

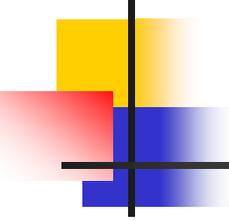
## 2. Предел последовательности комплексных чисел

---

- Последовательность комплексных чисел
- Предел последовательности
- Арифметические свойства последовательностей

---

Теория функций комплексного переменного



# Определение

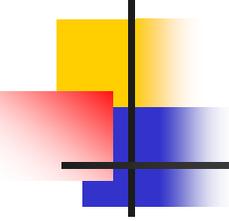
---

Последовательностью комплексных чисел называется перенумерованное бесконечное множество комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Обозначение  $\{z_n\}$ .

Члены последовательности (элементы) располагаются в порядке следования их номеров



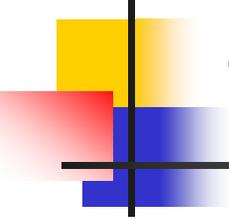
# Определение

---

Комплексное число  $z$  называется **пределом** последовательности  $\{z_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

$$\{z_n\} \rightarrow z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

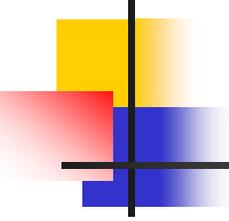


# Теорема

---

Пусть  $z_n = x_n + y_n \cdot i$ .

Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности  $\{z_n\} \rightarrow z = a + ib$  является сходимость последовательностей действительных чисел  $\{x_n\} \rightarrow a$  и  $\{y_n\} \rightarrow b$



## Доказательство теоремы. Необходимость

---

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ ,

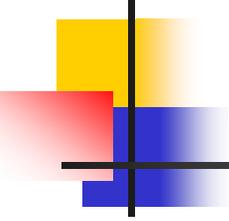
тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такой, что  $\forall n > N: |z_n - z| < \varepsilon$  или

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon,$$

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$



## Доказательство теоремы. Достаточность

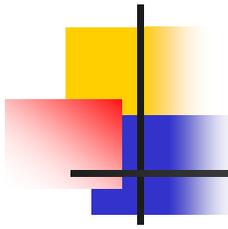
---

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ,

тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такой, что для  $\forall n > N$ :

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$



## Замечания

---

- Из теоремы следует, что вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел эквивалентен вопросу о сходимости (двух) последовательностей действительных чисел
- **Арифметические свойства** действительных последовательностей без изменения переносятся на последовательности с комплексными членами

# Арифметические свойства последовательностей с комплексными членами

Пусть  $\{\eta_n\} \rightarrow a$ ,  $\{\zeta_n\} \rightarrow b$ ,  $a, b \in \mathbf{C}$

тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n \pm \zeta_n) = a \pm b$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \cdot \zeta_n = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$