

Нахождение оригинала по изображению

- Нахождение оригинала с помощью теории вычетов
- Нахождение оригинала с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа

Схема курса

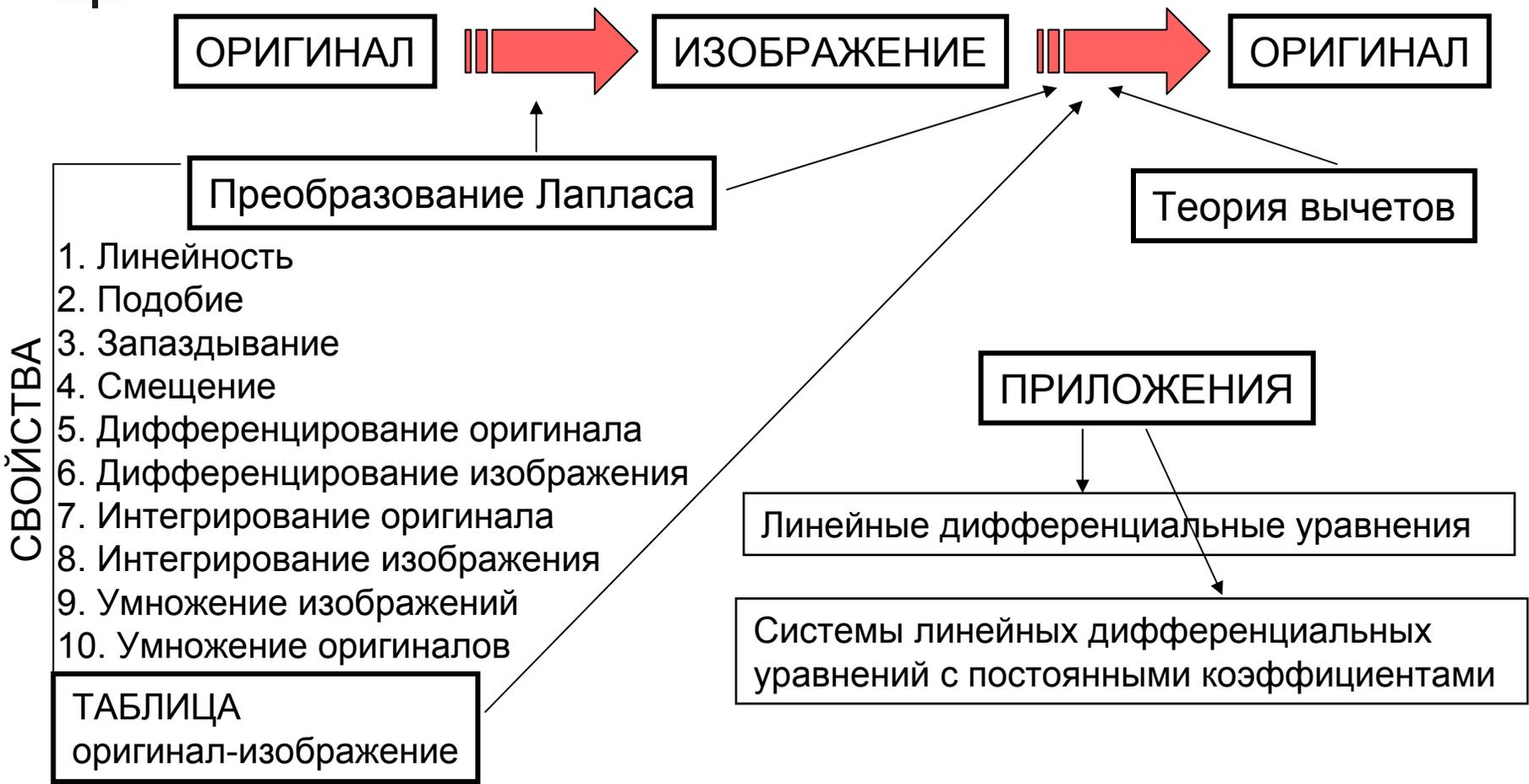
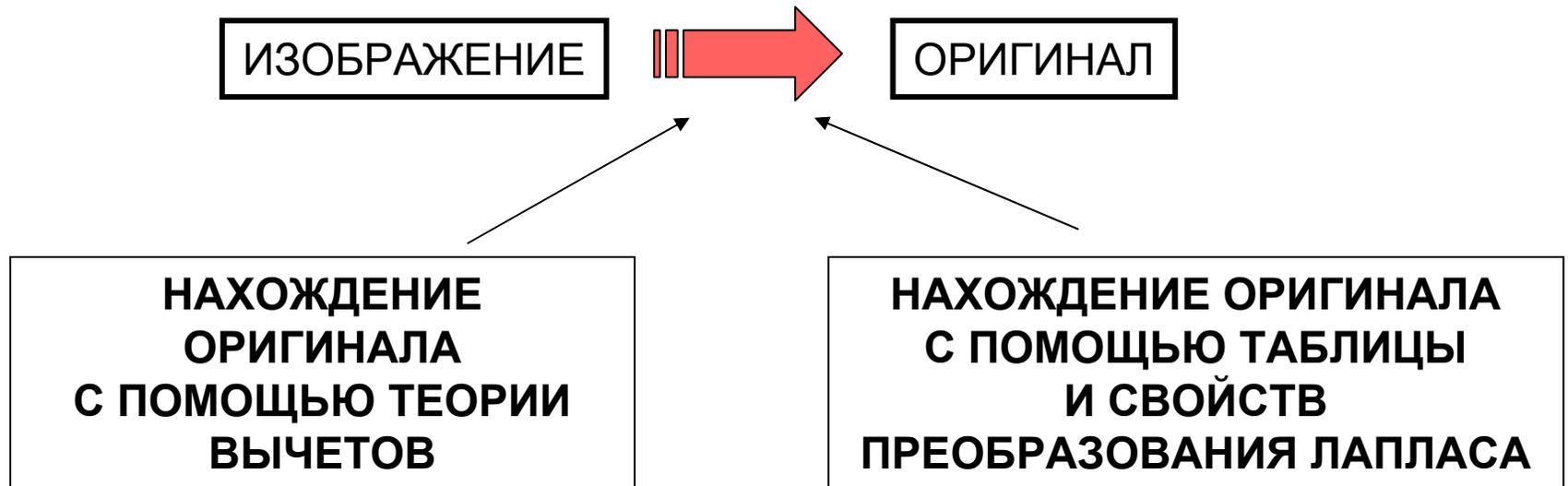
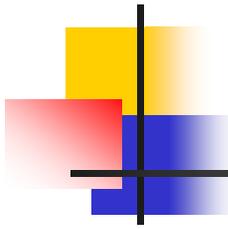


Схема раздела



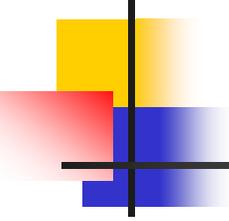


Теорема обращения преобразования Лапласа

Если $f(t)$ – оригинал, являющийся дополнительно на каждом отрезке кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной функцией, то в любой точке своей непрерывности $f(t)$ равна

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

где интеграл вычисляется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = \gamma > s_0$ и понимается в смысле главного значения, s_0 – показатель роста оригинала $f(t)$



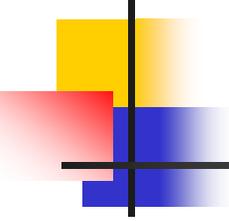
Первая теорема разложения

Если функция $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $p = \infty$, $F(\infty) = 0$ и имеет в ее окрестности лорановское разложение вида

$$F(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots + \frac{c_n}{p^{n+1}} + \dots$$

то оригиналом $F(p)$ служит функция

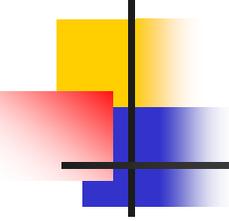
$$f(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{c_n}{n!} t^n + \dots$$



Пример

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению (условия теоремы выполнены)

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p}$$



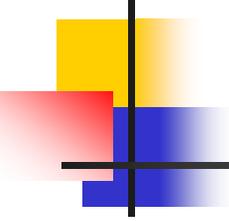
Решение

Разложим функцию в ряд

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} \cdot \sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3!} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{p^5} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{p^4} + \frac{1}{5!} \frac{1}{p^6} - \dots \end{aligned}$$

Переходя к оригиналу, получим

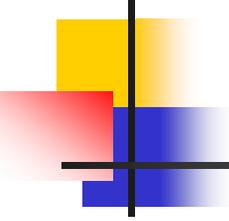
$$f(t) = t - \frac{1}{3!} \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{5!} \frac{t^5}{5!} - \dots, \quad (t > 0)$$



Пример

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$



Решение

Разложим функцию в ряд

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{p^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \dots\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \dots, \end{aligned}$$

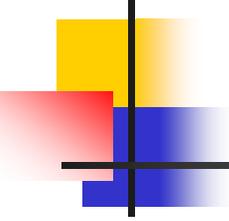
Переходя к оригиналу, получим

$$\left|\frac{1}{p^2}\right| < 1, \text{ т. е. } |p| > 1.$$

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots,$$

$$f(t) = \cos t, \quad t > 0$$

Нахождение оригинала с помощью теории вычетов



Вторая теорема разложения

Пусть изображение $F(p)$ является

дробно-рациональной функцией $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$

(дробь правильная и несократимая),

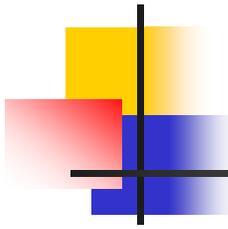
где $A(p), B(p)$ - многочлены от p ,

p_1, p_2, \dots, p_n - полюсы этой функции (простые или кратные),

тогда оригинал дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[F(p_k) e^{p_k t} \right]$$

Нахождение оригинала с помощью теории вычетов



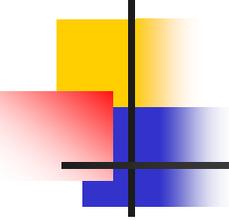
Вторая теорема разложения. Случай кратных корней

Корни p_1, p_2, \dots, p_n знаменателя $B(p)$ имеют кратности m_1, m_2, \dots, m_n

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[F(p_k) e^{p_k t} \right]$$

$$\operatorname{res} \left[F(p_k) e^{p_k t} \right] = \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left[(p - p_k)^{m_k} e^{pt} \frac{A(p)}{B(p)} \right]$$

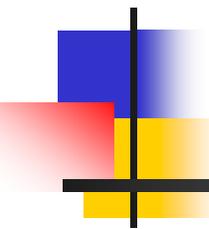
Нахождение оригинала с помощью теории вычетов



Вторая теорема разложения. Случай простых корней

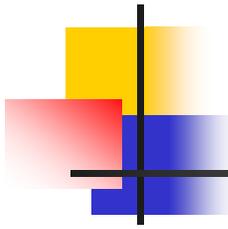
Корни p_1, p_2, \dots, p_n знаменателя $B(p)$ простые

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$



Нахождение оригинала по изображению

- Нахождение оригинала с помощью теории вычетов
- Нахождение оригинала с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа



Теорема

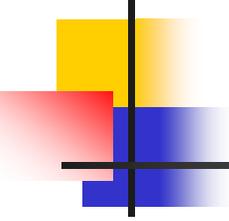
Каждая правильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей четырех видов

1. $\frac{A}{p-a}$ 2. $\frac{A}{(p-a)^k}, k \in N, k \geq 2$

3. $\frac{Bp+C}{p^2+bp+c}, b^2-4c < 0$

4. $\frac{Bp+C}{(p^2+bp+c)^k}, b^2-4c < 0, k \in N, k \geq 2$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...

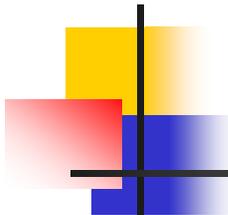


Соответствие изображений и оригиналов

1. $\frac{A}{p-a} \div Ae^{at}$

2. $\frac{A}{(p-a)^k} \div Ae^{at} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$

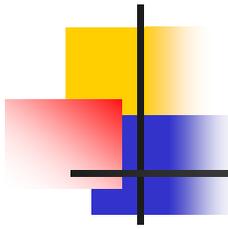
Нахождение оригинала с помощью таблицы ...



Продолжение

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{Bp + C}{p^2 + bp + c} &= \frac{Bp + C}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} = \left| \frac{b}{2} = a, \quad c - \frac{b^2}{4} = \omega^2 \right| = \\ &= \frac{Bp + C}{(p + a)^2 + \omega^2} = \frac{B(p + a) + C - Ba}{(p + a)^2 + \omega^2} = \\ &= B \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2} + \frac{(C - Ba)}{\omega} \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2} \\ \frac{Bp + C}{p^2 + bp + c} &\div Be^{-at} \cos \omega t + \frac{C - Ba}{\omega} e^{-at} \sin \omega t \end{aligned}$$

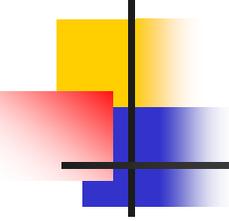
Нахождение оригинала с помощью таблицы ...



Пример

Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 2p - 8)}$$



Решение. Способ 1

Свойство линейности и таблица изображений

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 2p - 8)} = \frac{2}{p(p+4)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p-2}$$

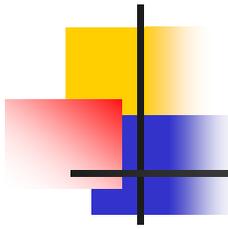
$$2 = A(p+4)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p+4)$$

$$p=0 \Rightarrow 2 = -8A \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, \quad p=2 \Rightarrow 2 = 12C \Rightarrow C = \frac{1}{6}$$

$$p=-4 \Rightarrow 2 = 24B \Rightarrow B = -\frac{1}{12}$$

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} - \frac{1}{12} \frac{1}{p+4} + \frac{1}{6} \frac{1}{p-2} \div f(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...



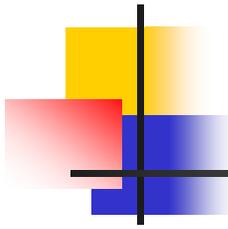
Способ 2

По второй теореме разложения $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$

$$A = 2, B = p^3 + 2p^2 - 8p, B' = 3p^2 + 4p - 8$$

$p = 0, p = 2, p = -4$ - простые корни знаменателя

$$f(t) = -\frac{2}{8}e^{0t} + \frac{2}{24}e^{-4t} + \frac{2}{12}e^{2t} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t}$$

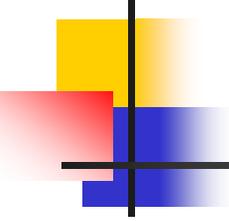


Пример

Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{p - 3}{p^2 + 4}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...

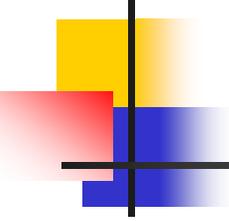


Решение. Способ 1

Свойство линейности и таблица изображений

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{p^2+4} = \\ &= \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} \div \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t) \end{aligned}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...



Способ 2

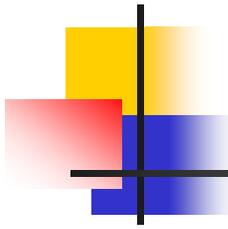
Применим вторую теорему разложения

$$A(p) = p - 3, B(p) = p^2 + 4, B'(p) = 2p,$$

корни знаменателя $p_1 = 2i, p_2 = -2i$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2i - 3}{2 \cdot 2i} e^{2it} + \frac{-2i - 3}{2(-2i)} e^{-2it} = \\ &= \frac{1}{4i} (2i(e^{2it} + e^{-2it}) - 3(e^{2it} - e^{-2it})) = \\ &= \frac{1}{4i} (2i(\cos 2t + i \sin 2t + \cos 2t - i \sin 2t) - 3(\cos 2t + i \sin 2t - \cos 2t + i \sin 2t)) = \\ &= \frac{1}{4i} (4i \cos 2t - 6i \sin 2t) = \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t = f(t). \end{aligned}$$

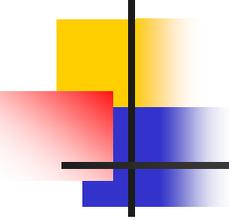
Нахождение оригинала с помощью таблицы ...



Пример

Найти оригинал, если изображение

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}.$$



Решение. Способ 1

Применим вторую теорему разложения

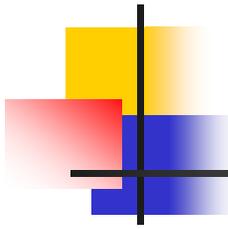
$$A(p) = 1, B(p) = p^3(p - 1), B'(p) = 4p^3 - 3p^2,$$

$p_1=1$ - простой корень знаменателя,

$p_2=0$ - кратный корень ($m=3$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4-3} \cdot e^{1 \cdot t} + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p^3(p-1)} e^{pt} \cdot (p-0)^3 \right)'' = \\ &= e^t + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt}}{p-1} \right)'' = \dots = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1, \end{aligned}$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...

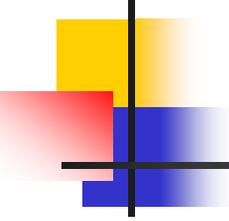


Способ 2

Применим свойство линейности и таблицу изображений

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p-1}$$

$$f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t$$



Способ 3

Изображение представим в виде произведения

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{p-1}, \text{ где } \frac{1}{p^3} \div \frac{t^2}{2} \text{ и } \frac{1}{p-1} \div e^t,$$

По теореме о свертке

$$F(p) \div \int_0^t \frac{1}{2} \tau^2 e^{t-\tau} d\tau = \left[\begin{array}{l} u = \tau^2 \\ dv = e^{t-\tau} d\tau \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2\tau d\tau \\ v = -e^{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{t-\tau} \tau^2 \Big|_0^t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = \left[\begin{array}{l} u = \tau \\ dv = e^{t-\tau} d\tau \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = d\tau \\ v = -e^{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} t^2 + 0 + (-\tau \cdot e^{t-\tau}) \Big|_0^t - e^{t-\tau} \Big|_0^t = -\frac{1}{2} t^2 - t + 0 - 1 + e^t = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 = f(t)$$

Нахождение оригинала с помощью таблицы ...