Лекция 15

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ (3)

Ротор поля

Ротором векторного поля

$$\boldsymbol{a} = P(x;y;z)\boldsymbol{i} + Q(x;y;z)\boldsymbol{j} + R(x;y;z)\boldsymbol{k}$$

называется вектор, обозначаемый rot $\boldsymbol{a}(M)$ или $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$

и определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Эту формулу можно записать в виде, удобном для запоминания

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Свойства ротора

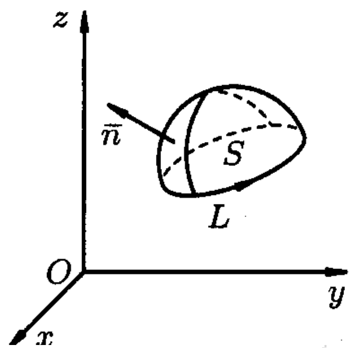
1.Если $\boldsymbol{a}$ - постоянный вектор, то $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$.

2.$\mathrm{rot}(c \cdot a) = c \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$, где $c = \mathrm{const}$.

3.$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$, т. е. ротор суммы двух векторов равен сумме роторов слагаемых.

4.Если U — скалярная функция, а $\boldsymbol{a}(M)$ — векторная, то $\mathrm{rot}(U \cdot \boldsymbol{a}) = U \cdot \mathrm{rot}\,a + \mathrm{grad}\,U \times \boldsymbol{a}$.

Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, запишем известную в математическом анализе **формулу Стокса**, связывающую интеграл по поверхности S и по ее границе L



$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L a_\tau dl$$ циркуляция вектора ***a*** по контуру L

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\,ds.$$

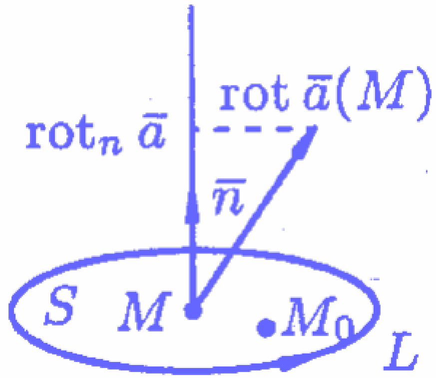
Отсюда вытекает векторная форма формулы Стокса

$$\oint_L a_\tau dl = \iint_S \operatorname{rot}_n \bar{a}\, ds.$$

Циркуляция вектора а вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора а через поверхность S, лежащую в поле вектора а и ограниченную контуром L (натянутую на контур)

По теореме о среднем

$$\iint_S \operatorname{rot}_n \bar{a} ds = \operatorname{rot}_n \bar{a}(M_0) \cdot S,$$



где M_0 — некоторая (средняя) точка площадки S

Пусть контур L стягивается в точку M. Тогда $M_0 \to M$, а $S \to 0$. Переходя к пределу получим

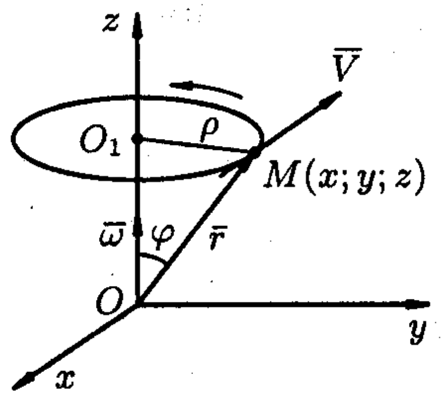
$$\operatorname{rot}_n \bar{a}(M) = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_L a_\tau \, dl.$$

Ротором вектора а в точке М **называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора *а* по контуру *L* плоской площадки *S*, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки.**

Таким образом, ротор вектора *a(M)* есть векторная величина, образующая собственное векторное поле

Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω, т. е. ротор вектора

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$



По определению ротора

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(0 - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial(x\omega)}{\partial x} - \frac{\partial(-y\omega)}{\partial y}\right)\bar{k} = 0 - 0 + 2\omega \cdot \bar{k} = 2\bar{\omega}.$$

Ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения

С точностью до числового множителя **ротор поля скоростей *V* представляет собой угловую скорость вращения твердого тела**.
С этим связано само название «ротор» (лат. «вращатель»).

Замечание.

Из определения ротора вытекает, что **направление ротора - это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого другого направления.**

Так что связь между ротором и циркуляцией аналогична связи между градиентом и производной по направлению

∇

Оператор Гамильтона

Основными дифференциальными операциями над скалярным полем U и векторным полем $\boldsymbol{a}$ являются grad U, div $\boldsymbol{a}$, rot $\boldsymbol{a}$.
Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются ***векторными операциями первого порядка*** (в них участвуют только первые производные).
Эти операции удобно записывать с помощью так называемого ***оператора Гамильтона***

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ («набла»).
он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями.

Символическое «умножение» вектора ∇ на скаляр U или вектор $\boldsymbol{a}$ производится по обычным правилам векторной алгебры, а «умножение» символов

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

на величины U, P, Q, R понимают как взятие соответствующей частной производной от этих величин.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка

$$1.\ \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad} U.$$

$$2.\ \nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot(P\cdot\bar{i} + Q\cdot\bar{j} + R\cdot\bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{a}.$$

$$3.\ \nabla\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\bar{a}.$$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля.
При действиях с ним надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования. В частности, производная по направлению может быть записана в виде

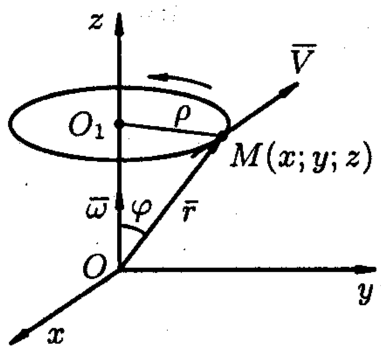
$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U, \qquad \bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma).$$

Соленоидальное поле

Векторное поле ***a*** называется ***соленоидальным***, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т. е. div ***a*** = 0

Примерами соленоидальных полей являются:
поле линейных скоростей
вращающегося твердого тела;

магнитное поле, создаваемое прямолинейным
проводником, вдоль
которого течет электрический ток.



Свойства соленоидального поля

1.В соленоидальном поле о поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это свойство непосредственно вытекает из Формулы Остроградского -Гаусса.

$$\oiint_S a_n\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\bar{a}\cdot dv$$

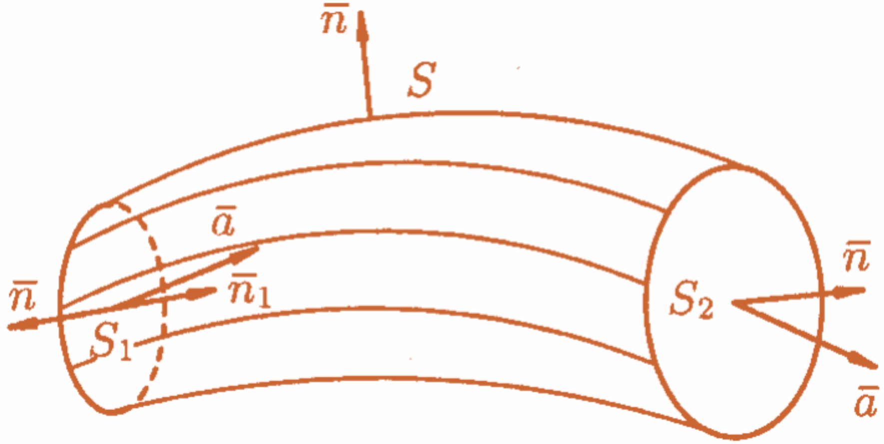
Таким образом, **соленоидальное поле не имеет источников и стоков**.

2.Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т. е. если div ***a*** = 0, то существует такое поле ***b**,* что ***a*** = rot ***b***. Вектор ***b*** называется ***векторным потенциалом*** поля ***a***.

Отметим обратное утверждение - **поле ротора векторного поля является соленоидальным,** т.к. div rot a = 0).

Любое из свойств 1-2 можно взять в качестве определения соленоидального поля.

3.В соленоидальном поле о поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое ***интенсивностью*** трубки).



Рассмотрим векторную трубку между двумя ее произвольными сечениями S_1и S_2; боковую поверхность трубки обозначим через S

Поток вектора через замкнутую поверхность, состоящую из S_1, S_2 и S, равен нулю

Следовательно,
$$\iint\limits_S a_n\,ds + \iint\limits_{S_1} a_n\,ds + \iint\limits_{S_2} a_n\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}\,dv = 0,$$

где n внешняя нормаль

Так как на боковой поверхности векторной трубки нормаль ***n*** перпендикулярна к векторам поля, то

$$\iint_S a_n\,ds = 0 \qquad \rightarrow \qquad \iint_{S_1} a_n\,ds = -\iint_{S_2} a_n\,ds.$$

Переменив направление нормали на площадке S_1, т. е. взяв внутреннюю нормаль $\boldsymbol{n}_1$, получим

$$\iint_{S_1} a_{n_1}\,ds = \iint_{S_2} a_n\,ds.$$

В поле скоростей текущей жидкости полученный результат означает, что **количество жидкости, втекающей в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее.**

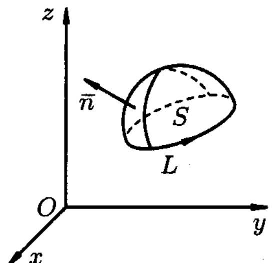
Потенциальное поле

Векторное поле *a* называется ***потенциальным*** (или ***безвихревым***, или ***градиентным***), если во всех точках поля ротор равен нулю, т. е. rot ***a*** = 0. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда.

Свойства потенциального поля

1.Циркуляция потенциального поля a по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.

Это вытекает из формулы Стокса



$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

$$\oint_L a_\tau dl = \iint_S \mathrm{rot}_n\,\bar{a}\,ds. \quad \rightarrow \quad C = \oint_L a_\tau dl = 0.$$

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю;

в поле скоростей текущей жидкости равенство $C = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т. е. нет водоворотов

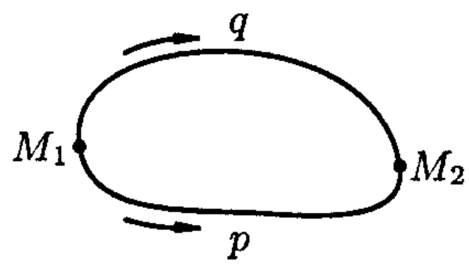
2. В потенциальном поле а криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой

Это свойство вытекает из свойства 1. Действительно, взяв в поле две точки M_1 и M_2, соединим их двумя кривыми M_1pM_2 и M_1qM_2 так, чтобы контур $M_1pM_2\,qM_1$ лежал внутри поля

Тогда, в силу свойства 1, имеем



$$\oint_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{M_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} - \int\limits_{M_1qM_2} = 0,$$

То есть

$$\int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_1qM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

3.Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции *U(x;y;z),* т. е. если rot ***a*** = 0, то существует функция *U(x; y; z)* такая, что ***a*** = grad *U*

Из равенства rot ***a*** = 0 вытекает, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

т. е. выражение *Pdx* + *Qdy* + *Rdz* является полным дифференциалом некоторой функции *U* = *U(x;y;z)*. Эту функцию называют потенциалом векторного поля ***a*** = *P**i*** + *Q**j*** + *R**k**;*

dU = *Pdx* + *Qdy* + *Rdz*

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}, R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$\bar{a} = P \cdot \bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = \operatorname{grad} U,$$

т. е. вектор поля ***a*** является градиентом скалярного поля.

Замечание. Из равенства rot grad $U = 0$ следует обратное утверждение – поле **градиента скалярной функции *U = U(x; y; z)* является потенциальным**.

Из равенства ***a*** = grad U следует, что потенциальное поле определяется заданием ***одной*** скалярной функции $U = U(x;y;z)$ - его потенциала.

Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U(x;y;z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + c,$$

где $(x_0;y_0;\ z_0)$ - координаты фиксированной точки, $(x;\ y;\ z)$ - координаты произвольной точки.

Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого (grad($U + a$) = grad(U)).

Произвольное векторное поле требует задания ***трех*** скалярных функций *(P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)* - проекции вектора поля на оси координат).

Замечание

Определение потенциального поля может быть дано иначе – **векторное поле а называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля,** т. е. a = grad *U*.

(Иногда пишут *a* = - grad *U;* знак «минус» пишут для удобства, обычно векторные линии направлены в сторону убывания *U:* поток жидкости направлен туда, где давление меньше; теплота перемещается от более нагретого места к менее нагретому и т. д.)

Гармоническое поле

Векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется ***гармоническим*** (или ***лапласовым****)*, если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т. е. если $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$ и $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\boldsymbol{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,U$, где $U = U(x;y;z)$ — потенциал поля

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = 0$, или

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

Потенциальная функция U гармонического поля $\boldsymbol{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа, т.е. является гармонической

Векторные дифференциальные операции второго порядка

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются ***дифференциальные операции второго порядка.***

Имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка:
div grad$U$, rot grad$U$, grad div $\boldsymbol{a}$, div rot $\boldsymbol{a}$, rot rot $\boldsymbol{a}$.

Замечание

Операция div div $\boldsymbol{a}$, например, не имеет смысла: div $\boldsymbol{a}$ - скаляр, говорить о дивергенции скаляра, т. е. о div div $\boldsymbol{a}$, бессмысленно.)

Явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, с использованием оператора Гамильтона

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla(\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla) U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$

Правая часть этого равенства называется ***оператором Лапласа*** скалярной функции U и обозначается ΔU. Таким образом

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ играет важную роль в различных разделах математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые ***гармонические функции***

$$2.\ \operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla) U = 0$$

Это следует из того, что векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор).
Это означает, что **поле градиента есть поле безвихревое**.

$$3.\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} =$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{a}) \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{a}) \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{a}) \cdot \bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\bar{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\bar{k}.$$

4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = 0,$

так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю.
Это означает, что **поле вихря - соленоидальное**

5. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\times(\nabla\times\bar{a}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} - \Delta\bar{a},$

Это вытекает из равенства

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

$\Delta\bar{a} = \Delta P\,\bar{i} + \Delta Q\,\bar{j} + \Delta R\,\bar{k}$ -векторная величина, полученная

в результате применения оператора Лапласа к вектору ***a***