Интеграл Лапласа
и его основные свойства

- Преобразование Лапласа
- Свойства преобразования Лапласа

Схема курса

ОРИГИНАЛ → ИЗОБРАЖЕНИЕ → ОРИГИНАЛ

Преобразование Лапласа

Теория вычетов

СВОЙСТВА

1. Линейность
2. Подобие
3. Запаздывание
4. Смещение
5. Дифференцирование оригинала
6. Дифференцирование изображения
7. Интегрирование оригинала
8. Интегрирование изображения
9. Умножение изображений
10. Умножение оригиналов

ТАБЛИЦА
оригинал-изображение

ПРИЛОЖЕНИЯ

Линейные дифференциальные уравнения

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Свойство линейности

Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений

$$f_1(t) \div F_1(p) \quad f_2(t) \div F_2(p) \qquad \Rightarrow$$

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

где c_1, c_2 - комплексные постоянные

Доказательство

По определению

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div \int_0^\infty \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) e^{-pt} dt =$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt =$$

$$= c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

Примеры

По свойству линейности с учетом формулы $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$ найдем изображения

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{Re} p > \left|\operatorname{Im} \omega\right|$$

Примеры

Используя формулы Эйлера, свойство линейности и формулу $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$, найдем изображения

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} = \frac{\dfrac{1}{p-\omega} - \dfrac{1}{p+\omega}}{2} \div \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\operatorname{Re} p > \left|\operatorname{Re}\omega\right|$$

$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \frac{\dfrac{1}{p-\omega} + \dfrac{1}{p+\omega}}{2} \div \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

Пример

По свойству линейности с учетом формулы $\cos\omega t \div \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ найдем изображение произведения

$$\cos\alpha t\cos\beta t = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)t+\cos(\alpha+\beta)t\right]\div$$

$$\div\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(\alpha-\beta)^2}+\frac{p}{p^2+(\alpha+\beta)^2}\right)=\frac{p\left(p^2+\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(p^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2}.$$

2. Теорема подобия

Если $f(t) \div F(p), \quad \forall a = const > 0,$

то $f(at) \div \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число a приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Справедлива следующая форма

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \div aF(ap)$$

Доказательство

По определению

$$f(at) \div \int_0^{\infty} f(at)e^{-pt}dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = at \\ du = a\,dt \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(u)e^{-p\frac{u}{a}}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Пример

Найдем изображение $\cos \omega t$

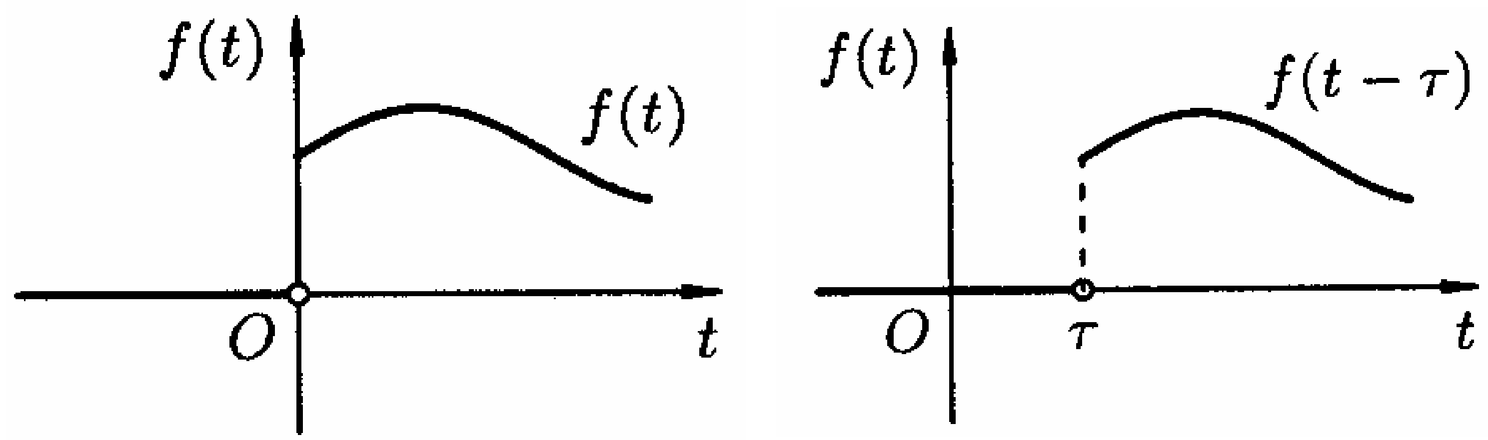
с учетом формулы $\cos t \div \dfrac{p}{p^2 + 1}$

Решение

$$\cos \omega t \div \frac{1}{\omega} \frac{\dfrac{p}{\omega}}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

3. Теорема запаздывания

Графики функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо



Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$ начинается с опозданием τ

Теорема запаздывания (сдвига)

Если $f(t) \div F(p)$, то

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0$$ (число)

$$\left(f(t-\tau) = 0, \; t-\tau < 0 \right)$$

т.е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$

Теорема запаздывания является удобным средством построения изображений кусочно-непрерывных функций-оригиналов

Доказательство

По определению

$$f(t-\tau) \div \int_0^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-pt}\,dt = \left| \begin{array}{l} t-\tau = t_1, \quad dt = dt_1 \\ t = 0 \Rightarrow t_1 = -\tau \\ t = \infty \;\Rightarrow t_1 = \infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}\,dt_1 = \int_0^\infty f(t_1)e^{-p\tau}\cdot e^{-pt_1}\,dt_1 =$$

$$\left(f(t-\tau) = 0,\; t-\tau < 0 \right)$$

$$= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = e^{-p\tau}F(p).$$

Следствие

Совместное применение теорем подобия и запаздывания

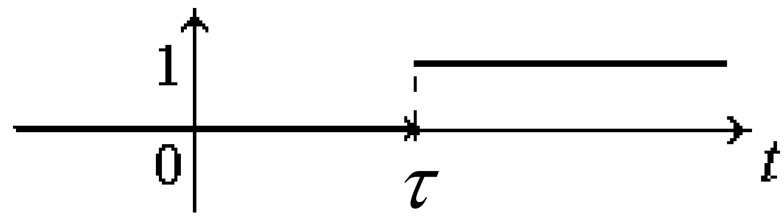
Если $f(t) \div F(p)$, то

$$f(at-b) \div \frac{1}{a}\, e^{-\frac{b}{a}p} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a>0, \ \ b>0$$

$$\left(f(at-b)=0, \ \ at-b<0 \right)$$

Обобщенная единичная функция (обобщенная функция Хевисайда)

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\ge\tau,\\ 0, & t<\tau\end{cases}$$



Если $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}$, то $\eta(t-\tau) \div \dfrac{1}{p} e^{-p\tau}$

Запишем функцию $g(t)=\begin{cases} f(t-\tau) & \text{при } t\geqslant\tau,\\ 0 & \text{при } t<\tau\end{cases}$

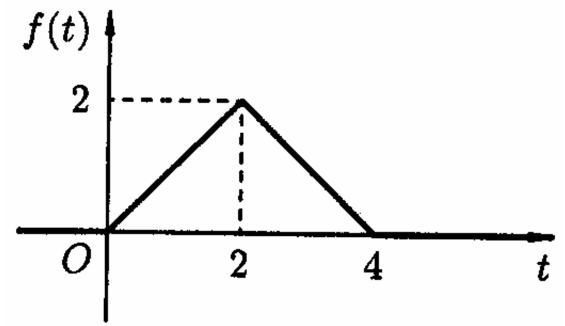
в виде

$$g(t)=f(t-\tau)\,\eta(t-\tau)$$

3. Теорема запаздывания

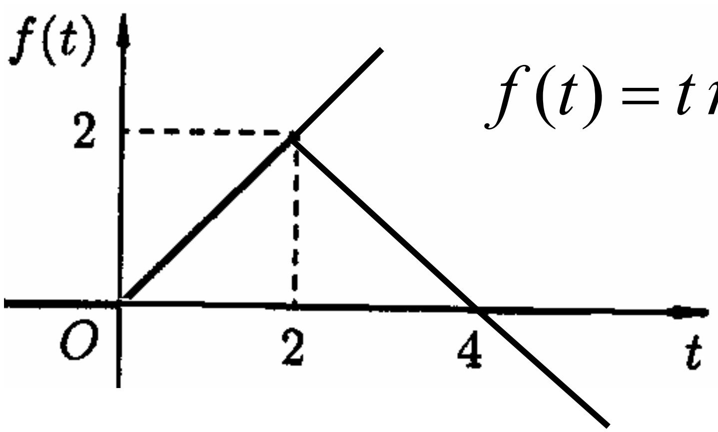
Пример. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\ t\geqslant 4,\\ t & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 2,\\ 4-t & \text{при } 2<t<4\end{cases}$$



Решение

$$f(t)=t\,\eta(t)-\underline{t\,\eta(t-2)}\ +(4-t)\,\eta(t-2)-\underline{(4-t)\,\eta(t-4)}$$



$$f(t)=t\,\eta(t)-2(t-2)\,\eta(t-2)+(t-4)\,\eta(t-4)$$

$$f(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}-2\cdot\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p}$$

3. Теорема запаздывания

4. Теорема смещения (затухания)

Теорема смещения является двойственной к теореме запаздывания

Если $f(t) \div F(p) \qquad \Rightarrow$

$$e^{at} f(t) \div F(p-a), \quad a = const \text{ (комплексное число)}$$

т.е. умножение оригинала на e^{at}
влечет за собой смещение переменной p на a

Доказательство

По определению

$$e^{at} f(t) \div \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)t} f(t) dt = F(p-a), \operatorname{Re}\left(p-a\right) > s_0$$

Примеры

$$\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\cos \omega t \div \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t \div \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\operatorname{ch} \omega t \div \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

$$e^{at} \sin \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$$

$$e^{at} \cos \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

$$e^{at} \operatorname{sh} \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$$

$$e^{at} \operatorname{ch} \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$$

Пример

Найти оригинал по его изображению

$$F(p)=\frac{2p-5}{p^2-6p+11}.$$

Решение

$$F(p)=\frac{2p-5}{p^2-6p+11}=\frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2}=$$

$$=2\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2}\div$$

$$\div\,2\cdot e^{3t}\cdot\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{3t}\sin\sqrt{2}t=f(t).$$

5. Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \div F(p)$ и функции $f'(t),\ f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \div p \cdot F\left(p\right) - f\left(0\right),\ f\left(0\right) = \lim_{t \to +0} f\left(t\right);$$

$$f''(t) \div p^2 \cdot F\left(p\right) - p \cdot f\left(0\right) - f'\left(0\right),$$

$$f'''(t) \div p^3 \cdot F\left(p\right) - p^2 \cdot f\left(0\right) - p \cdot f'\left(0\right) - f''\left(0\right),\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F\left(p\right) - p^{n-1} \cdot f\left(0\right) - \ldots - f^{(n-1)}\left(0\right),$$

где $f^{(k)}\left(0\right) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}\left(t\right),\ \ k = 1, \ldots, n-1, \quad \operatorname{Re} p > s_0$

Доказательство

По определению изображения находим

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}\,dt \\ dv = f'(t)\,dt & v = f(t) \end{array}\right] =$$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = -f(0) + pF(p).$$

где $\left|f(t)e^{-pt}\right| < Me^{s_0 t}e^{-st} = Me^{-(s-s_0)t} \Rightarrow$

$$f(t)e^{-pt}\Big|_{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-pt} = 0,\;\; s - s_0 > 0$$

$$f(t)e^{-pt}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to+0} f(t)e^{-pt} = f(0)$$

Продолжение

Распространим правило дифференцирования
на производные высших порядков.
Повторно применение правила дифференцирования
оригинала дает

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)' \div p\left(p \cdot F(p) - f(0)\right) - f'(0) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \div p\left(p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)\right) - f''(0) = p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0)$$

$$f^{(n)}(t) = \left(f^{(n-1)}(t)\right)'$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = 1, \ldots, n-1, \qquad \operatorname{Re} p > s_0$$

Замечание

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности используется при решении линейных дифференциальных уравнений и позволяет заменить операцию дифференцирования более простой – операцией умножения изображения на степени комплексного переменного p

Частный случай дифференцирования оригинала

Если производная n-го порядка непрерывна в точке t=0, то

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

и справедливы формулы

$$f'(t) \div p \cdot F(p),$$

$$f''(t) \div p^2 \cdot F(p),$$

$$f'''(t) \div p^3 \cdot F(p), \ \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n \cdot F(p), \operatorname{Re} p > s_0$$

Пояснение

Если $f(t)$ непрерывна при t=0, тогда $f(t)$=0 ,
т.к. $f(t)$=0 при t<0 по определению оригинала,
поскольку функция непрерывна при t=0,
то предел слева равен пределу справа

$$\lim_{t\to -0} f\left(t\right) = \lim_{t\to +0} f\left(t\right) = f\left(0\right) = 0$$

Пример

Дано $\quad \operatorname{sh}at \div \dfrac{a}{p^2 - a^2}, \ \operatorname{sh}0=0$

По формуле $\quad f'(t) \div p \cdot F(p)$

имеем

$$\operatorname{ch}at = \frac{1}{a}(\operatorname{sh}at)' \div \frac{1}{a} p \cdot \frac{a}{p^2 - a^2} = \frac{p}{p^2 - a^2}, \ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$$

Пример. Найти изображение выражения

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2,$$

$$x(0) = 3,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = -2.$$

Решение

Пусть $x(t) \div X(p) = X$

$$x'(t) \div p \cdot X - 3, \qquad x''(t) \div p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0,$$

$$x'''(t) \div p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2, \qquad 2 = 2 \cdot 1 \div \frac{2}{p}.$$

$$x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \div$$

$$\div\ p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}.$$

6. Дифференцирование изображения

Если $f(t) \div F(p), \ \operatorname{Re} p = s > s_0$, то

$$F'(p) \div -t \cdot f(t)$$
$$F''(p) \div (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t)$$
$$\ldots$$
$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$$

т.е. дифференцированию изображения соответствует умножение его оригинала на $(-t)$

Доказательство

Согласно теореме существования изображения $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Следовательно, у нее существует производная любого порядка.

Дифференцируя интеграл в преобразовании Лапласа по параметру p получим

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \right)'_p = \int_0^\infty \left(f(t) \cdot e^{-pt} \right)'_p dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \left(-t \cdot f(t) \right) e^{-pt}\, dt \doteqdot -t \cdot f(t),$$

Продолжение

$$F'(p) \div -t \cdot f(t).$$

$$F''(p) = \left(F'(p)\right)' \div -t\left(-t \cdot f(t)\right) = t^2 \cdot f(t),$$

$$F'''(p) \div -t\left(t^2 \cdot f(t)\right) = -t^3 \cdot f(t)$$

....

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

Пример. Найти изображения функции

1. $f(t) = t^n, \;\; n \in \mathbf{N}$

Имеем $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0$

тогда по свойству дифференцирования изображения получим

$$t \div -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}, \operatorname{Re} p > 0$$

$$t^n \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0$$

Пример

2. $f(t) = e^{at} t^n \qquad n \in \mathbf{N}$

По свойству смещения $e^{at} \cdot t^n \div \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$

3. $f(t) = t \sin \omega t$

$$\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \right)'_p \div -t \sin \omega t$$

$$t \sin \omega t \div \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$$

Пример

4. $$t\cos\omega t \div \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$$

5. $$t\,\mathrm{sh}\,\omega t \div \frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$$

6. $$t\,\mathrm{ch}\,\omega t \div \frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$$

Пример

7. $$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t \div \frac{2\omega(p-a)}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$$

8. $$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t \div \frac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$$

7. Интегрирование оригинала

Если $f(t) \div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \ \operatorname{Re} p > s_0$$

т.е. операция интегрирования оригинала соответствует операции деления его изображения на величину p

Доказательство

Покажем, что функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ является оригиналом.

Первые два условия выполняются (проверить), третье следует из оценки

$$\left|g(t)\right| \le \int\limits_0^t \left|f(\tau)\right| d\tau \le M \int\limits_0^t e^{s_0\tau} d\tau = \frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t} - 1\right)$$

Пусть $\varphi(t) \div \Phi(p)$.

По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p), \quad \varphi(0) = 0$$

С другой стороны

$$\varphi'(t) = \left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)_t' = f(t) \div F(p) \Rightarrow \; F(p) = p\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

Пример

Имеем $\eta(t) \div \dfrac{1}{p}, \ \mathrm{Re}\, p > 0$

тогда по свойству интегрирования оригинала получим

$$\int_0^t 1\, d\tau = t \div \frac{1}{p^2},$$

$$\int_0^t \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2} \div \frac{1}{p^3}, \ldots,$$

$$\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = \frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}} \ \Rightarrow \ t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$$

8. Интегрирование изображения

Если $f(t) \div F(p), \operatorname{Re} p > s_0,$

и $\dfrac{f(t)}{t}$ является оригиналом, тогда

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q)dq$$

где $\displaystyle\int_p^\infty F(q)dq = \lim_{\operatorname{Re} B \to +\infty} \int_p^B F(q)dq$

т.е. операции интегрирования изображения соответствует деление оригинала на величину t

Доказательство

Пусть $\dfrac{f(t)}{t} \div \Phi(p)$, тогда
по свойству дифференцирования изображения
имеем $$\Phi'(p) \div (-t)\frac{f(t)}{t} = -f(t)$$

По условию теоремы $f(t) \div F(p)$,
тогда $-\Phi'(p) \div F(p)$, т.е. $\Phi(p)$ есть некоторая первообразная для функции $-F(p)$, $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} \Phi(p) = 0$

$$-\int\limits_p^\infty F(q)dq = \Phi(\infty) - \Phi(p) = -\Phi(p) \div -\frac{f(t)}{t}$$

Пример

Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$

и интегрального синуса $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$

Решение

- По свойству интегрирования изображения

$$\sin t \div \frac{1}{p^2+1},\quad \frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{1}{q^2+1}dq = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}p$$

- По свойству интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \div \frac{\pi}{2p} - \frac{\mathrm{arctg}p}{p}$$

9. Умножение изображений

Напомним, что свёртка двух функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ определяется равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau$$

Определение

Свёртка двух функций-оригиналов $f_1(t),\ \ f_2(t)$ определяется равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$$

поскольку

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t-\tau)=0 \quad \left(t-\tau<0 \Rightarrow \tau>t\right), \\ f_2(\tau)=0 \quad \left(\tau<0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le \tau \le t$$

Свёртка оригиналов является оригиналом

Свойства свёртки

- Свойство коммутативности

$$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

- Свойство ассоциативности

$$\big(f(t)*g(t)\big)*h(t)=f(t)*\big(g(t)*h(t)\big)$$

- Свойство дистрибутивности

$$\big(f(t)+g(t)\big)*h(t)=f(t)*h(t)+g(t)*h(t)$$

Теорема умножения изображений (теорема о свёртке)

Если $f_1(t) \div F_1(p),\ f_2(t) \div F_2(p),$

$s_1,\ s_2$ - показатели роста функций-оригиналов $f_1(t),\ f_2(t),$

тогда в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sup\{s_1, s_2\}$ произведению изображений соответствует свёртка оригиналов

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

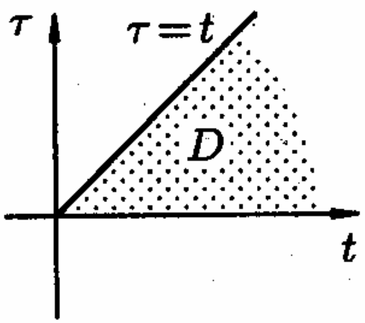
Доказательство

Функция $\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Запишем ее преобразование Лапласа

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\right) e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$



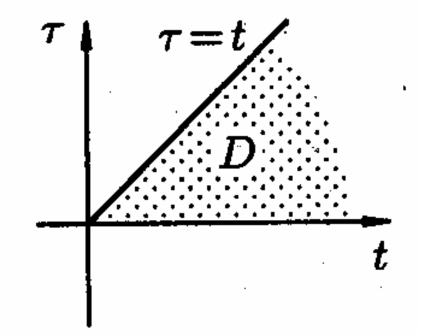
Область D интегрирования полученного двукратного интеграла определяется условиями $0 \leqslant t < \infty,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t$

Продолжение

Изменим порядок интегрирования

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \div \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t-\tau = t_1, \quad dt = dt_1 \\ t = \tau \Rightarrow t_1 = 0 \\ t = \infty \Rightarrow t_1 = \infty \end{array} \right| =$$



$$= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty f_2(t_1) e^{-pt_1}\,dt_1 = F_1(p)\cdot F_2(p)$$

Пример. Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

Изображение представим в виде произведения

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)} \cdot \frac{1}{(p^2+\omega^2)}$$, где $$\frac{1}{p^2+\omega^2} \div \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega t,$$

По теореме умножения найдем

$$F(p) \div \int_0^t \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega\tau \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2} \cdot \int_0^t \left(\cos\omega(2\tau - t) - \cos\omega t\right) d\tau = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{2\omega} \cdot \sin\omega(2\tau - t)\Big|_0^t - \cos\omega t \cdot \tau\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cdot \cos\omega t)$$

Теорема

Пусть функции $f_1(t),\ f_2(t)$ - оригиналы, непрерывно дифференцируемые на интервале $(0, \infty)$, $f_1(t) \div F_1(p),\ f_2(t) \div F_2(p)$ и $f_1'(t)$ также является оригиналом, то

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

Эта формула называется формулой Дюамеля

Доказательство

Преобразуем левую часть формулы

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_1(0) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p),$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \big(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\big) \cdot F_2(p) + f_1(0) \cdot F_2(p).$$

Продолжение

Первое слагаемое в правой части есть произведение изображений, соответствующих оригиналам

$$f_1'(t)\ \left(f_1'(t) \div p \cdot F_1(p) - f_1(0)\right) \text{ и } f_2(t).$$

На основании свойства умножения изображений и линейности

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) \cdot f_2(t)$$

или

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

Замечание

На основании свойства коммутативности свертки формулу Дюамеля можно записать в виде

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\, d\tau + f_2(t) \cdot f_1(0).$$

Формула Дюамеля применяется при интегрировании линейных дифференциальных уравнений

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $F(p) = \dfrac{2p^2}{(p^2+1)^2}$.

Изображение представим в виде произведения

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}$$

где $\dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t, \quad \dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t,$

На основании формулы Дюамеля

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq 2\int_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t.$$

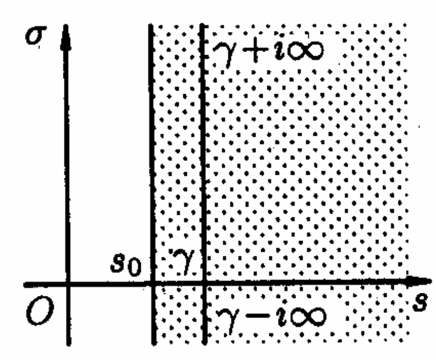
10. Умножение оригиналов

Если $f_1(t) \div F_1(p),\ \ f_2(t) \div F_2(p),$ то

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \ \div \ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(z) F_2(p - z) dz,$$

путь интегрирования — вертикальная прямая $Re\, z = \gamma > s_0$

s_0 - показатель роста произведения



Сводка правил операционного исчисления

Дано $f(t) \div F(p),\ \ f_1(t) \div F_1(p),\ \ f_2(t) \div F_2(p)$

1. Линейность $\quad c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$

2. Подобие $\quad f(a\,t) \div \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right),\ a > 0$

3. Запаздывание $\quad f(t - \tau)\ \div\ e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0$

4. Смещение $\quad e^{at} f(t) \div F(p - a),\ \ a = const$

Продолжение

5. Дифференцирование оригинала

$$f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0), \;\; f(0) = \lim_{t \to +0} f(t), \;\; \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^{n} \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t), \;\; k = 1, \ldots, n-1, \quad \operatorname{Re} p > s_0$$

6. Дифференцирование изображения

$$F'(p) \div -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \div (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t), \;\; \ldots,$$

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$$

Продолжение

7. Интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}$

8. Интегрирование изображения $\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(q)dq$

9. Умножение изображений

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \div \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

10. Умножение оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \div \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz$$

Таблица изображений

$f(t)$	$F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$
$t^n,\ \ n\in N$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(p)$
t	$\dfrac{1}{p^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$