1. Комплексные числа

1.1. Комплексные числа. Основные понятия

1.2. Операции над комплексными числами

1.3. Понятие расширенной комплексной плоскости

1.4. Множества точек на комплексной плоскости

Задача, неразрешимая на множестве действительных чисел

Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник для вузов. - М.: Лань, 2006. - 432 с.

На множестве действительных чисел неразрешимо уравнение $x^2 + 1 = 0$.

Введем мнимую единицу $i^2 = -1$,

тогда уравнение будет иметь два корня: i и $-i$

Нахождение корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Определение

Комплексным числом z называется число вида

$$z = x + iy \ ,$$

где i — мнимая единица, $i^2 = -1$,

$x = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re} z$ — действительная часть,

$y = \operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть

Частные случаи

- Если $y = 0$, то $z = x + 0i$ считается совпадающим с действительным числом x .

- Если $x = 0$, то $z = 0 + yi$ называется чисто мнимым числом и обозначается iy

Пример

В электротехнике полное сопротивление цепи представляется в виде

$$R = R_a + iR_p$$

где R_a — активная составляющая,

R_p — реактивная составляющая

Определения

- Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

- Комплексное число $z = 0 + 0i$ называется нулем

$$z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$$

Определения

• Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется **сопряженным** комплексному числу $z = x + iy$.

Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называют **комплексно-сопряженными**

• Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены

Теорема

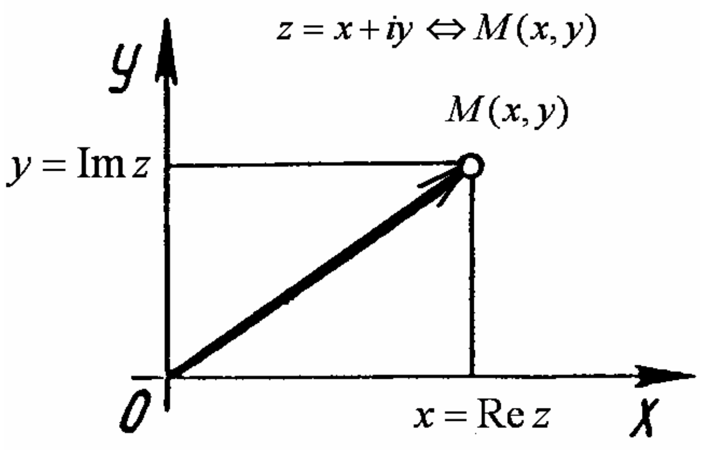
Всякое алгебраическое уравнение степени n с действительными или комплексными коэффициентами

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

разрешимо в поле комплексных чисел и имеет n корней (с учетом их кратностей)

Представление комплексных чисел в декартовых координатах

Каждому комплексному числу $x+iy$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку с координатами $M(x,y)$, а также радиус-вектор этой точки



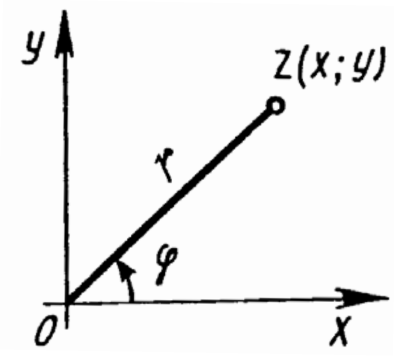
Определение

Плоскость Oxy, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью z. Ось абсцисс в плоскости z называется действительной осью, а ось ординат — мнимой осью

Представление комплексных чисел в полярных координатах

Полярный радиус r называется **модулем** комплексного числа z

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$



Угол φ называется **аргументом** комплексного числа

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

Модуль и аргумент комплексного числа

Модуль комплексного числа определяется однозначно, аргумент — с точностью до слагаемого $2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Главное значение аргумента обозначается $\varphi = \arg z$

$$-\pi < \varphi \le \pi \quad \text{или} \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Множество всех значений аргумента обозначается

$$A\mathrm{rg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Условие равенства двух комплексных чисел

Условие равенства двух комплексных чисел состоит, в том, что модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемыми, кратными 2π

Операции над комплексными числами

- Сложение комплексных чисел
- Вычитание комплексных чисел
- Умножение комплексных чисел
- Деление комплексных чисел
- Возведение в степень комплексного числа
- Извлечения корня из комплексного числа

Алгебраическая форма комплексного числа

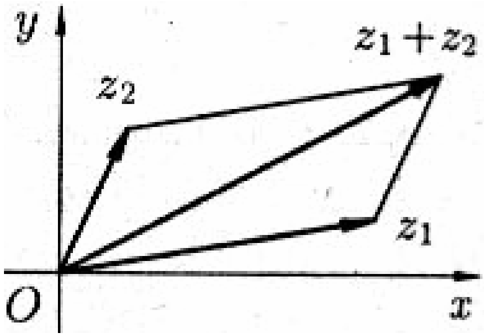
Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа z

Сумма комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) =$$

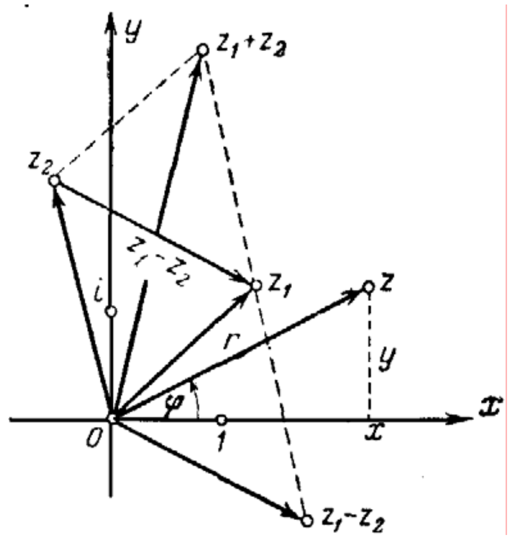
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbf{R}$$

Разность комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$



$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) =$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| =$$
$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Алгебраическая форма комплексного числа

Умножение комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 = \left| i^2 = -1 \right| =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) =$$

$$= x^2 + x y i - x y i - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

Деление комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \qquad (z_2 \neq 0)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

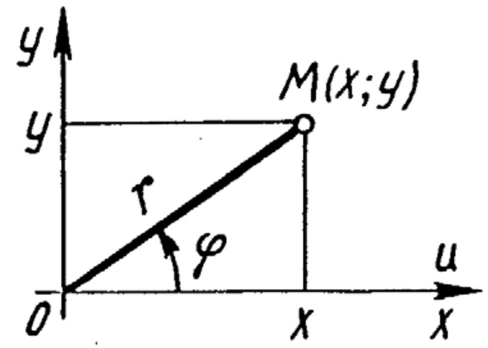
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Алгебраическая форма комплексного числа

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$x = r\cos\varphi$$

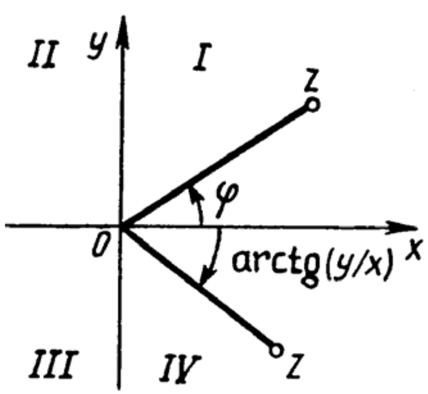
$$y = r\sin\varphi$$



$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

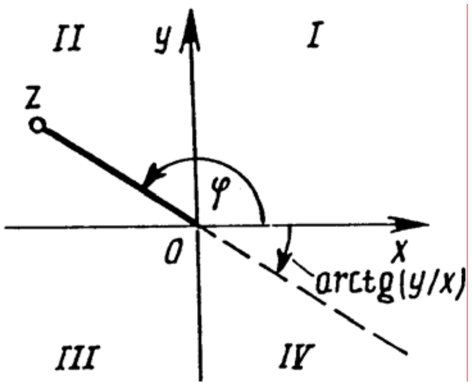
Главное значение аргумента $-\pi < \varphi \le \pi$ комплексного числа



I, IV четверти

$$\forall\, x > 0$$

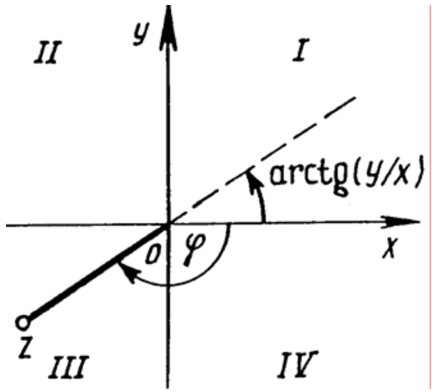
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$



II четверть

$$\forall\, x < 0,\quad y \ge 0$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$$



III четверть

$$\forall\, x < 0,\quad y < 0$$

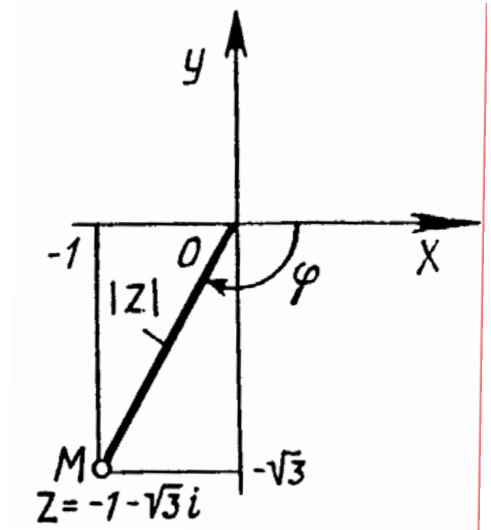
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi$$

Пример

Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=-1-i\sqrt{3}$
и изобразить его геометрически

Решение

Построим точку $M\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.



Найдем модуль и аргумент комплексного числа

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

$$z=-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

Произведение комплексных чисел

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\quad z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$

$$= r_1 r_2\left(\left(\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

Частное комплексных чисел

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\quad z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$$

Возведение в степень комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad n \in \mathbf{N}$$

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n}$$

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \Rightarrow$$

$$\left|z^n\right| = r^n,\quad \arg z^n = n\arg z$$

Формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Возведение в степень мнимой единицы

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1$$

$$i^{4k} = 1 \qquad k \in \mathbf{N}$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

Извлечение корня из комплексного числа

$$w = \sqrt[n]{z} - ? \qquad w^n = z, \qquad n \in \mathbf{N}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$\rho^n = r \;\; \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbf{N}$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Пример

Представить в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i,\ z_2 = 1 + i$

и найти $z_1 z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ z_1^2,\ \sqrt[3]{z_2}$

Решение

Запишем комплексное число $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$ в тригонометрической форме

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\; i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Решение (продолжение)

Представим комплексное число $z_2 = 1 + i$ в тригонометрической форме

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Решение (продолжение)

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

Решение (продолжение)

$$z_1^2 = 2^2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -2 - i\,2\sqrt{3}$$

Решение (продолжение)

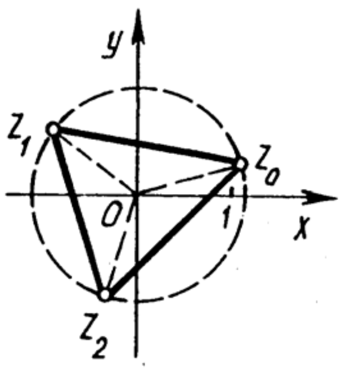
$$z_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(8k+1)\pi}{12} + i\,\sin\frac{(8k+1)\pi}{12}\right), \quad k = 0,\,1,\,2$$

$$k = 0 \qquad z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$k = 1 \qquad z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$k = 2 \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$



Показательная форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left(\frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} + i\frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}\right) = re^{i\varphi}$$

$$z = re^{i\varphi},$$

где $\quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

Операции над комплексными числами

$$z = re^{i\varphi}, \; z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

Умножение комплексных чисел

$$z \cdot z_1 = r \cdot r_1 e^{i(\varphi + \varphi_1)}$$

Деление комплексных чисел

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi_1}} = \frac{r}{r_1} e^{i(\varphi - \varphi_1)}, \qquad z_1 \neq 0$$

Операции над комплексными числами

$$z = re^{i\varphi} \qquad n \in \mathbf{N}$$

Возведение комплексного числа в степень

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Извлечение корня из комплексного числа

$$z_k = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Пример

Представить в показательной форме комплексные числа $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i, \;\; z = 1-i$

и найти $zz_1, \; \dfrac{z}{z_1}, \; z^{12}, \; \sqrt[5]{z}$

Решение

Запишем комплексное число $z = 1 - i$
в показательной форме

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \arg z = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Решение

Запишем комплексное число $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ в показательной форме

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \qquad \arg z_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Решение (продолжение)

$$z\,z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

Решение (продолжение)

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{-3\pi i} = -64$$

$$e^{-3\pi i} = \cos 3\pi - i \sin 3\pi = -1$$

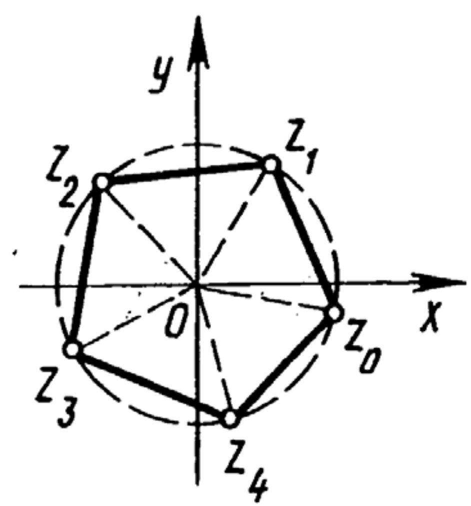
Решение (продолжение)

$$z_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[10]{2}\ e^{i\left(\frac{2}{5}k\pi - \frac{\pi}{20}\right)}, \qquad k = 0, \ldots, 4$$

$$z_0 = \sqrt[10]{2}\ e^{-i\frac{\pi}{20}} \qquad z_1 = \sqrt[10]{2}\ e^{i\frac{7\pi}{20}}$$

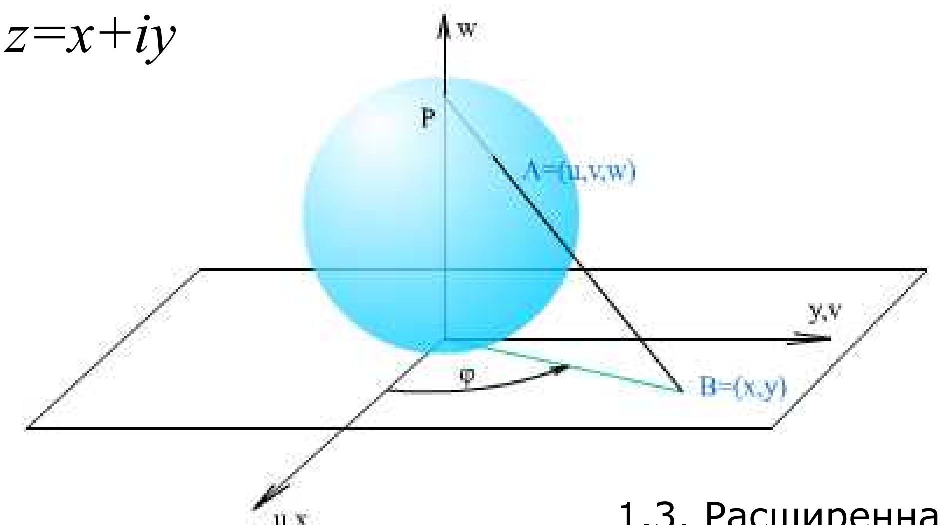
$$z_2 = \sqrt[10]{2}\ e^{i\frac{3\pi}{20}} \qquad z_3 = \sqrt[10]{2}\ e^{i\frac{23\pi}{20}}$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2}\ e^{i\frac{31\pi}{20}}$$



Стереографическая проекция

Отождествим комплексную плоскость $\mathbf{C}$ с плоскостью $w = 0$ в R^3 и произвольную точку $z=x+iy$ плоскости соединим лучом с точкой $P = (0, 0, 1)$. Точку пересечения $A = (u, v, w)$ сферы S с лучом будем считать геометрическим изображением числа $z=x+iy$



Определение

Исключая из рассмотрения точку P,
заметим, что между точками сферы и плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это соответствие называется стереографической проекцией

Определение

- Комплексная плоскость $\mathbf{C}$ с добавленной к ней бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется расширенной комплексной плоскостью.

- Окрестностью бесконечно удаленной точки называется внешность круга достаточно большого радиуса $|z| > R$

Замечания

Расширенной комплексной плоскости
при стереографической проекции соответствует полная сфера

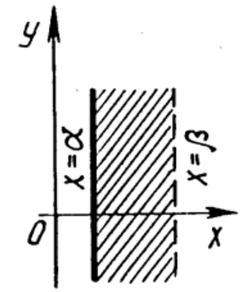
Можно показать, что прямые и окружности из $\mathbf{C}$
переходят в окружности на S,
углы между пересекающимися кривыми сохраняются

Определим, геометрическое место точек плоскости, заданных следующими условиями

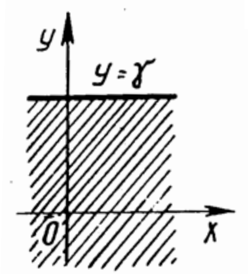
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{C}$

1. $\operatorname{Re} z = \alpha \quad \Leftrightarrow x = \alpha$

2. $\alpha \le \operatorname{Re} z < \beta \quad \Leftrightarrow \alpha \le x < \beta$



3. $\operatorname{Im} z \le \gamma \quad \Leftrightarrow y \le \gamma$

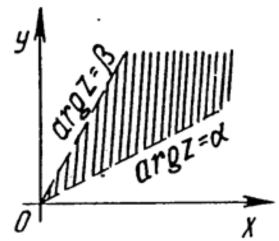


Определим, геометрическое место точек плоскости, заданных следующими условиями

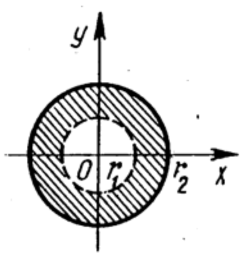
$$\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{C}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbf{R}^+$$

4. $\alpha < \arg z < \beta$



5. $r_1 < |z| \le r_2 \Leftrightarrow r_1^2 < x^2 + y^2 \le r_2^2$

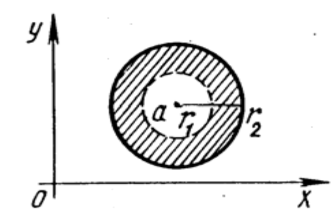


Определим, геометрическое место точек плоскости, заданных следующими условиями

$$z, a \in \mathbf{C},\ \ a = x_0 + iy_0$$
$$r,\ r_1,\ r_2 \in \mathbf{R}^+$$

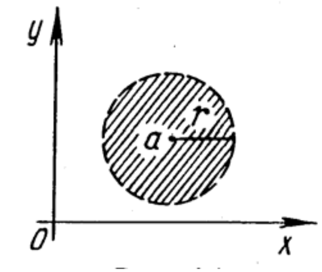
6. $r_1 < |z-a| \le r_2$

$$\Leftrightarrow r_1^2 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r_2^2$$



7. $|z-a| < r$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r$$



Определим, какая кривая задается уравнением $|z+c|+|z-c|=2a, \quad a, c \in \mathbf{R}^+$

Решение

$|z+c|$ – расстояние между точками z и $-c$,

$|z-c|$ – расстояние между точками z и c.

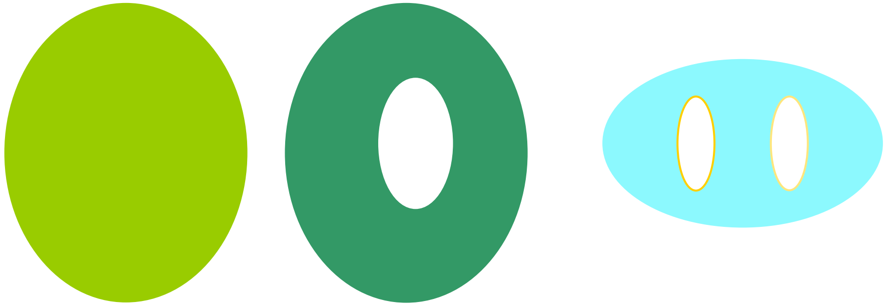
Сумма расстояний от точки z до двух данных точек есть величина постоянная, значит, точка z лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \text{где} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

Основные геометрические понятия

Областью комплексной плоскости называется множество D точек плоскости, обладающих следующими свойствами:

- вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки (свойство открытости);
- любые две точки D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности)



Определения

- Точка *z* называется внутренней точкой множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью
- Под ε-окрестностью точки z_0 комплексной плоскости понимается множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$

Определение

- Граничной точкой области D называют такую точку, которая сама не принадлежит D, но в любой ε-окрестности которой лежат точки этой области.

- Совокупность граничных точек области D называется границей этой области.

- Область D с присоединенной к ней границей называют замкнутой областью.

- Множество $|z| \leq 1$ – замкнутое

Определение

Множество D называется n - связным множеством, если граница его состоит из n связных частей, не имеющих общих точек

Замечание

Односвязная область имеет границу, состоящую из одной связной части, то есть из одной кривой или точки; многосвязную область можно представить себе как односвязную, из которой удалены некоторые части множества, то есть имеются вырезы, разрезы, проколы

Пример. Являются ли множества областями?

1) $1<|z|<2$ – открытое круговое кольцо с центром в начале координат.

2) $|z+i|<3$ – открытый круг с центром в точке $-i$ радиуса 3.

Эти множества являются областями