z\right| = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y.$

Следует из тригонометрической записи комплексного числа

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Свойства 3, 4

3. Функция e^z не обращается в нуль $\forall z : e^z \neq 0$

т.к. по свойству 2 имеем $\left|e^z\right| = e^x > 0 \quad \forall x.$

4. Функция e^z не всегда больше нуля.

Например, $e^{\pi i} = -1 < 0.$

Свойство 5

Выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ (x \to -\infty)}} e^z = 0,$$

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ (x \to +\infty)}} e^z = \infty$$

Свойство 6

Функция комплексного переменного имеет период $2\pi i$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

$$e^{\pm 2\pi i} = \cos 2\pi \pm i \sin 2\pi = 1$$

Изучение функции e^z на всей плоскости сводится к изучению ее в полосе $0<y<2\pi$.

Отображение однолистно в этой полосе

Экспонента

Рассмотрим отображение, задаваемое функцией

$$w = e^z, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv,$$

т.к. функция периодическая, то рассмотрим ее в полосе

$$0 < y < 2\pi.$$

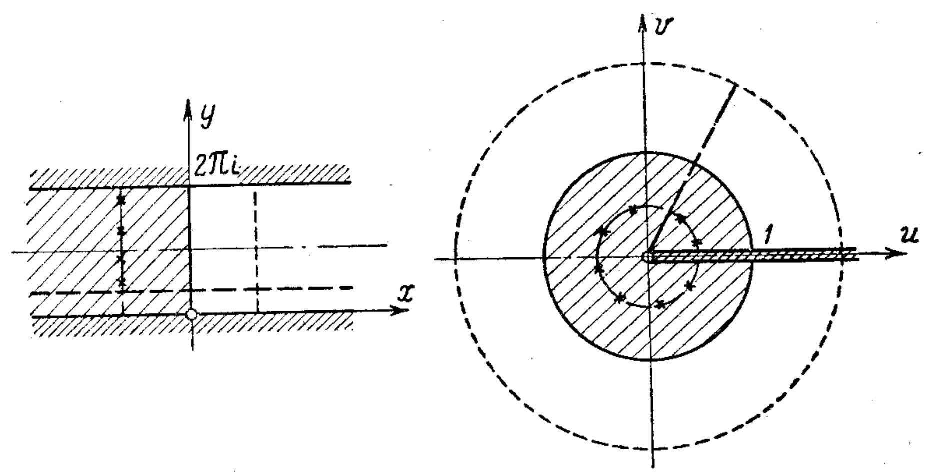
Введем в плоскости w полярные координаты $w = \rho e^{i\theta}$,

$$\rho e^{i\theta} = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow \rho = e^x, \theta = y,$$

т.о. отображение преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $\theta = y_0$
отрезки $x = x_0, 0 \le y < 2\pi$ – в окружности $\rho = e^{x_0}$

Экспонента

Полоса $0<y<2\pi$ преобразуется при этом в плоскость w с разрезом вдоль положительной полуоси, половина этой полосы $0<y<\pi$ - в верхнюю полуплоскость. Полосы $0<\mathrm{Im}\, z<h$ функция преобразует в углы $0 < \arg w < h$



3. Логарифмическая функция

Число w называется логарифмом комплексного числа $z \neq 0$, если $e^w = z$.

Обозначение $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Так как значения функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то число $z = 0$ логарифма не имеет

Алгебраическая форма записи логарифма

$$e^{w} = z \;\Rightarrow\; w = \mathrm{Ln}\, z$$

Положив $z = |z| e^{i \arg z}$, $w = u + iv$, получим

$$e^{u} \cdot e^{iv} = |z| e^{i \arg z} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} e^{u} = |z| \;\Rightarrow\; u = \ln|z|, \\ v = \arg z + 2\pi k,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{vmatrix}$$

$$w = \mathrm{Ln}\, z = u + iv = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),$$

где $-\pi < \arg z \le \pi$, $(0 \le \arg z < 2\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$w = \mathrm{Ln}\, z$ — многозначная функция

Главное значение логарифма

Однозначную ветвь функции $\mathrm{Ln}\, z$ можно выделить, подставив в формулу определенное значение k.

Положив $k = 0$, получим однозначную функцию, которую называют главным значением логарифма $\mathrm{Ln}\, z$ и обозначают символом $ln\, z$

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,$$

$$-\pi < \arg z \le \pi, \;\; (0 \le \arg z < 2\pi)$$

Арифметические свойства логарифма

$$1)\ \mathrm{Ln}\left(z_1\cdot z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2,$$

$$2)\ \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2,$$

$$3)\ \mathrm{Ln}\ z^n=n\,\mathrm{Ln}\,z,$$

$$4)\ \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z$$

Проверим

$$\mathrm{Ln}\left(z_1\cdot z_2\right)=\ \ln\left|z_1\cdot z_2\right|+i\,\mathrm{Arg}\left(z_1\cdot z_2\right)=$$

$$=\ln\left|z_1\right|+\ln\left|z_2\right|+i\left(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$$

4. Степенная функция $w = z^n$

Для натуральных n степенная функция определяется равенством

$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Это однозначная функция, определенная на всей комплексной плоскости

Степенная функция $w = z^n$

Если в плоскостях *z* и *w* ввести полярные координаты, положив $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, тогда

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi$$

Отображение сводится к повороту каждого вектора $z \neq 0$ на угол $(n—1)\arg z$ и растяжению его в $|z|^{n-1}$ раз.

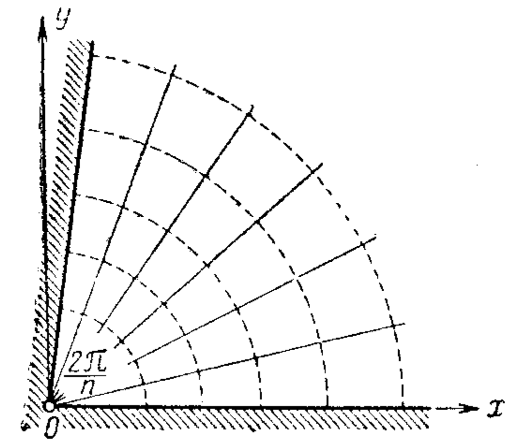
Точки z_1 и z_2 с равными модулями и аргументами, отличающимися на целое кратное $2\pi / n$, и только такие точки, переходят при отображении в одну точку. Для однолистности отображения *w* в некоторой области *D* необходимо и достаточно, чтобы *D* не содержала никаких двух точек z_1 и z_2 , связанных соотношениями

$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \neq 0)$$

Степенная функция $w = z^n$

Этому условию удовлетворяют секторы

$$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n} \quad (k = 0,1,\ldots n-1)$$



каждый из которых при отображении преобразуется в плоскость *w* с исключенной положительной полуосью. При этом все лучи с вершиной в точке *z* = 0 переходят в лучи с вершиной *w* = 0 (лишь повернутые на некоторый угол), а все дуги окружностей с центром *z* = 0 — в дуги окружностей с центром *w* = 0 (только, вообще говоря, другого радиуса). На рис. изображен прообраз в одном таком секторе плоскости z сетки полярных координат плоскости w

Степенная функция $n = \dfrac{1}{m}, \quad m \in N$

Если $n = \dfrac{1}{m}, \quad m \in N$, то

$$w = z^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{m}\right).$$

Это многозначная (m-значная) функция

Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав k определенное значение, например $k = 0$

Степенная функция $a = x + iy$

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = x + iy$ определяется равенством

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Эта функция определена для всех $z \neq 0$ и является многозначной функцией

Решим пример

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} =$$

$$= e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k},$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

При k=0 получим $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

5. Общая показательная функция

$$w = a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a},$$

т.к. $\mathrm{Ln}\,a = \ln|a| + i(\arg a + 2\pi k), \quad -\pi < \arg a \le \pi,$

то $w = a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a} = e^{z\ln|a| + zi\arg a} e^{i2\pi kz}$

показательная функция представляет собой множество однозначных функций, отличающихся друг от друга множителем

$$e^{i2\pi kz}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6. Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Свойства 1, 2

1. Функция *w=cos z* — четная,
   w=sin z, w=tg z, w=ctg z — нечетные функции.

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{+iz}}{2} = \cos z$$

2. Функции *cos z* и *sin z* имеют период $T = 2\pi$,
   функции *tg z* и *ctg z* имеют период $T = \pi$

$$\cos(z \pm 2\pi) = \frac{e^{i(z\pm 2\pi)} + e^{-i(z\pm 2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Свойство 3

Функция $w = \cos z$ обращается в нуль в точках $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$w = \sin z$ — в точках $z = \pi k$, k — произвольное целое число

Составим уравнение для нахождения нулей *sin z*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = 0$$

$$e^{2iz} = 1 \Rightarrow 2iz = 2k\pi i \Rightarrow z = k\pi$$

$$1 = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$$

Свойство 4

Для комплексных значений аргумента модули

$$|\sin z|, \quad |\cos z|$$

могут быть больше и меньше единицы

$$\cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 > 1, \ \cos 3i > 10.$$

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$
в комплексной плоскости z неограничены

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \quad \lim_{\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

Свойство 5

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы действительной тригонометрии

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z,$$

$$\sin\left(z_1 \pm z_2\right) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

Докажем первое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z =$$

$$= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} =$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

7. Гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями

$$\sin iz = i\,\mathrm{sh}\,z; \qquad \cos iz = \mathrm{ch}\,z;$$

$$\mathrm{sh}\,iz = i\sin z; \qquad \mathrm{ch}\,iz = \cos z;$$

$$\mathrm{tg}\,iz = i\,\mathrm{th}\,z; \qquad \mathrm{ctg}\,iz = -i\,\mathrm{cth}\,z;$$

$$\mathrm{th}\,iz = i\,\mathrm{tg}\,z; \qquad \mathrm{cth}\,iz = -i\,\mathrm{ctg}\,z.$$

Функции $sh\ z$ и $ch\ z$ периодические с периодом $2\pi i$, функции $th\ z$ и $cth\ z$ имеют период πi

8. Обратные тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad (z \neq \pm i),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}, \quad (z \neq \pm i).$$

Обратные тригонометрические функции являются многозначными функциями

Алгебраическое выражение для функции $w = \mathrm{Arcsin}\, z$

Используя определение синуса

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

имеем $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow \quad e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2 + 1}$

тогда $iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$

или $w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

$$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

9. Обратные гиперболические функции

$w = Arsh\, z$ (ареа-синус),

$w = Arch\, z$ (ареа-косинус),

$w = Arth\, z$ (ареа-тангенс),

$w = Arcth\, z$ (ареа-котангенс)

Выражение обратных гиперболических функций через логарифмические

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \quad (z \neq \pm 1),$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}, \quad (z \neq \pm 1).$$

Обратные гиперболические функции являются многозначными функциями

Например, $\operatorname{Arsh} i = \operatorname{Ln} i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) i$