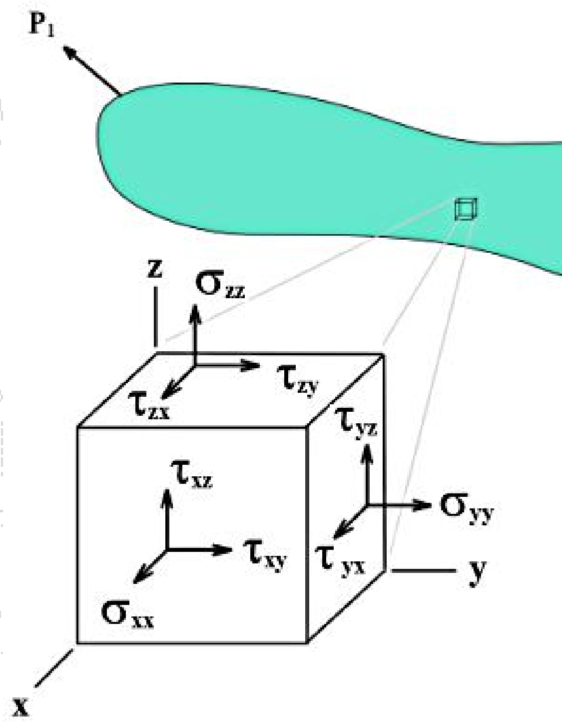
Лекция 13

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Основные понятия теории поля

Теория поля - крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Математическим ядром теории поля являются такие понятия, как **градиент, поток, потенциал, дивергенция, ротор, циркуляция** и другие.

Полем называется область *V* пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.
Если каждой точке *M* этой области соответствует определенное **число** $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) **скалярное *поле*** (или ***функция точки***). Иначе говоря, **скалярное поле — это скалярная функция *U(M)* вместе с ее областью определения**.
Если же каждой точке *M* области пространства соответствует некоторый вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле*** (или ***векторная функция точки***).

Если функция *U(M)* (***a***(*M*)) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется ***стационарным*** (или установившимся);

Поле, которое меняется с течением времени (меняется, например, скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется ***нестационарным*** (или неустановившимся).

Если V — область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x,y,z (координат точки M)$:U = U(x;y;z)$.

Наряду с обозначениями $U = U(M)$, $U = U(x\ ;\ y\ ;\ z)$, используют запись $U = U(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M.

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y, то соответствующее скалярное поле $U(x;y)$ называют ***плоским.***

Вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y и z: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x; y; z)$ (или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$).

Вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$\boldsymbol{a} = P(x; y; z)\boldsymbol{i} + Q\{x; y; z)\boldsymbol{j} + R(x; y; z)\boldsymbol{k}$,

где $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ — проекции вектора $\boldsymbol{a}(M)$ на оси координат.

Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется ***плоским***. Например, $\boldsymbol{a} = P(x; y)\boldsymbol{i} + Q(x; y)\boldsymbol{j}$.

Векторное поле называется ***однородным,*** если $\boldsymbol{a}(M)$ — постоянный вектор, т. е. P, R и Q — постоянные величины.
Таким полем является, например, поле тяжести.
Здесь $P = 0$, $Q = 0$, $R = -mg$, g - ускорение силы тяжести, m, — масса точки.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции ($U(x;y;z)$ - определяющая скалярное поле, $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x; y;z)$ – задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными

Пример

Функция

$$U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

определяет скалярное поле в точках пространства, ограниченного сферой с центром в начале координат и радиусом $R = 1$;

Скалярное поле

$$U = \frac{z}{x^2 + y^2}$$

определено во всем пространстве, за исключением точек оси Oz (на ней $x^2 + y^2 = 0$).

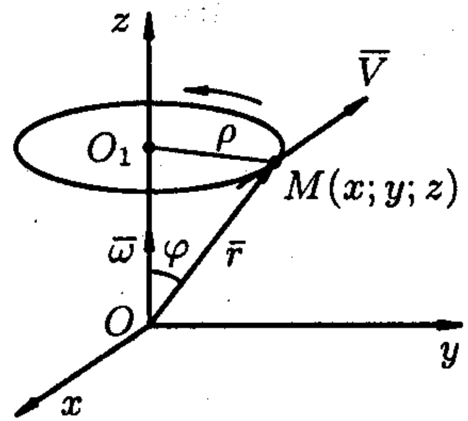
Пример

Найти поле линейной скорости V материальной точки M, вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью ω вокруг оси Oz

Решение

Угловую скорость представим в виде вектора ***n***, лежащего на оси Oz, направленного вверх.
Имеем

$$\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega) \qquad (\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}).$$



Построим радиус-вектор $\mathbf{r} = (x;y;z)$ точки M

Численное значение линейной скорости $|V|$, как известно из курса физики, равно $\omega\rho$, где ρ — расстояние вращающейся точки $M(x; y;z)$ от оси вращения (оси Oz).

$\rho = r\sin\varphi$ (φ — угол между вектором **r** и осью Oz). Следовательно,

$V = \omega \cdot \rho = \omega \cdot r \cdot \sin\varphi$ $\qquad\qquad$ $V = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$

Вектор скорости V направлен в сторону вращения, совпадает с направлением векторного произведения $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Поле линейных скоростей V тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, есть плоское векторное поле

Скалярное поле

Поверхности и линии уровня

Для наглядного представления скалярного поля $U = U(x; y; z)$ используют поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, $U(x;y;z) = c$.

Давая в величине c различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле

Для скалярного поля, образованного функцией

$$U = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

поверхностями уровня является_множество концентрических сфер с центрами в начале координат:

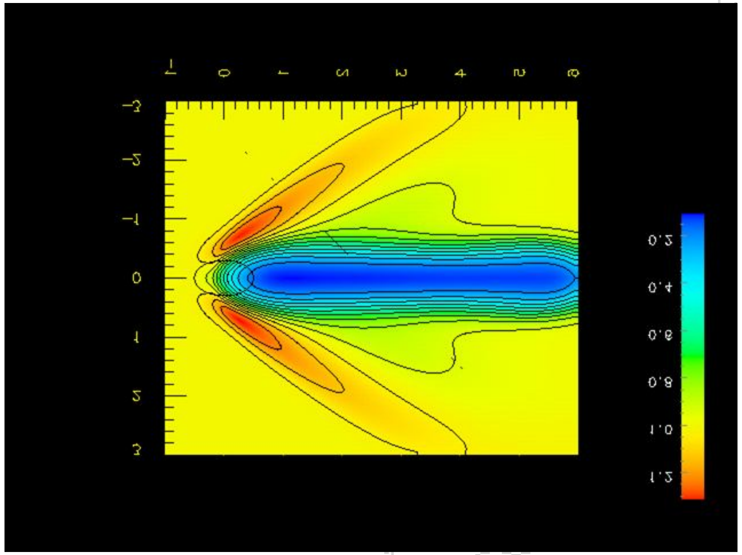
$$\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c.$$

Для равномерно раскаленной нити поверхности уровня температурного поля (изотермические поверхности) представляют собой круговые цилиндры, общей осью которых служит нить.

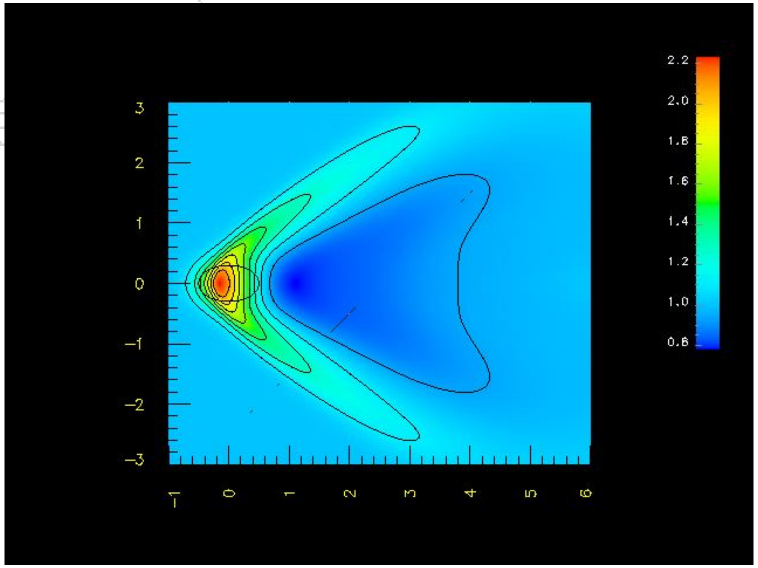
В случае плоского поля $U = U(x; y)$ равенство $U(x; y) = c$ представляет собой уравнение ***линии уровня*** поля,

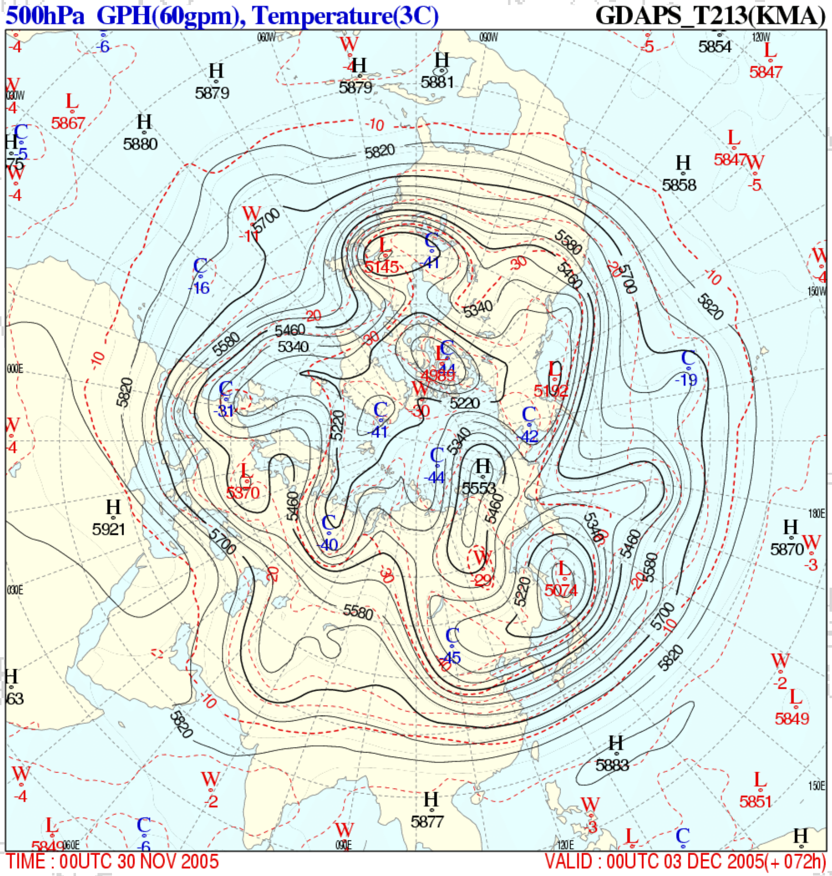
Линия уровня (изолинии) - это линия на плоскости *Oxy,* в точках которой функция $U(x; y)$ сохраняет постоянное значение.

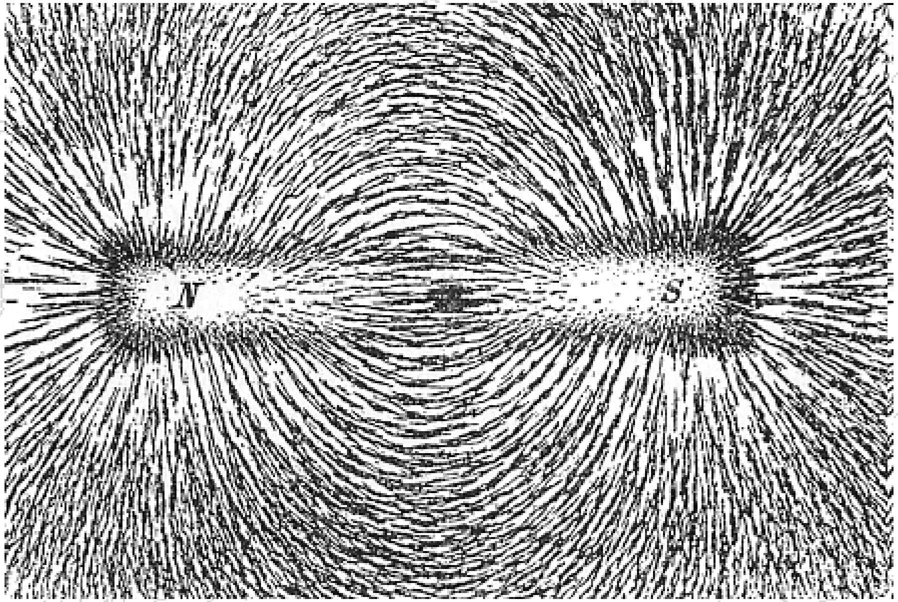
Изохоры (линии постоянной плотности)

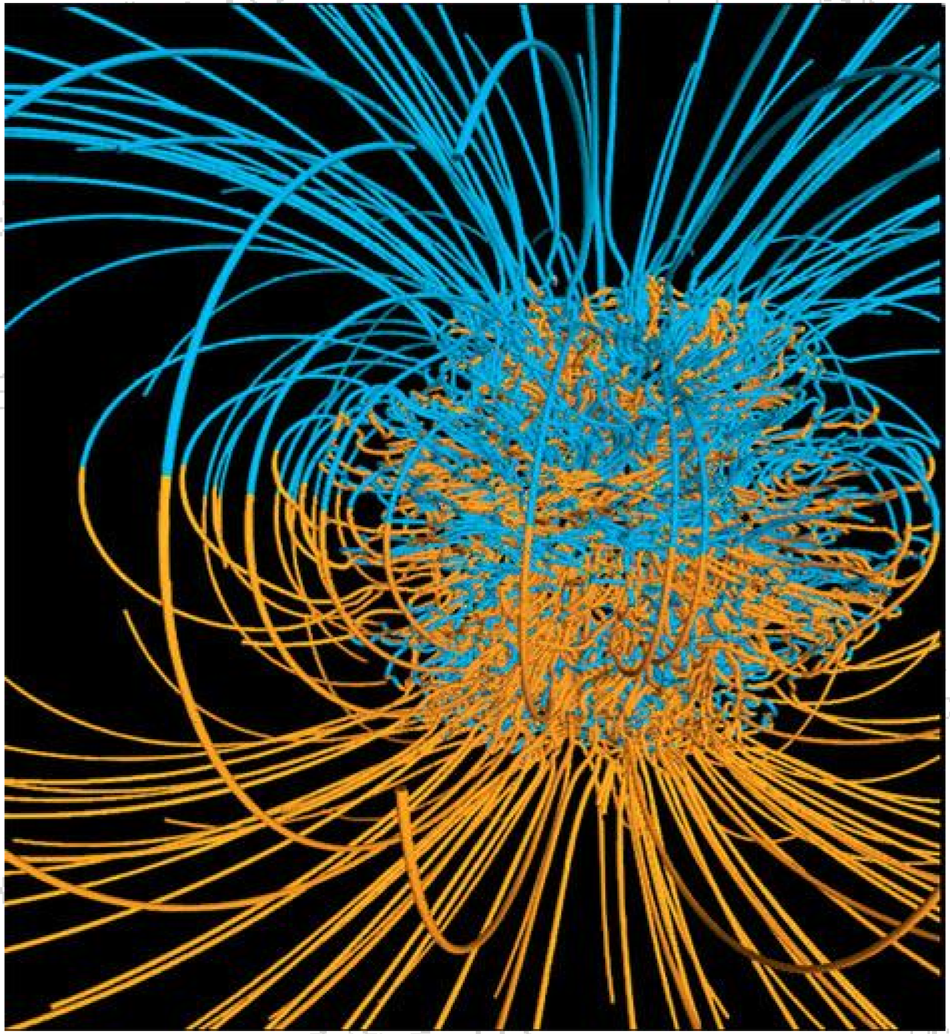


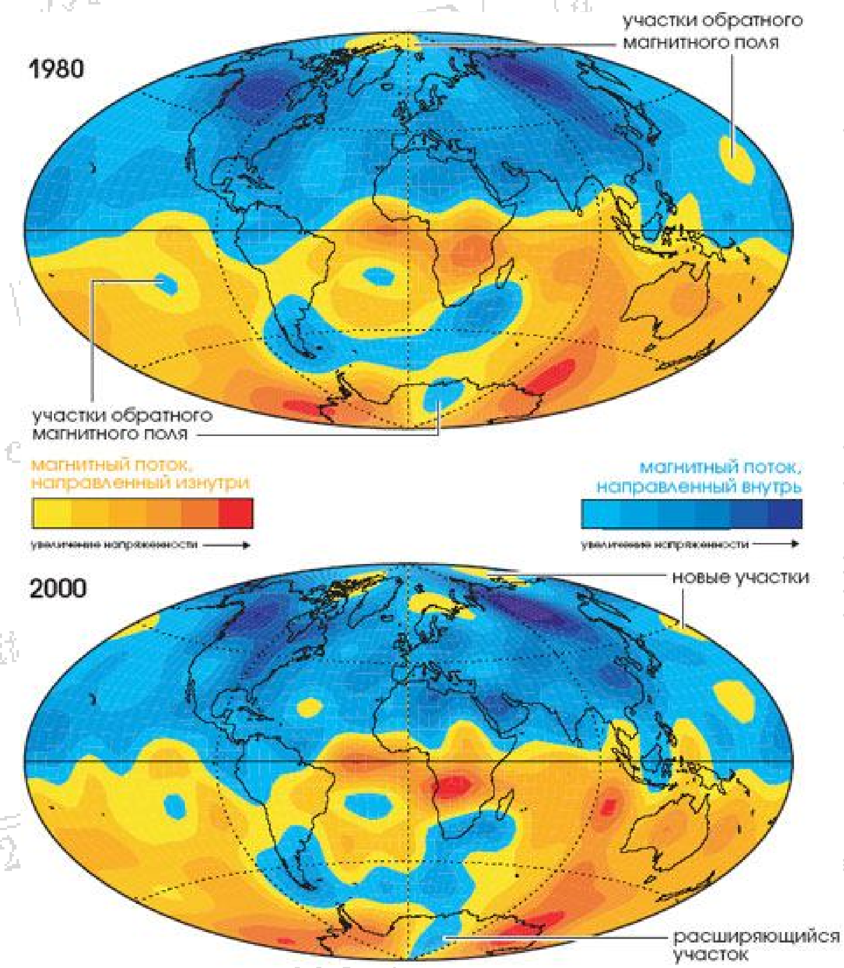
Изобары (линии постоянного] давления)

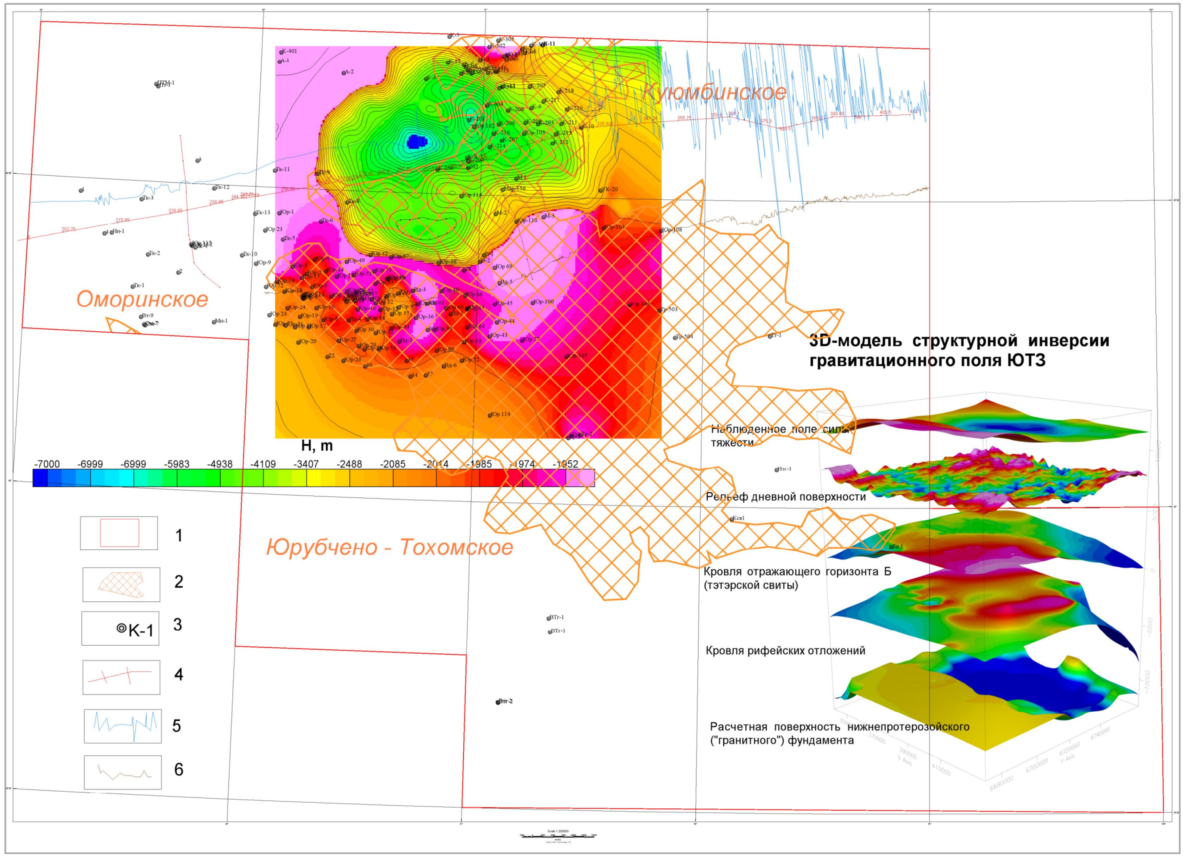



500hPa GPH(60gpm), Temperature(3C)
GDAPS_T213(KMA)
TIME : 00UTC 30 NOV 2005
VALID : 00UTC 03 DEC 2005(+072h)

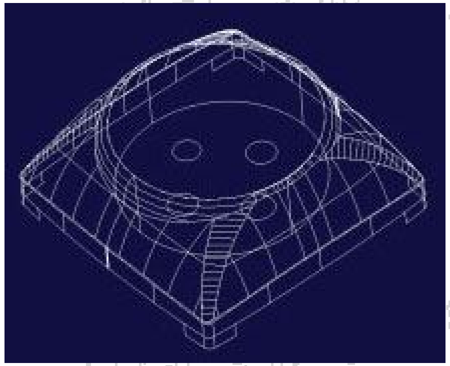

N
S

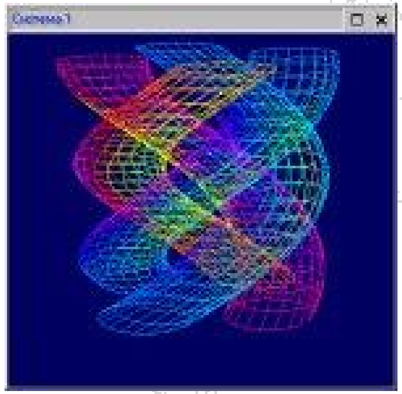


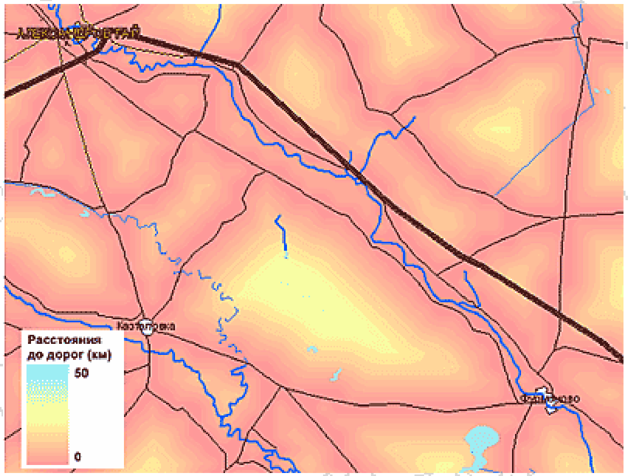

1980
участки обратного
магнитного поля
участки обратного
магнитного поля
магнитный поток,
направленный изнутри
увеличение напряженности
магнитный поток,
направленный внутрь
увеличение напряженности
2000
новые участки
расширяющийся
участок

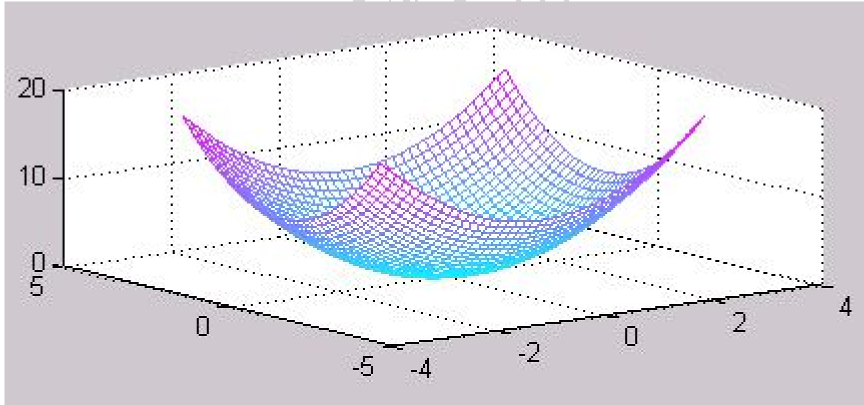


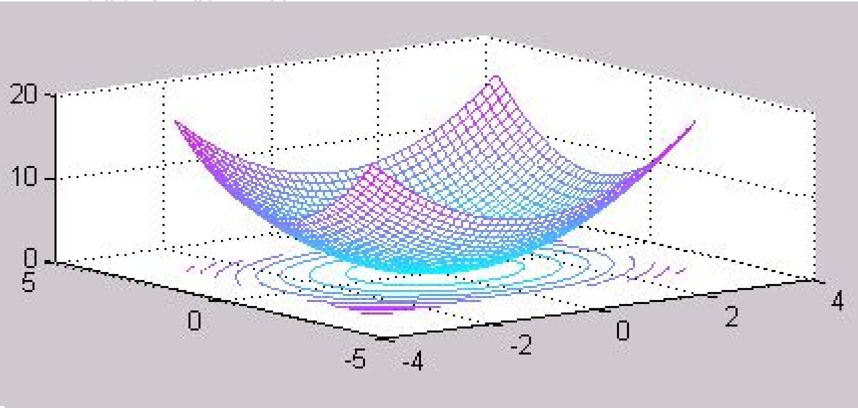
Куюмбинское
Оморинское
Юрубчено - Тохомское
H, m
-7000 -6999 -6999 -5983 -4938 -4109 -3407 -2488 -2085 -2014 -1985 -1974 -1952
1
2
K-1
3
4
5
6
3D-модель структурной инверсии гравитационного поля ЮТЗ
Наблюденное поле силы тяжести
Рельеф дневной поверхности
Кровля отражающего горизонта Б (тэтэрской свиты)
Кровля рифейских отложений
Расчетная поверхность нижнепротерозойского ("гранитного") фундамента

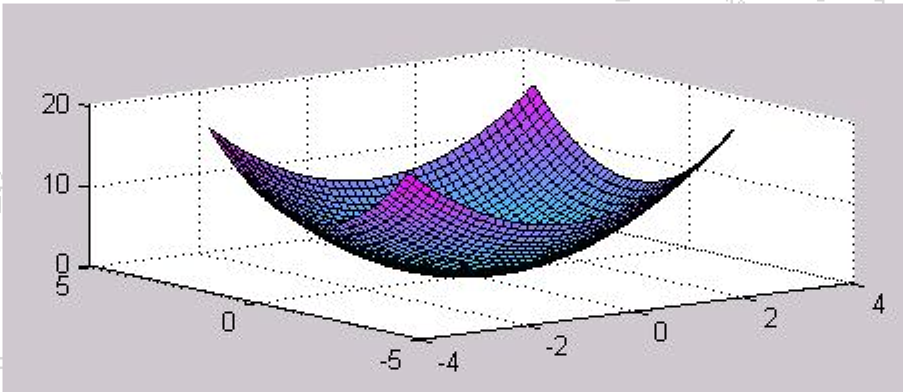


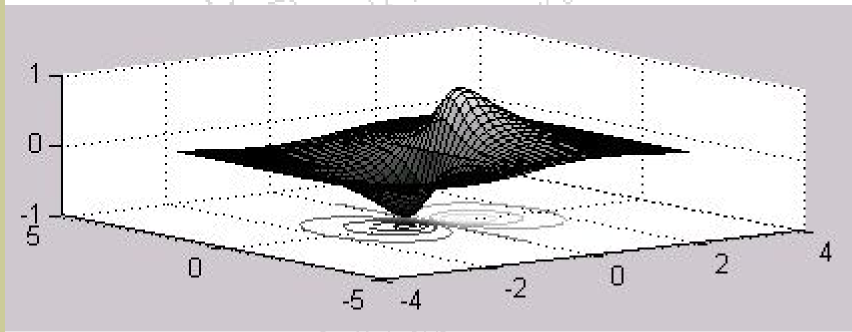


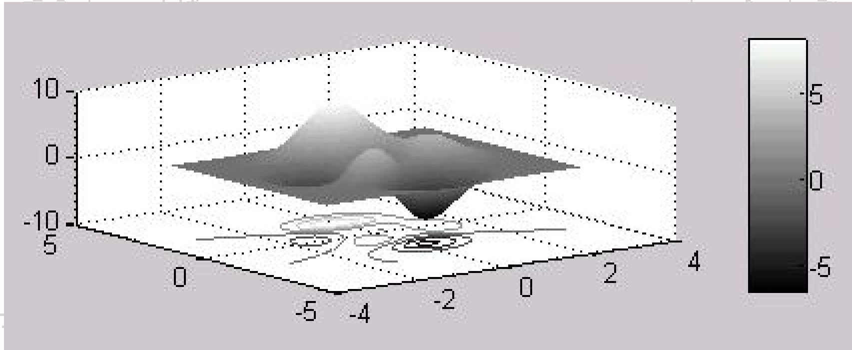

Расстояния
до дорог (км)
50
0

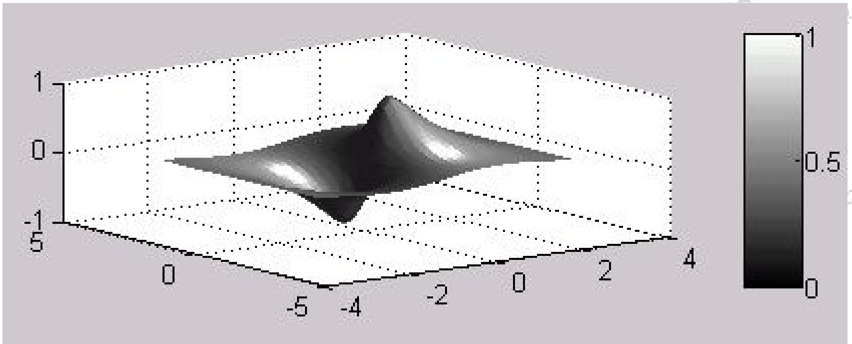

20
10
0
5
0
-5
-4
-2
0
2
4

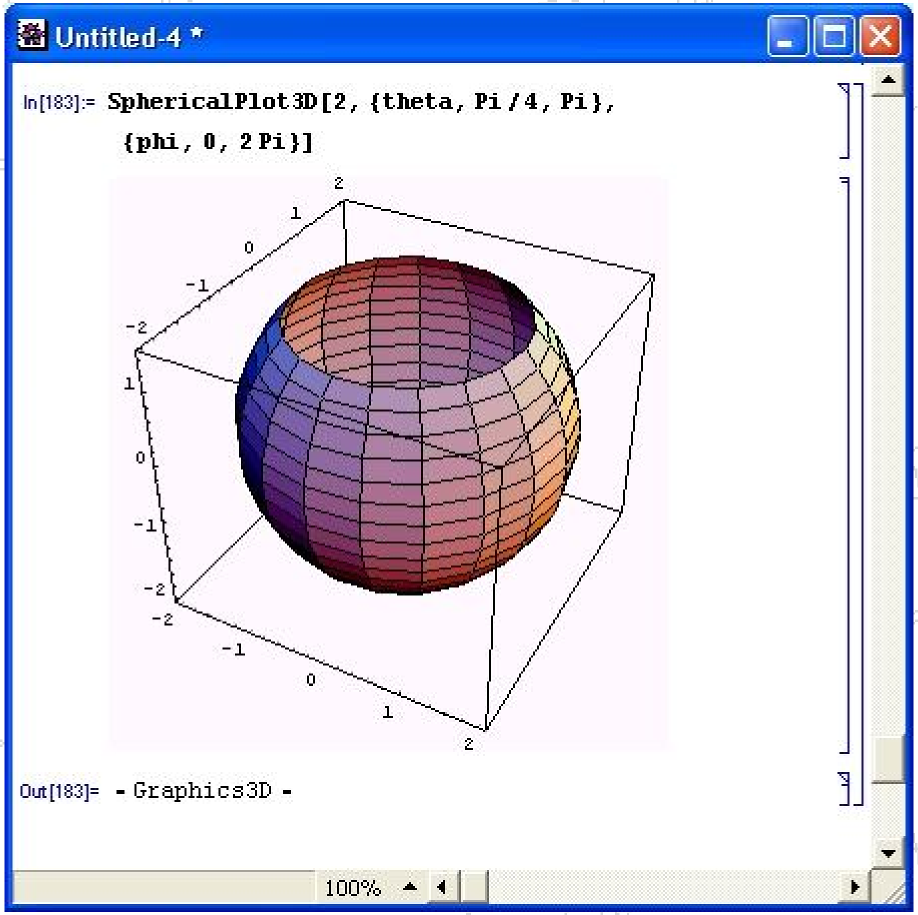

20
10
0
5
0
-5
-4
-2
0
2
4

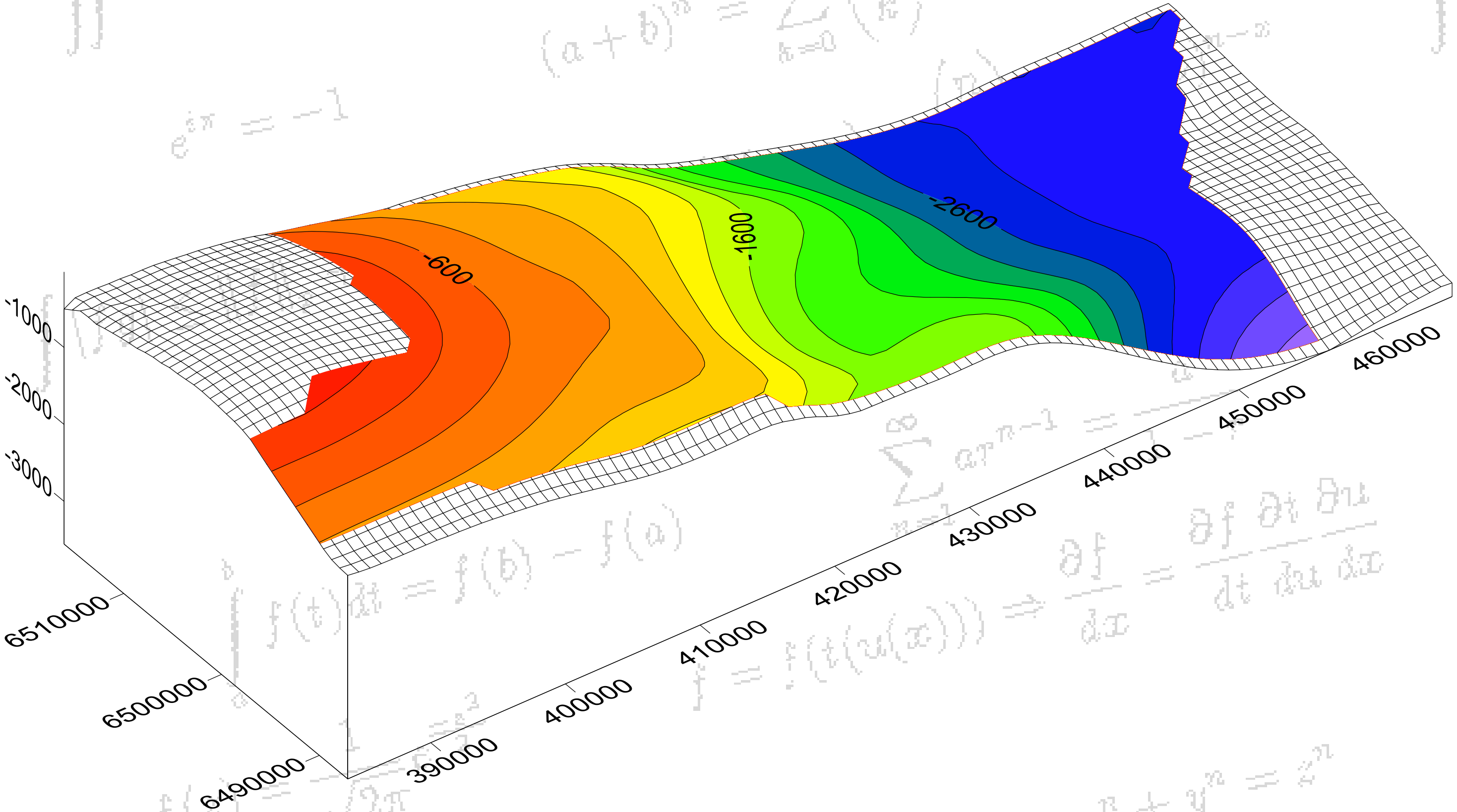

20
10
0
5
0
-5
-4
-2
0
2
4

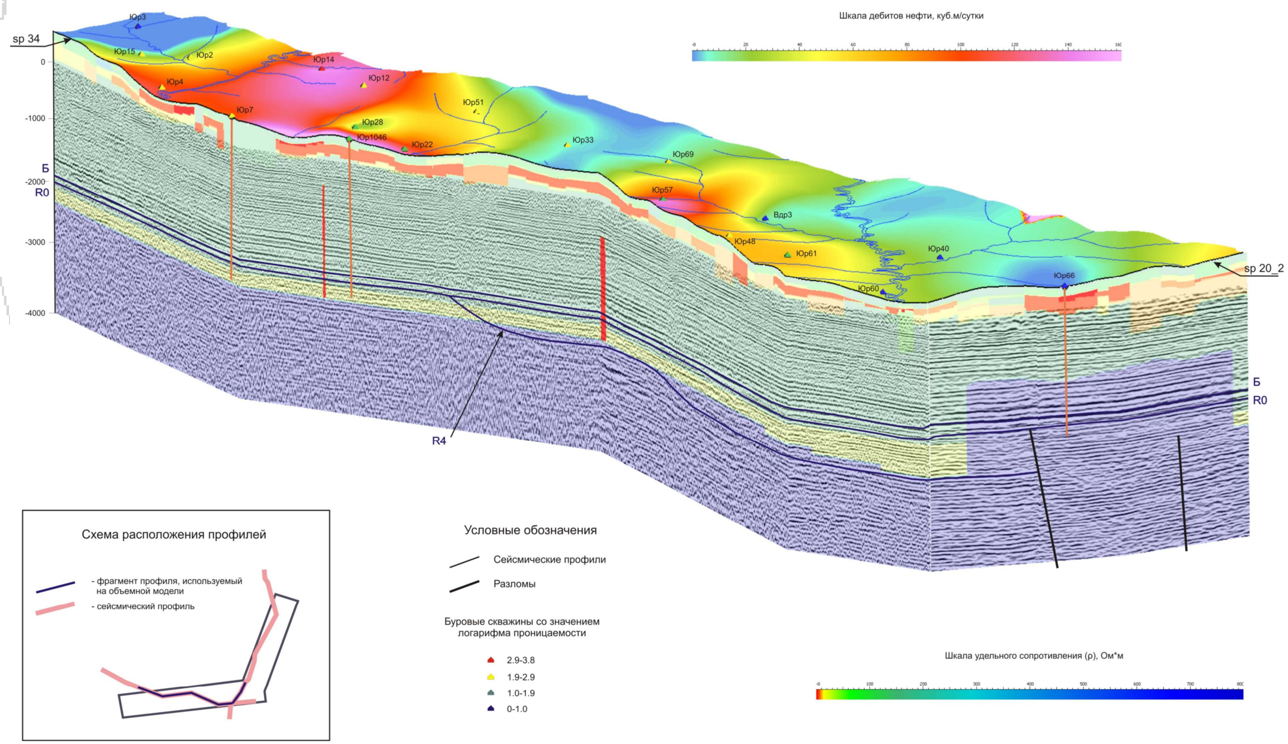

1
0
-1
5
0
-5
-4
-2
0
2
4


10
0
-10
5
0
-5
-4
-2
0
2
4
5
0
-5


1
0
-1
5
0
-5
-4
-2
0
2
4
1
0.5
0


Untitled-4 *
In[183]:= SphericalPlot3D[2, {theta, Pi/4, Pi},
{phi, 0, 2 Pi}]
Out[183]= - Graphics3D -
100%


-1000
-2000
-3000
-600
-1600
-2600
6510000
6500000
6490000
390000
400000
410000
420000
430000
440000
450000
460000


Шкала дебитов нефти, куб.м/сутки
-0
20
40
60
80
100
120
140
160
sp 34
sp 20_2
0
-1000
-2000
-3000
-4000
Б
R0
R4
Юр3
Юр15
Юр2
Юр14
Юр12
Юр4
Юр7
Юр51
Юр28
Юр1046
Юр22
Юр33
Юр69
Юр57
Вдр3
Юр48
Юр61
Юр40
Юр66
Юр60
Схема расположения профилей
- фрагмент профиля, используемый на объемной модели
- сейсмический профиль
Условные обозначения
Сейсмические профили
Разломы
Буровые скважины со значением логарифма проницаемости
2.9-3.8
1.9-2.9
1.0-1.9
0-1.0
Шкала удельного сопротивления (ρ), Ом*м