Лекция 14

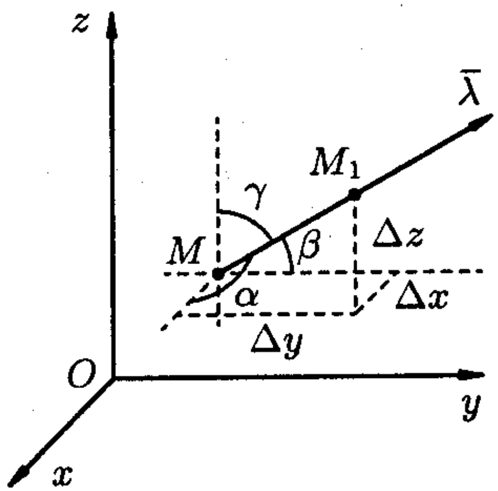
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ (2)

Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении вводится понятие **«производной по направлению»**.

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x;y;z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении Точки M в произвольном направлении λ. Пусть вектор λ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора А



$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z)$$

Тогда

$$\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

$\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$

Производной от функции U = U(M) в точке M по направлению λ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Производная по направлению **λ** и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке *M* по этому направлению. Если $\partial U/\partial\lambda>0$, то функция *U* возрастает в направлении **λ** , если $\partial U/\partial\lambda<0$, то функция *U* в направлении **λ** убывает. Кроме того, **величина $|\partial U/\partial\lambda|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции *U* в направлении λ в точке *M*:** чем больше $|\partial U/\partial\lambda|$, тем быстрее изменяется функция *U*. В этом состоит физический смысл производной по направлению

Формула для вычисления производной по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

В случае плоского поля $U = U(x; y)$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \cos\gamma = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha.$$

Замечание.

Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Их можно рассматривать как производные от U по направлению координатных осей Ox, Oy и Oz.

Градиент скалярного поля и его свойства

В каком направлении производная $\partial U/\partial\lambda$ имеет наибольшее значение? Это направление указывает вектор, называемый **градиентом** скалярного поля. Можно заметить, что правая часть равенства

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\boldsymbol{e}$ = (cos α, cos β, cos γ) и некоторого вектора $\mathbf{g}=(\partial U/\partial x; \partial U/\partial y; \partial U/\partial z)$.

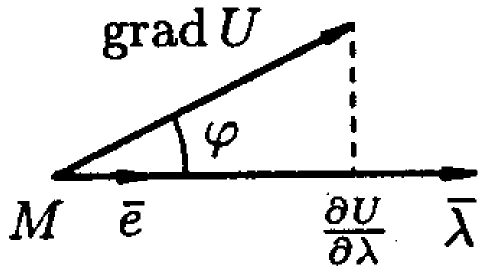
Этот вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x;y;z)$ в точке $M(x;y;z)$, называют ***градиентом функции U*** и обозначают grad U.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

grad U есть векторная величина, то есть **скалярное поле *U* порождает векторное поле градиента *U*.** *М*ожно записать

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором grad U и направлением **λ**



Производная по направлению достигает наибольшего значения, когда cosφ = 1, т. е. при = 0. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением **λ**, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т. е. ***градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции.***

Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Свойства градиента

1.Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

2. $\operatorname{grad}(U+V) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V$,

3. $\operatorname{grad}(c \cdot U) = c \cdot \operatorname{grad} U$, $c = \mathrm{const}$,

4. $\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$,

5. $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$,

6. $\operatorname{grad} F(U) = \frac{\partial f}{\partial U} \operatorname{grad} U$.

Замечание.

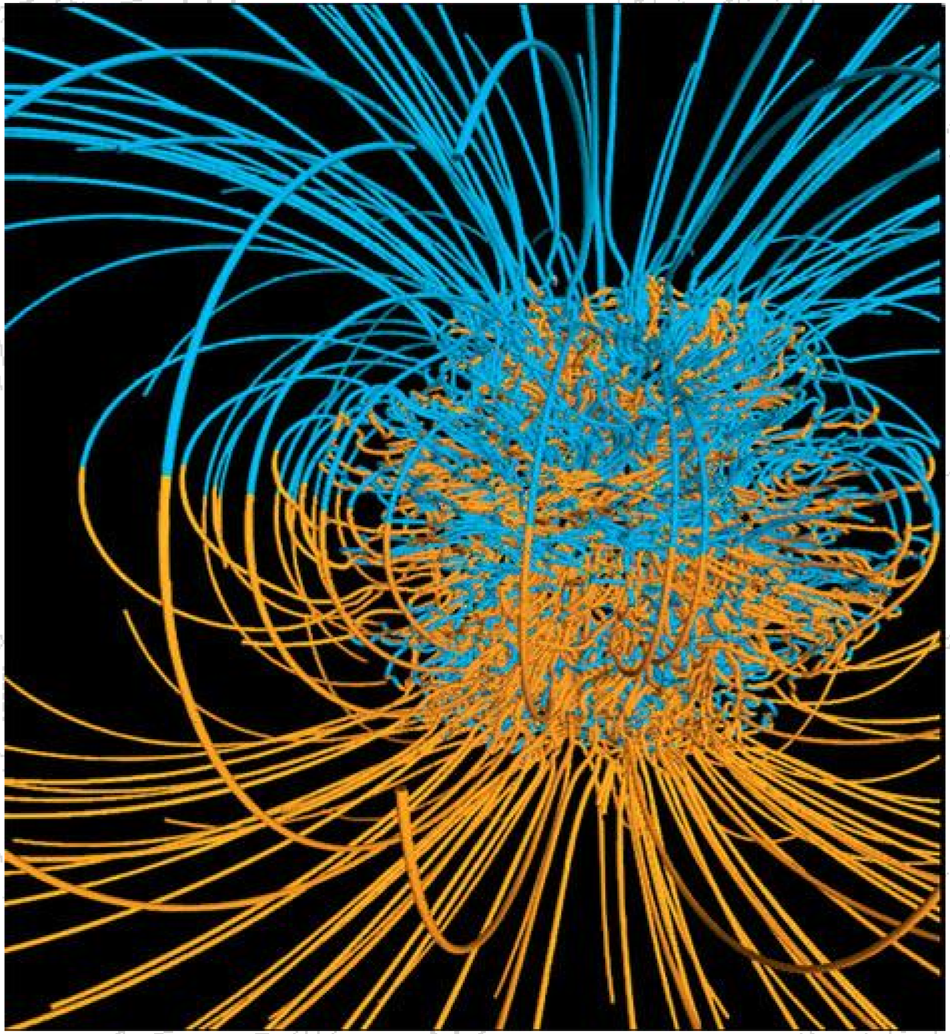
Приведенные свойства градиента функции остаются справедливыми и для плоского поля.

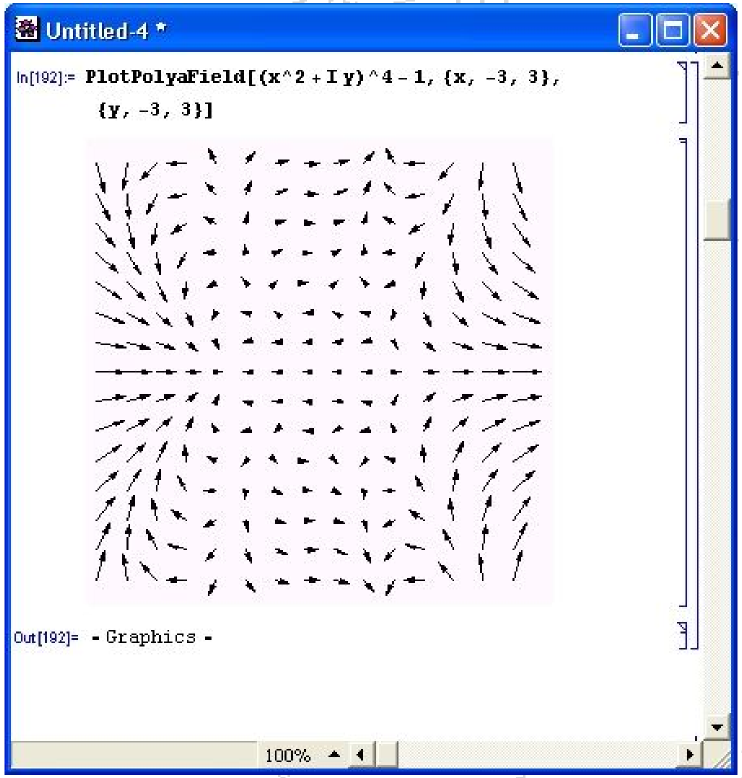
ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

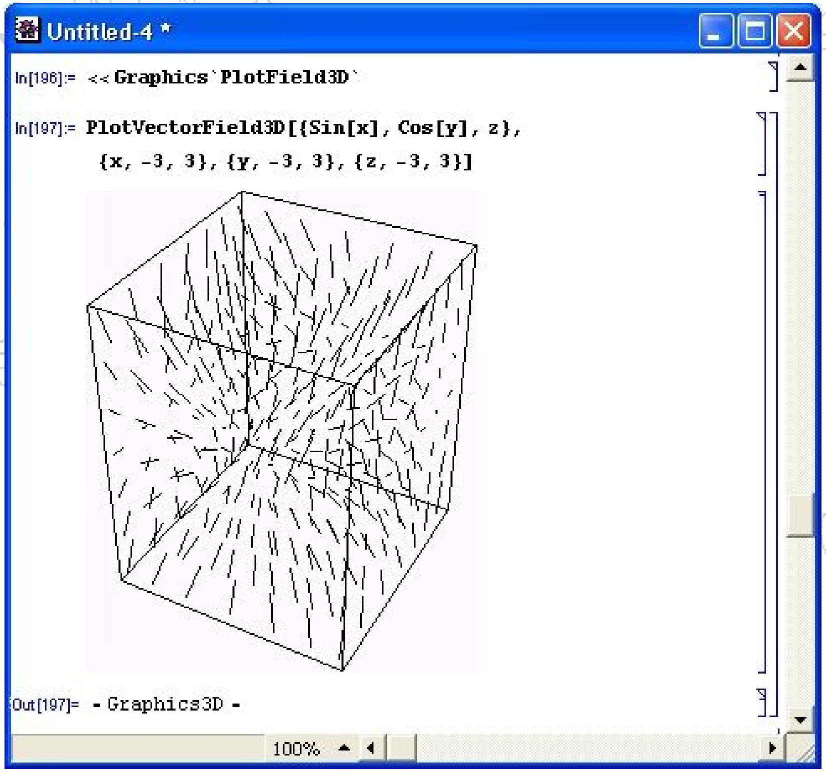
Векторные линии поля

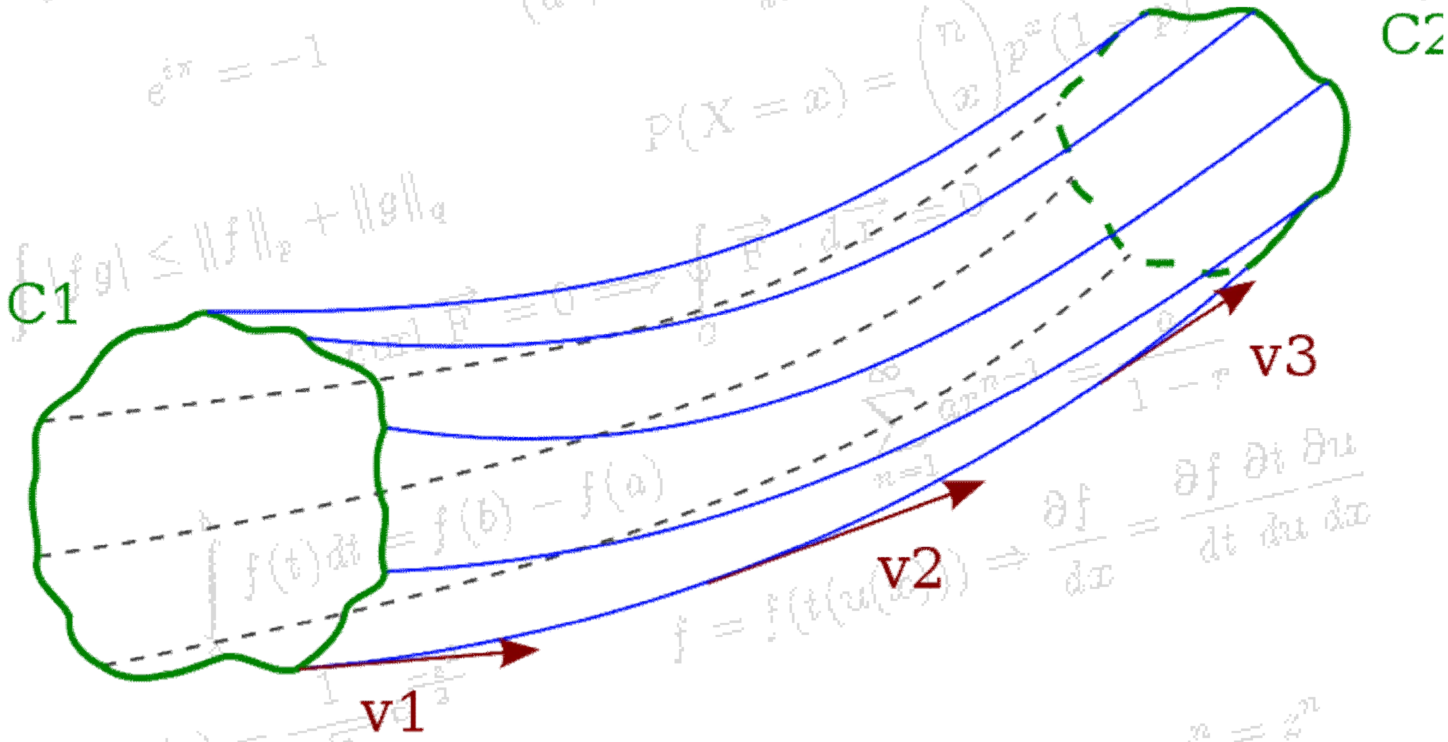
Векторной линией поля ***a*** называется линия, касательная к которой в каждой ее точке *M* имеет направление соответствующего ей вектора ***a****(M)*.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется ***векторной трубкой***.




Untitled-4 *
In[192]:= PlotPolyaField[(x^2 + I y)^4 - 1, {x, -3, 3},
{y, -3, 3}]
Out[192]= - Graphics -
100%

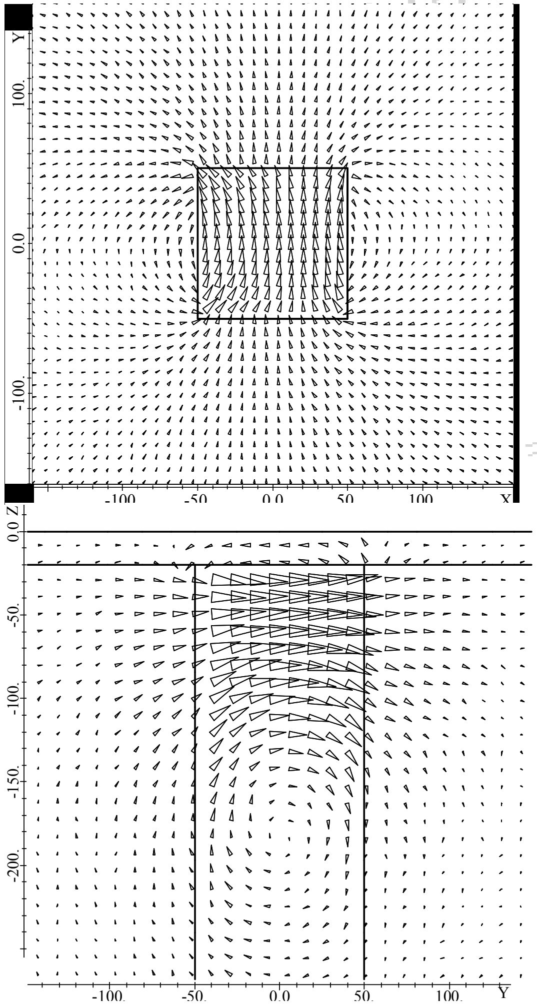

Untitled-4 *
In[196]:= << Graphics`PlotField3D`
In[197]:= PlotVectorField3D[{Sin[x], Cos[y], z},
{x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3}]
Out[197]= - Graphics3D -
100%

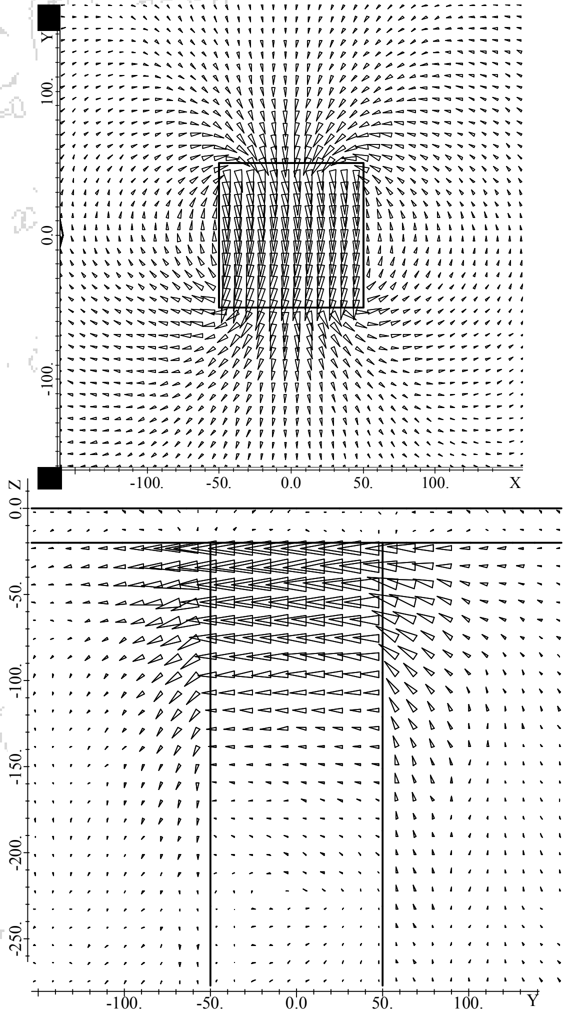


C1
C2
v1
v2
v3

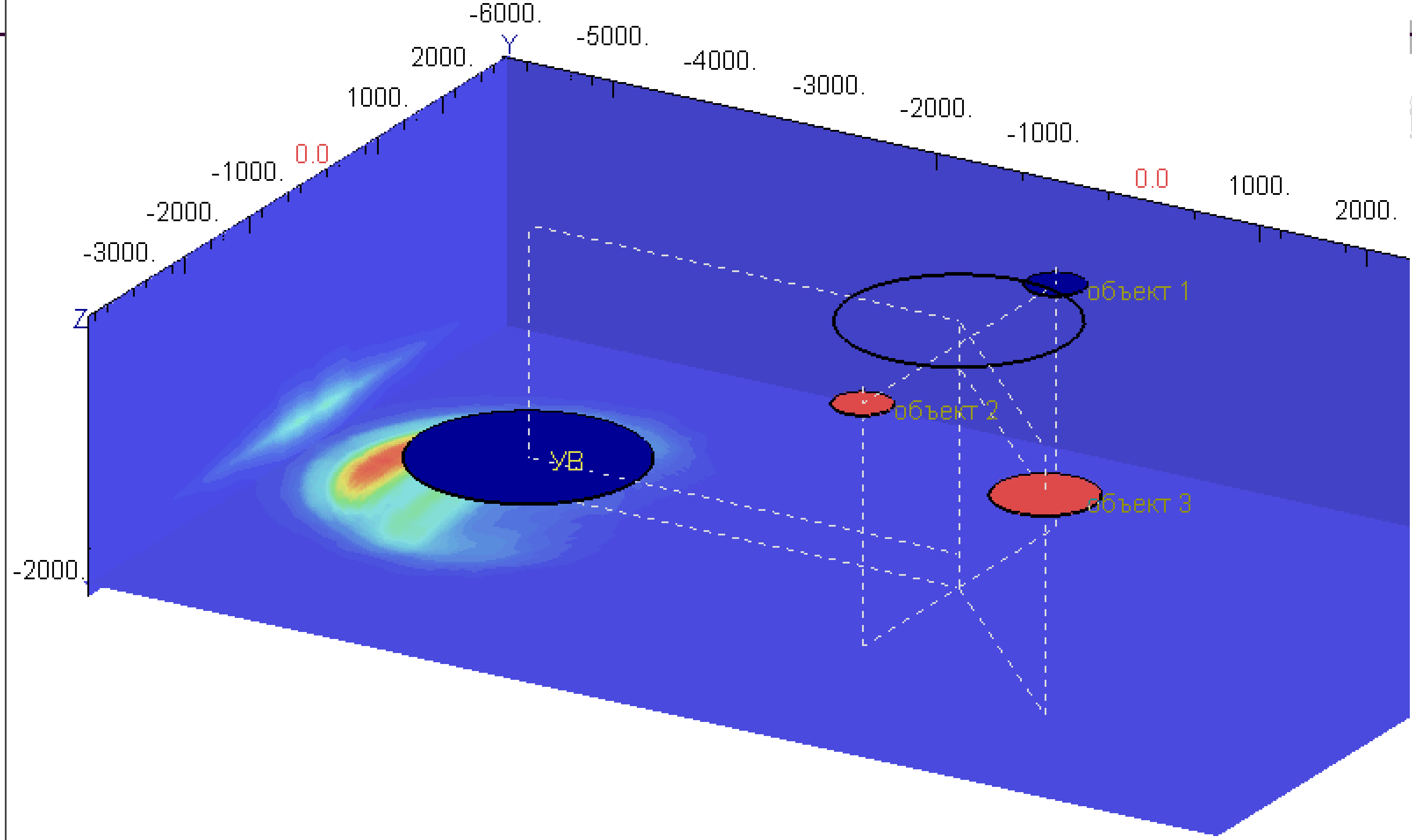
Характер распределения аномальных токов

- Проводящий объект
- Непроводящий объект





T=0.014 мс



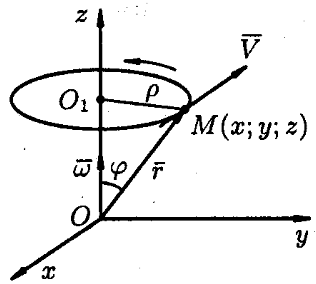
-6000.
-5000.
-4000.
-3000.
-2000.
-1000.
0.0
1000.
2000.
Y
2000.
1000.
0.0
-1000.
-2000.
-3000.
Z
-2000.
объект 1
объект 2
объект 3
УВ

Векторные линии поля
$\boldsymbol{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j}+R(x;y;z)\mathbf{k}$
описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}.$$

Пример

Найти векторные линии поля линейных скоростей тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси Oz.

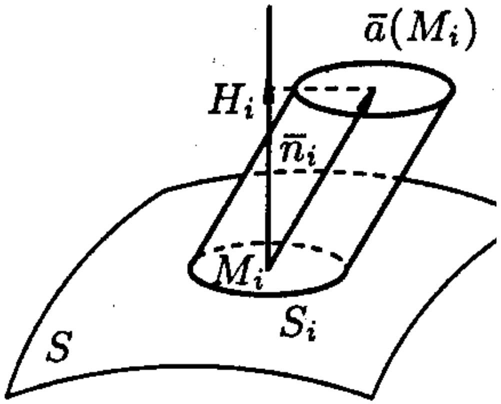


$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega x\,dx = -\omega y\,dy, \\ 0 \cdot dy = \omega x\,dz. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ z = c_2, \end{cases}$$

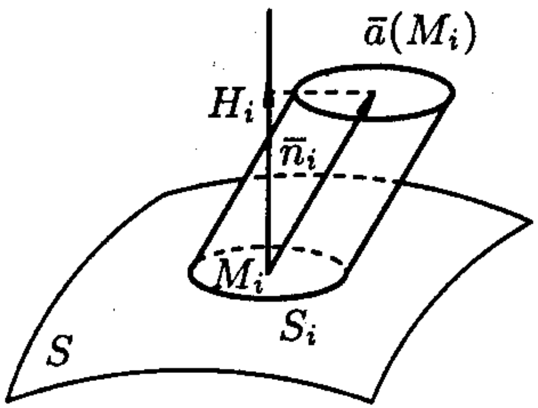
Поток поля

Рассмотрим векторное поле ***a**(M)*). Для наглядности будем считать вектором скорости некоторого потока жидкости, движущейся стационарно. Представим, что некоторая поверхность S находится в этом потоке и пропускает жидкость. Подсчитаем, какое количество жидкости протекает через поверхность S.



Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть n = (cos α; cos β; cos γ) — единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности *S*. Разобьем поверхность на элементарные площадки S_1, S_2, ..., S_n. Выберем в каждой площадке точку M_i (i = 1,2,..., n) и вычислим значения вектора скорости ***a**(M)* в каждой точке.

За единицу времени через S_i протекает количество жидкости приближенно равное



$$K_i \approx H_i \cdot \Delta S_i,$$

$$H_i = \text{пр}_{\bar{n}_i} \bar{a}(M_i) = \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i.$$

$$K \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta S_i.$$

Точное значение искомого количества жидкости

$$K = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i) \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta S_i = \iint_S \bar{a}(M) \cdot \bar{n} \cdot ds.$$

Независимо от физического смысла поля ***a****(M)* полученный интеграл называют потоком векторного поля.

Потоком вектора а через поверхность *S* называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности,

$$K = \iint_S a_n \, ds,$$

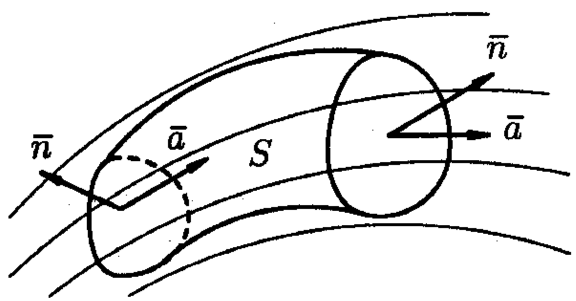
где a_n — проекция вектора а на направление нормали ***n***,
ds - дифференциал (элемент) площади поверхности.

$$K = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds.$$

Поток K вектора $\boldsymbol{a}$ есть скалярная величина. Величина K равна **объему жидкости, которая протекает через поверхность *S* за единицу времени**. В этом состоит физический смысл потока (независимо от физического смысла поля).

Особый интерес представляет случай, когда поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем V.
Тогда поток вектора записывается в виде

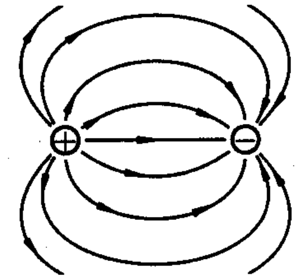
$$K = \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \;= \oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

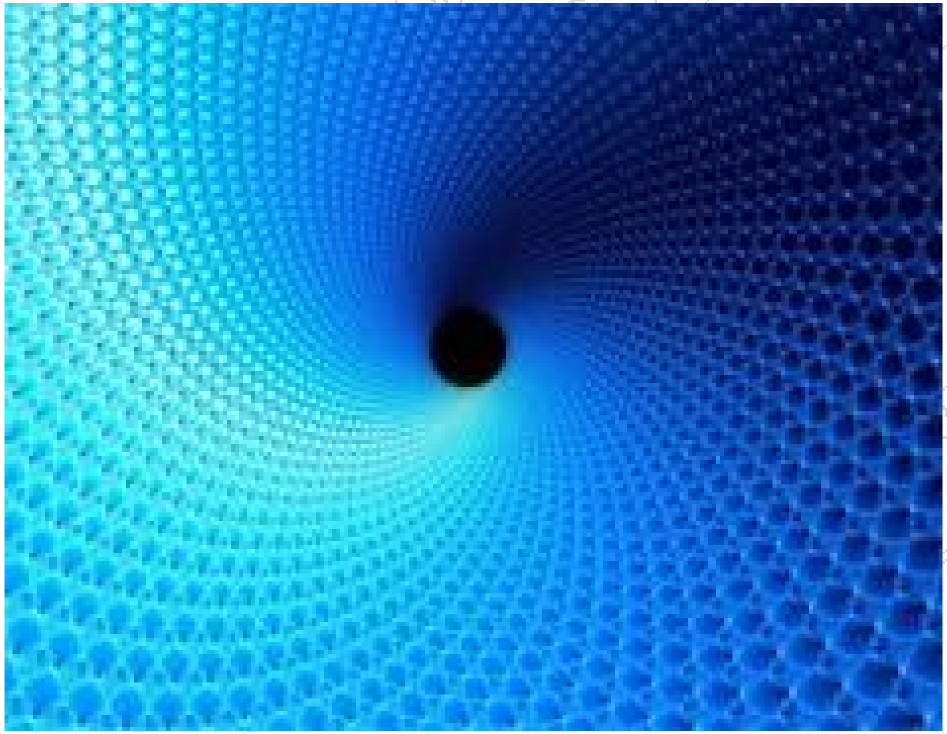


В этом случае за направление вектора $\boldsymbol{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности S

Физически величину потока *K* через замкнутую поверхность можно трактовать, как разность между количеством жидкости, вытекающей из области *V* (объема *V)* и втекающей в нее за единицу времени. Если ***K* > 0**, то из области *V* вытекает больше жидкости, чем в нее втекает. Это означает, что внутри области имеются дополнительные ***источники.*** Если ***K* < 0**, то внутри области *V* имеются ***стоки,*** поглощающие избыток жидкости.

Источники точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки - точки, где векторные линии кончаются. Так, в электростатическом поле источником является положительный заряд, стоком - отрицательный заряд магнита





Дивергенция поля.

Важной характеристикой векторного поля является так называемая **дивергенция,** характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля

Дивергенцией векторного поля

$$\boldsymbol{a} = P(x;y;z)\boldsymbol{i} + Q(x;y;z)\boldsymbol{j} + R(x;y;z)\boldsymbol{k}$$

в точке М называется скаляр вида $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Обозначается символом div $\boldsymbol{a}$ (M) или $\mathbf{div}\,\bar{a}(M)$

Свойства дивергенции

1. Если $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор, то div $\boldsymbol{a} = 0$.
2. div$(c \cdot \boldsymbol{a}) = c \cdot$ div $\boldsymbol{a}$, где $c = \text{const}$.
3. div$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ = div $\boldsymbol{a}$ + div $\boldsymbol{b}$, т. е. дивергенция суммы двух векторных функций равна сумме дивергенции слагаемых.
4. Если U — скалярная функция, $\boldsymbol{a}$ — вектор, то div$(U \cdot \boldsymbol{a}) = U \cdot$ div $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot$ grad$U$.

Покажем, например, 4

$$\operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(U \cdot P) + \frac{\partial}{\partial y}(U \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial z}(U \cdot R) =$$

$$= U\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$= U\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$= U \cdot \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \cdot \operatorname{grad} U.$$

Формула Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

$$\oiint_S a_n\,ds = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \cdot dv$$

Формула Остроградского-Гаусса означает, что ***поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении внешней нормали***, т. е. изнутри) ***равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному данной поверхностью***.

Другое определение дивергенции

По теореме о среднем

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{a}(M)\, dv = V \cdot \operatorname{div} \bar{a}(M_0),$$

где M_0 — некоторая (средняя) точка области V

Отсюда

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = \frac{1}{V} \oiint\limits_S a_n\, ds.$$

Пусть поверхность S стягивается в точку. Тогда $V \to 0$, $M_0 \to M$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint\limits_S a_n\, ds.$$

Дивергенцией векторного поля в точке M называется **предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку *M*, к объему тела, ограниченного этой поверхностью,** при условии, что вся поверхность стягивается в точку M ($V \to 0$).

Дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной и образует скалярное поле в данном векторном поле.

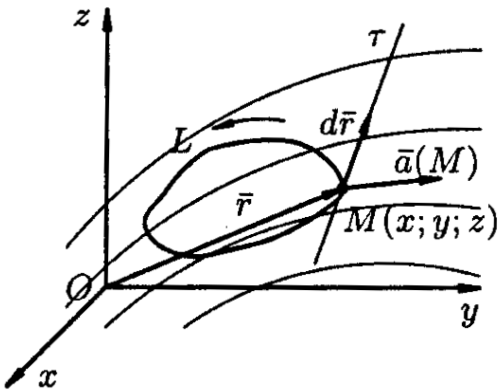
Величина div *a(M)* характеризует мощность (интенсивность, плотность) **источника или стока в точке *M*.** В этом состоит физический смысл дивергенции

Если в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, нет ни источников, ни стоков, то $\operatorname{div} a = 0$.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, называется **соленоидалъным** .

Циркуляция поля

Возьмем в векторном поле $\boldsymbol{a}(M)$ некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление



Пусть $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор точки М на контуре L.

Вектор $d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$ направлен по касательной к кривой в направлении ее обхода и $|d\boldsymbol{r}| = dl$, где dl — дифференциал дуги кривой

$$\left(dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}\right).$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $d\boldsymbol{r}$, касательный к контуру L, называется ***циркуляцией вектора*** a вдоль L, т. е.

$$C = \oint_L \boldsymbol{a}\,d\,\boldsymbol{r}$$

Формы записи циркуляции

$$\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = = a_r \cdot dl = P\,dx + Q\,dy + R dz,$$

где a_r — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную τ, проведенную в направлении обхода кривой L

$$C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

То есть, если кривая L расположена в силовом поле, то **циркуляция – это работа силы *a(M)* поля при перемещении материальной точки вдоль *L***

Вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля, потому что в каждой точке векторной линии скалярное произведение $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$ сохраняет знак.