2. Предел последовательности комплексных чисел

- Последовательность комплексных чисел
- Предел последовательности
- Арифметические свойства последовательностей

Определение

Последовательностью комплексных чисел называется перенумерованное бесконечное множество комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \ (n \in N).$$

Обозначение $\{z_n\}$.

Члены последовательности (элементы) располагаются в порядке следования их номеров

Определение

Комплексное число z называется предeлом последовательности $\{z_n\}$,

если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

$$\{z_n\} \to z, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Теорема

Пусть $z_n = x_n + y_n$.

Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\} \to z = a + ib$ является сходимость последовательностей действительных чисел $\{x_n\} \to a$ и $\{y_n\} \to b$

Доказательство теоремы. Необходимость

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z,$

тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такой, что $\forall\ n > N$: $|z_n - z| < \varepsilon$ или

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|x_n - a| \le \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon,$$

$$|y_n - b| \le \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Доказательство теоремы. Достаточность

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такой, что для $\forall\ n > N$:

$$\left|x_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|y_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|z_n - z\right| = \left|\left(x_n - a\right) + i\left(y_n - b\right)\right| \le$$

$$\le \left|x_n - a\right| + \left|y_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Замечания

- Из теоремы следует, что вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел эквивалентен вопросу о сходимости (двух) последовательностей действительных чисел
- Арифметические свойства действительных последовательностей без изменения переносятся на последовательности с комплексными членами

Арифметические свойства последовательностей с комплексными членами

Пусть $\{\eta_n\} \to a, \quad \{\varsigma_n\} \to b, \quad a, b \in \mathbf{C}$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\eta_n \pm \varsigma_n) = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n \cdot \varsigma_n = a \cdot b\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{\varsigma_n} = \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0)$$