Нахождение оригинала по изображению

• Нахождение оригинала с помощью теории вычетов

• Нахождение оригинала с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа

Схема курса

ОРИГИНАЛ → ИЗОБРАЖЕНИЕ → ОРИГИНАЛ

Преобразование Лапласа

Теория вычетов

СВОЙСТВА

1. Линейность
2. Подобие
3. Запаздывание
4. Смещение
5. Дифференцирование оригинала
6. Дифференцирование изображения
7. Интегрирование оригинала
8. Интегрирование изображения
9. Умножение изображений
10. Умножение оригиналов

ТАБЛИЦА
оригинал-изображение

ПРИЛОЖЕНИЯ

Линейные дифференциальные уравнения

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема раздела

ИЗОБРАЖЕНИЕ → ОРИГИНАЛ

НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦЫ И СВОЙСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Теорема обращения преобразования Лапласа

Если $f(t)$ – оригинал, являющийся дополнительно на каждом отрезке кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной функцией, то в любой точке своей непрерывности $f(t)$ равна

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

где интеграл вычисляется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\,p=\gamma>s_0$ и понимается в смысле главного значения,
s_0 – показатель роста оригинала $f(t)$

Первая теорема разложения

Если функция $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $p=\infty$, $F(\infty)=0$ и имеет в ее окрестности лорановское разложение вида

$$F(p)=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots+\frac{c_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

то оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t)=c_0+\frac{c_1}{1!}t+\frac{c_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{c_n}{n!}t^n+\ldots$$

Пример

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению (условия теоремы выполнены)

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin\frac{1}{p}$$

Решение

Разложим функцию в ряд

$$F(p)=\frac{1}{p}\cdot\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{3!}\frac{1}{p^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{p^5}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{5!}\frac{1}{p^6}-\ldots$$

Переходя к оригиналу, получим

$$f(t)=t-\frac{1}{3!}\frac{t^3}{3!}+\frac{1}{5!}\frac{t^5}{5!}-\ldots, \qquad (t>0)$$

Пример

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригинал *f(t),* соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Решение

Разложим функцию в ряд

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \ldots,$$

$$\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1, \text{ т. е. } |p| > 1.$$

Переходя к оригиналу, получим

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots,$$

$$f(t) = \cos t,\ t > 0$$

Вторая теорема разложения

Пусть изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ (дробь правильная и несократимая),

где $A(p), B(p)$ - многочлены от p ,

$p_1, p_2, \dots, p_n$ - полюсы этой функции (простые или кратные),

тогда оригинал дроби имеет вид

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)} \div f(t)=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[F(p_k)e^{p_k t}\right]$$

Вторая теорема разложения. Случай кратных корней

Корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ знаменателя $B(p)$ имеют кратности $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[F(p_k)e^{p_k t}\right]$$

$$\operatorname{res}\left[F(p_k)e^{p_k t}\right] = \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}}\left[(p - p_k)^{m_k} e^{pt} \frac{A(p)}{B(p)}\right]$$

Вторая теорема разложения. Случай простых корней

Корни $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ знаменателя $B(p)$ простые

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

Нахождение оригинала по изображению

- Нахождение оригинала с помощью теории вычетов
- Нахождение оригинала с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа

Теорема

Каждая правильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей четырех видов

1. $\dfrac{A}{p-a}$

2. $\dfrac{A}{(p-a)^k}, \quad k \in N, \; k \geq 2$

3. $\dfrac{Bp+C}{p^2+bp+c}, \quad b^2-4c<0$

4. $\dfrac{Bp+C}{\left(p^2+bp+c\right)^k}, \quad b^2-4c<0, \; k \in N, \; k \geq 2$

Соответствие изображений и оригиналов

1. $$\frac{A}{p-a} \div Ae^{at}$$

2. $$\frac{A}{\left(p-a\right)^k} \div \; Ae^{at}\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Продолжение

3. $$\frac{Bp+C}{p^2+bp+c}=\frac{Bp+C}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}}=\left|\ \frac{b}{2}=a,\quad c-\frac{b^2}{4}=\omega^2\right|=$$

$$=\frac{Bp+C}{(p+a)^2+\omega^2}=\frac{B(p+a)+C-Ba}{(p+a)^2+\omega^2}=$$

$$=B\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}+\frac{(C-Ba)}{\omega}\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\frac{Bp+C}{p^2+bp+c}\ \div\ Be^{-at}\cos\omega t+\frac{C-Ba}{\omega}e^{-at}\sin\omega t$$

Пример

Найти оригинал *f(t),* соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{2}{p(p^2+2p-8)}$$

Решение. Способ 1

Свойство линейности и таблица изображений

$$F(p)=\frac{2}{p(p^2+2p-8)}=\frac{2}{p(p+4)(p-2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+4}+\frac{C}{p-2}$$

$$2=A(p+4)(p-2)+Bp(p-2)+Cp(p+4)$$

$$p=0\ \Rightarrow 2=-8A\ \Rightarrow A=-\frac{1}{4},\quad p=2\ \Rightarrow 2=12C\ \Rightarrow C=\frac{1}{6}$$

$$p=-4\ \Rightarrow 2=24B\ \Rightarrow B=-\frac{1}{12}$$

$$F(p)=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{p}-\frac{1}{12}\ \frac{1}{p+4}+\frac{1}{6}\ \frac{1}{p-2}\div f(t)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}e^{-4t}+\frac{1}{6}e^{2t}$$

Способ 2

По второй теореме разложения $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$

$$A = 2,\ B = p^3 + 2p^2 - 8p,\ B' = 3p^2 + 4p - 8$$

$p = 0,\ p = 2,\ p = -4$ - простые корни знаменателя

$$f(t) = -\frac{2}{8}e^{0t} + \frac{2}{24}e^{-4t} + \frac{2}{12}e^{2t} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы …

Пример

Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы …

Решение. Способ 1

Свойство линейности и таблица изображений

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} =$$

$$= \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \div \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t = f(t)$$

Способ 2

Применим вторую теорему разложения

$$A(p) = p - 3,\ B(p) = p^2 + 4,\ B'(p) = 2p,$$

корни знаменателя $p_1 = 2i,\ p_2 = -2i$

$$f(t) = \frac{2i-3}{2\cdot 2i}e^{2it} + \frac{-2i-3}{2(-2i)}e^{-2it} =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2i(e^{2it} + e^{-2it}) - 3(e^{2it} - e^{-2it})\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2i(\cos 2t + i\sin 2t + \cos 2t - i\sin 2t) - 3(\cos 2t + i\sin 2t - \cos 2t + i\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{1}{4i}(4i\cos 2t - 6i\sin 2t) = \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t = f(t).$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы …

Пример

Найти оригинал, если изображение

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}.$$

Решение. Способ 1

Применим вторую теорему разложения

$$A(p) = 1,\ B(p) = p^3(p-1),\ B'(p) = 4p^3 - 3p^2,$$

p_1=1 - простой корень знаменателя,

p_2=0 - кратный корень (m=3)

$$f(t) = \frac{1}{4-3}\cdot e^{1\cdot t} + \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\cdot(p-0)^3\right)'' =$$

$$= e^t + \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)'' = \ldots = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1,$$

Способ 2

Применим свойство линейности и таблицу изображений

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p-1}$$

$$f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t$$

Способ 3

Изображение представим в виде произведения

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{p-1}, \text{ где } \frac{1}{p^3} \div \frac{t^2}{2} \text{ и } \frac{1}{p-1} \div e^t,$$

По теореме о свертке

$$F(p) \div \int_0^t \frac{1}{2}\tau^2 e^{t-\tau}\, d\tau = \left[\begin{array}{l|l} u = \tau^2 & du = 2\tau\, d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\, d\tau & v = -e^{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{t-\tau}\tau^2 \Big|_0^t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^t \tau e^{t-\tau}\, d\tau = \left[\begin{array}{l|l} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^{t-\tau}\, d\tau & v = -e^{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 0 + \left(-\tau \cdot e^{t-\tau}\right)\Big|_0^t - e^{t-\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}t^2 - t + 0 - 1 + e^t = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 = f(t)$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы …