Лекция 4

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Связь ряда Фурье и интеграла Фурье

Всякую (периодическую или непериодическую) функцию *f(x),* удовлетворяющую на отрезке [-*l*; *l*] условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x,$$

где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n t\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\omega_n t\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox в том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать на любом конечном промежутке [-*l*; *l*]

- функция *f(x)* удовлетворяет условиям теоремы Дирихле;
- сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = M < \infty.$$

При этом функция *f(x)* называется ***абсолютно интегрируемой*** на всей числовой оси.

Подставляя в ряд Фурье значения коэффициентов a_n и b_n, получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t)(\cos\omega_n t \cdot \cos\omega_n x + \sin\omega_n t \cdot \sin\omega_n x)\,dt,$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\omega_n (t - x)\,dt.$$

Будем теперь неограниченно увеличивать *l*.

Первое слагаемое

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt$$

в правой части равенства при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt.$$

Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$

принимает значения

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \omega_3 = \frac{3\pi}{l}, \ldots,$$

образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l} \; (\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n,$$

при этом $\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$.

Итак

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\cdot\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\right)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

где

$$\varphi(\omega_n) = \int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt,\ \omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$$

Можно показать, что полученная сумма является интегральной суммой для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos\omega(t-x)\,dt, \quad \omega \in (0;+\infty)$$

Переходя в этой сумме к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi(\omega)\,d\omega,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \qquad (4.1)$$

Определение.

Эта формула называется ***формулой Фурье*** а интеграл в правой части формулы

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$$

называется ***интегралом Фурье*** для функции *f(x)*

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции f(x).

В точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Приведенные выше рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы

Теорема

Пусть функция $f(x)$

1. Является ***абсолютно интегрируемой*** на всей числовой оси.

2. На любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле

Тогда на интервале (-∞, ∞)
- в точках непрерывности функция $f(x)$ справедливо ее представление интегралом Фурье;
- в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формулу Фурье можно переписать в другом виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega (t - x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\cos \omega t \cdot \cos \omega x + \sin \omega t \cdot \sin \omega x \right) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt \cdot \cos \omega x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt \cdot \sin \omega x \right)$$

То есть

$$\boxed{f(x)=\int\limits_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega,}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.\end{aligned}}$$

Таким образом, можно провести аналогию между **рядом Фурье** и **интегралом Фурье**:
в обоих случаях функция *f(x)* раскладывается на сумму гармонических составляющих.

Однако, ряд Фурье суммируется по индексу *n*, принимающему дискретные значения n= 1,2,3,..., в интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной ω .

Замечания

1.Если функция *f(x)* — *четная,* то формула Фурье принимает вид

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

2.Если функция *f(x)* задана лишь на промежутке (0; + ∞), то ее можно продолжить на промежуток (- ∞;0) разными способами, в частности — четным или нечетным образом:

В первом случае она будет представлена формулой

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

во втором —формулой

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

3.Формулу Фурье можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega), \qquad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega).$$

Тогда, в случае четной функции,

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\widetilde{A}(\omega)\cos\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{A}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\widetilde{B}(\omega)\sin\omega x\,d\omega, \quad \text{где} \quad \widetilde{B}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Пример

Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ e^{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Функция *f(x)* нечетная, применим формулу

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x \, d\omega, \quad \text{где} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Решение: Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке (- ∞; + ∞):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = 2.$$

Вычислим функцию *B(ω)*

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

и получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2} \cdot \sin \omega x \, d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Замечание.

Отметим, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1 + \omega^2} \, d\omega.$$

С другой стороны

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Таким образом

$$\int_0^\infty \frac{y \sin y}{1+y^2}\,dy = f(1)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

То есть, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов

Преобразование Фурье

Интеграл Фурье в комплексной форме

Интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$$

в комплексной форме может быть представлен в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt;$$

или в симметричной форме

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right).$$

Обозначим

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt. \qquad (4.2)$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (4.3)$$

Функция $F(\alpha)$ называется **образом Фурье** (спектральной характеристикой, спектром), заданной на (- ∞,+ ∞) функции *f(x),* называемой **прообразом** (или оригиналом).

Формула перехода от функции-оригинала *f(x)* к функции-образу *F(α)* называется ***преобразованием Фурье***

Применительно к преобразованию Фурье теорема о достаточных условиях представления функции *f(x)* с помощью интеграла Фурье может быть сформулирована следующим образом

Теорема.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси Ox и удовлетворяет достаточным условиям Дирихле на каждом конечном отрезке $[-l,l]$. Тогда:

а)образ Фурье $F(\alpha)$, определяемый формулой

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt\,.$$

существует (интеграл в правой части равенства сходится);

б)справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha .$$

Для четной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\cos\alpha x d\alpha\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)$$

Для нечетной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sin\alpha x d\alpha\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right),$$

Обозначим

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \; ;$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \, .$$

Аналогично

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$$

Функция

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \; ;$$

называется ***косинус-преобразованием Фурье*** для функции *f(x)*

Функция

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt$$

называется ***синус-преобразованием Фурье*** для функции *f(x)*

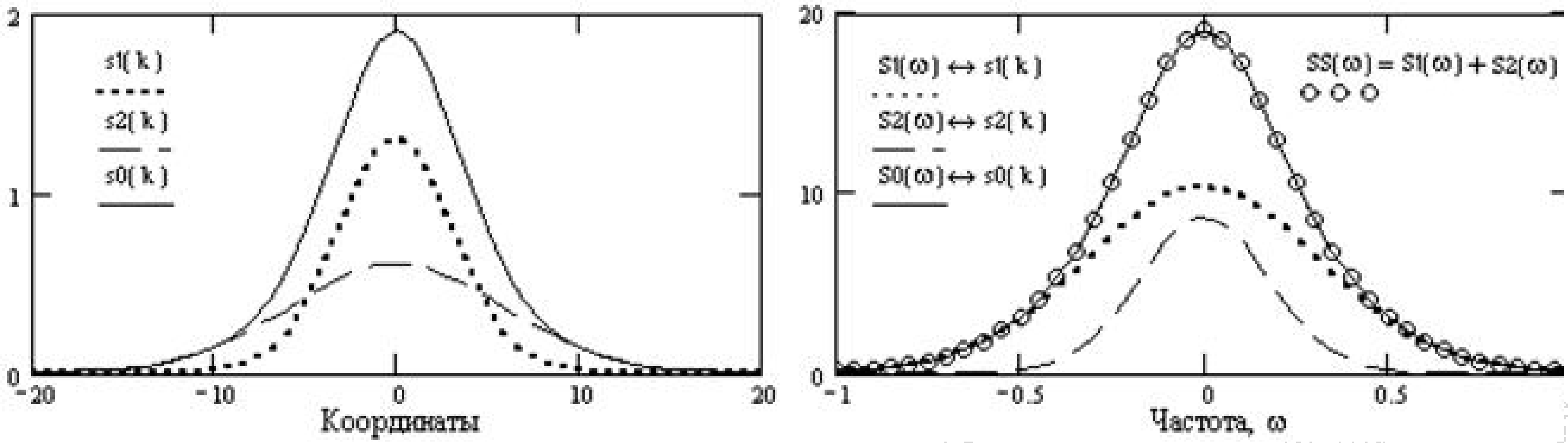
Свойства преобразований Фурье

Свойствами преобразований Фурье определяется взаимное соответствие трансформации сигналов и их спектров.

***1. Линейность*.** Преобразование Фурье относится к числу линейных интегральных операций, т.е. спектр суммы сигналов равен сумме спектров этих сигналов.

$$\sum_n a_n s_n(t) \Leftrightarrow \sum_n a_n S_n(\omega).$$

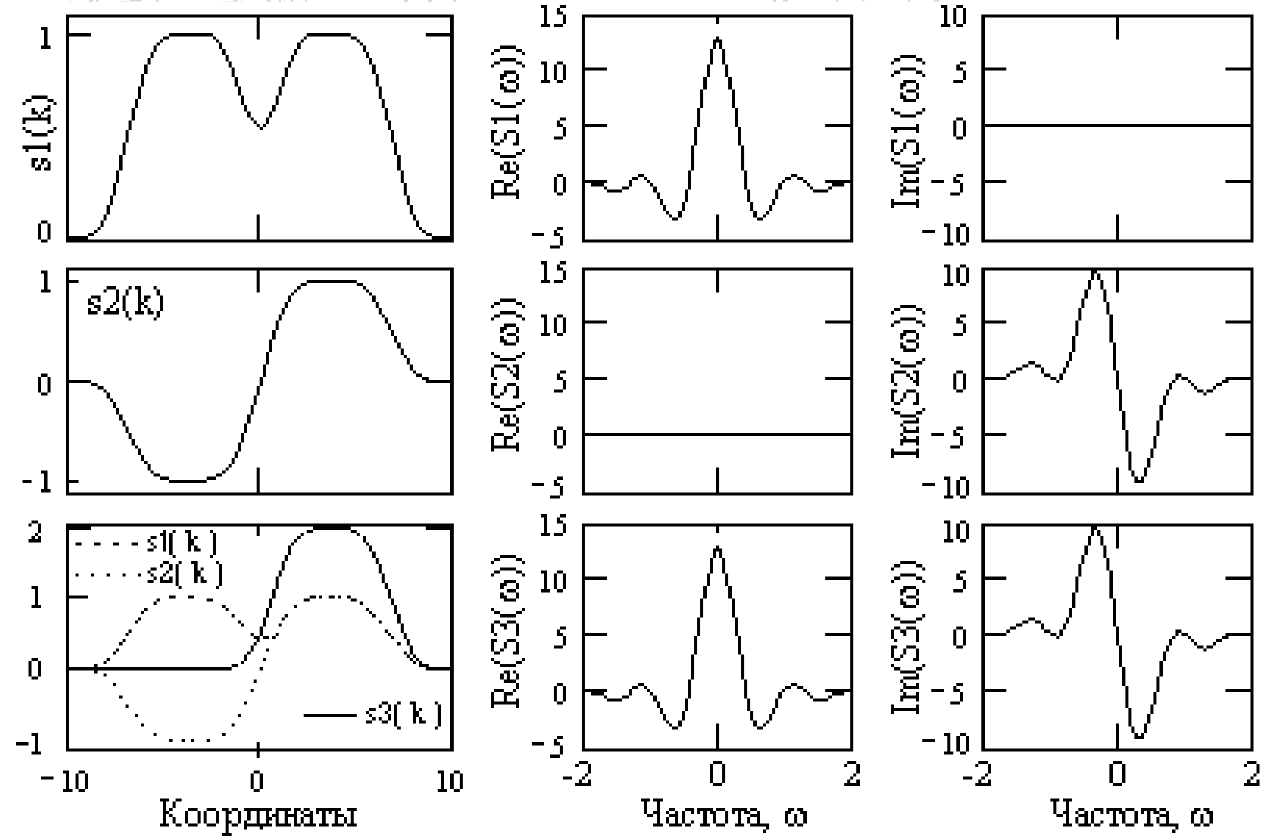
Пример суммирования сигналов и его отображения в суммирования спектров



Сигналы и их спектры. $s0(k)=s1(k)+s2(k) \Leftrightarrow S1(\omega)+S2(\omega) = S0(\omega)$.

Сигнал s(t)	Спектр S(ω)
Четный	Вещественный, четный
Нечетный	Мнимый, нечетный
Произвольный	Действительная часть – четная. Мнимая часть - нечетная

2. Свойства четности преобразования определяются косинусными (четными, действительными) и синусными (нечетными, мнимыми) частями разложения и подобием прямого и обратного преобразований.



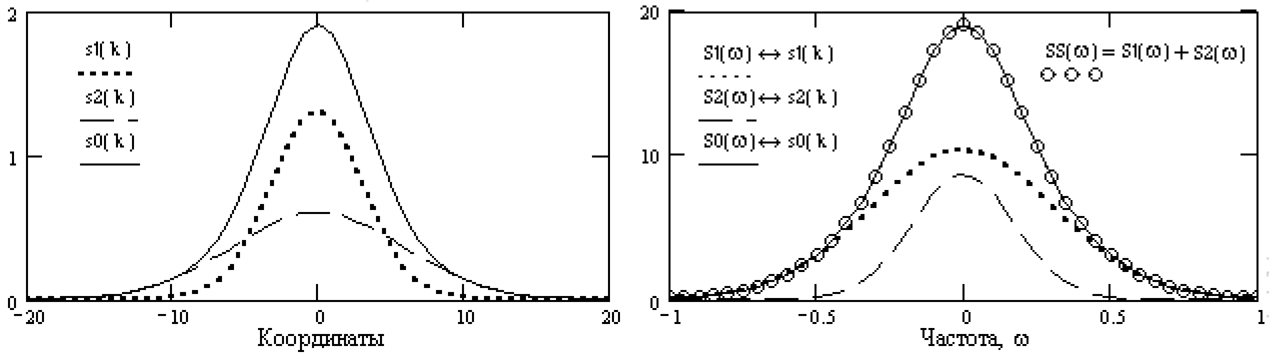
Свойства четности преобразования.

3. Изменение аргумента функции (сжатие или расширение сигнала) приводит к обратному изменению аргумента ее фурье-образа и обратно пропорциональному изменению его модуля. Действительно, если s(t) ⇔ S(ω), то при изменении длительности сигнала с сохранением его формы (растяжении сигнала по временной оси), т.е. для сигнала с новым аргументом s(x) = s(at) при x=at, получаем:

$$s(at) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(at)\exp(-j\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (1/a)\, s(x)\exp(-jx\omega/a)\,dx$$

s(at) ⇔ (1/a) S(ω/a). (4.3.2')

Если под аргументом функции и ее спектра понимать определенные физические единицы, например, время - частота, то отсюда следует: чем короче по своей длительности сигнал, тем шире по частоте его спектр, и наоборот. Это можно наглядно видеть на рис. 4.3.1. для сигналов s1(k) и s2(k) и их спектров S1(ω) и S2(ω).



От изменения аргумента функций следует отличать изменение масштаба представления функций. Изменение масштаба аргументов изменяет только оцифровку числовых осей отображения сигналов и их спектров, но не изменяет самих сигналов и спектров. Так, при масштабе оси времен t=1 секунда, масштаб оси частот f=1/t=1 герц, а при t=1 мксек f=1/t=1 МГц (t=at, f=1/at, $a=10^{-6}$).

4. Теорема запаздывания. Запаздывание (сдвиг, смещение) сигнала по аргументу функции на интервал t_o приводит к изменению фазочастотной функции спектра (фазового угла всех гармоник) на величину $-\omega t_o$ без изменения модуля (амплитудной функции) спектра. Применяя замену переменной $t-t_o = x$, получаем:

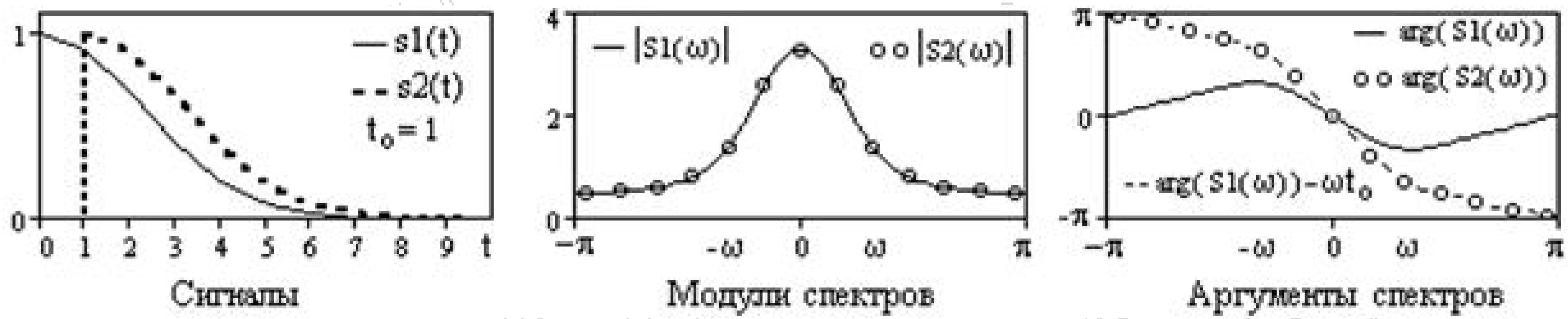
$$s(t-t_o) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_o)\exp(-j\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-j\omega x)\exp(-j\omega t_o)\,dx = S(\omega)\exp(-j\omega t_o)$$

Совершенно очевидно, что **амплитуды гармоник** сигнала при его сдвиге изменяться не должны. С учетом того, что $|\exp(-j\omega t_o)|=1$

$$|S(\omega)\exp(-j\omega t_o)| = |S(\omega)|.$$

Фазовый спектр сдвигается на $-\omega t_o$ с линейной зависимостью от частоты:

$S(\omega)\exp(-j\omega t_o) = R(\omega)\exp[j(\varphi(\omega)]\exp(-j\omega t_o) = R(\omega)\exp[j(\varphi(\omega)-\omega t_o)]$.

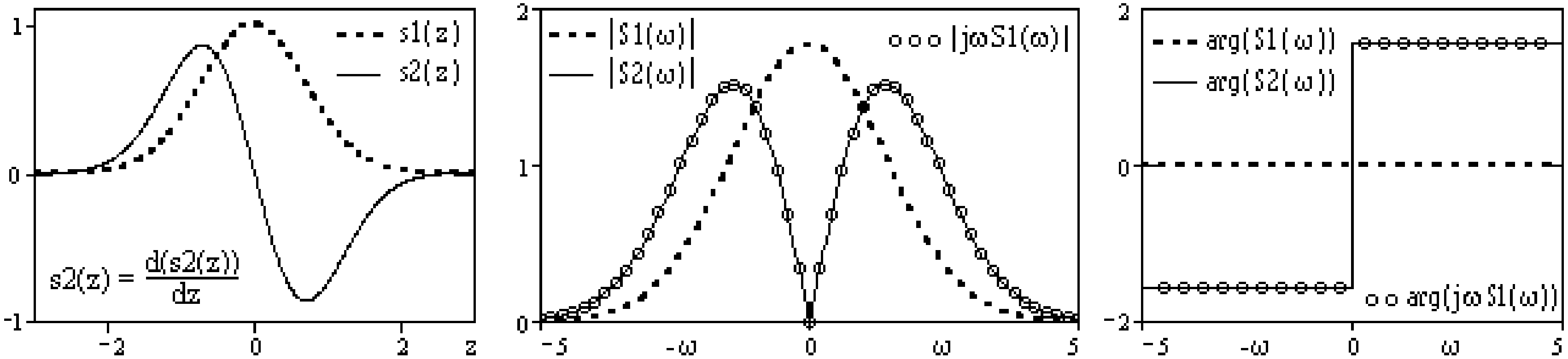


5. Преобразование производной (дифференцирование сигнала):

$$s(t) = d[y(t)]/dt = d\left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega\right]/dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\,[d(\exp(j\omega t))/dt]\,d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} j\omega\, Y(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega \Leftrightarrow j\omega\, Y(\omega).$$

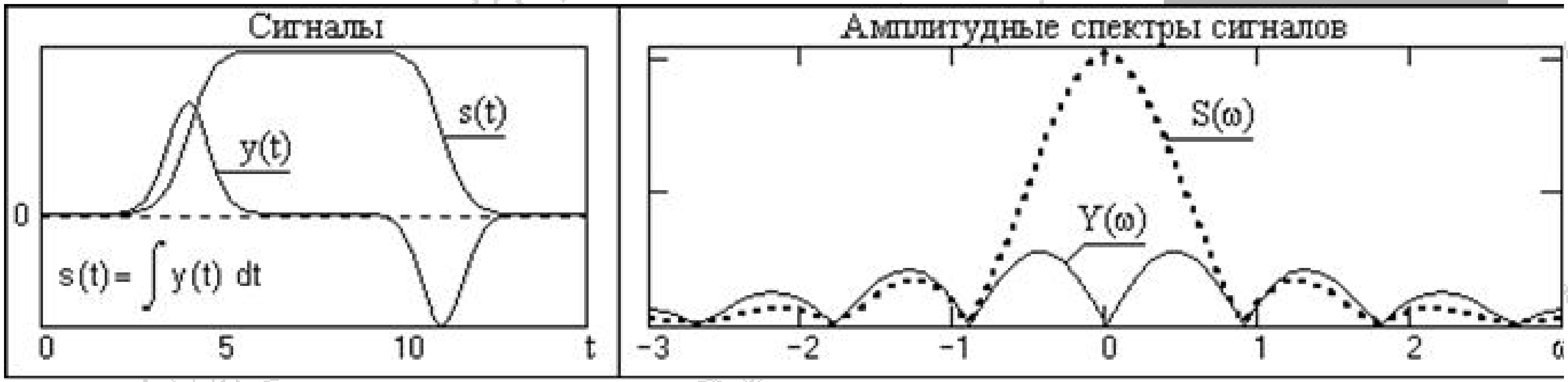
Таким образом, **дифференцирование сигнала отображается в спектральной области простым умножением спектра сигнала на *оператор дифференцирования сигнала в частотной области* jω,** что эквивалентно дифференцированию каждой гармоники спектра. Умножение на jω приводит к обогащению спектра производной сигнала высокочастотными составляющими (по сравнению с исходным сигналом) и уничтожает составляющие с нулевой частотой.



Сигналы — Модули спектров — Аргументы спектров

6. Преобразование интеграла сигнала в частотной области при известном спектре сигнала может быть получено из следующих простых соображений. Если имеет место $s(t) = d[y(t)]/dt \Leftrightarrow j\omega\, Y(\omega) = S(\omega)$, то должна выполняться и обратная операция: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt \Leftrightarrow Y(\omega) = S(\omega)/j\omega$. Отсюда следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt \Leftrightarrow (1/j\omega)S(\omega).$$



Сигналы и амплитудные спектры сигналов.

Оператор интегрирования в частотной области (1/jω) при ω>1 ослабляет в амплитудном спектре высокие частоты и при ω<1 усиливает низкие. Фазовый спектр сигнала смещается на -90^0 для положительных частот и на 90^0 для отрицательных. Пример модуля спектра

7. Преобразование свертки сигналов $y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$:

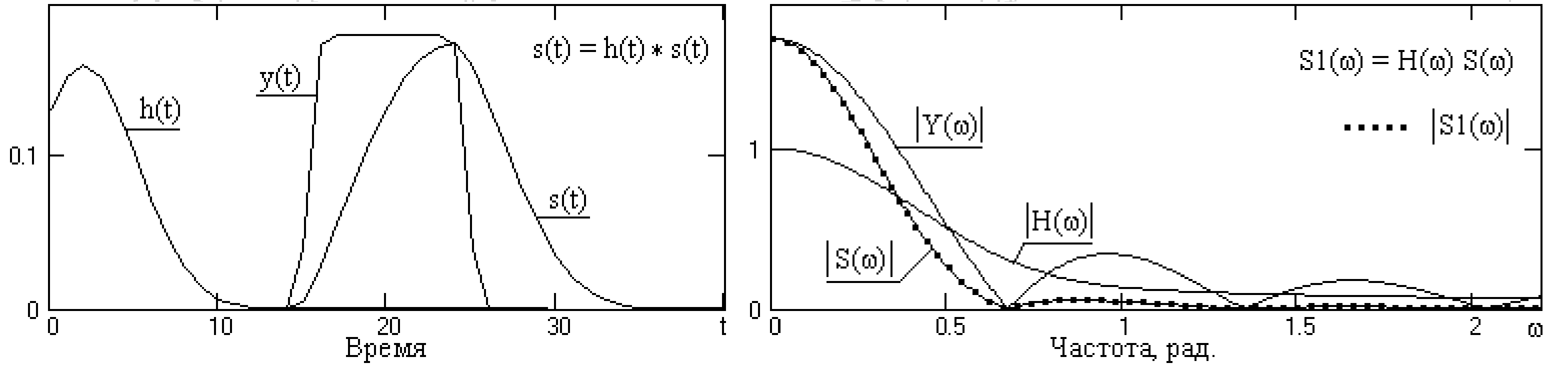
$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j\omega t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, h(t-\tau) \exp(-j\omega t)\, d\tau dt.$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j\omega t)\, dt.$$

По теореме запаздывания: $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j\omega t)\, dt = H(\omega) \exp(-j\omega\tau)$.

Отсюда: $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, s(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau = H(\omega) \cdot S(\omega)$.

$s(t) * h(t) \Leftrightarrow S(\omega)\, H(\omega)$. (4.3.8)



Пример выполнения свертки в частотной.

Отметим, что частотное представление H(ω) импульсного отклика h(t) линейной системы (или соответствующей линейной операции) имеет смысл частотной передаточной функции системы и позволяет определить сигнал на выходе системы (в частотной форме представления) при задании произвольного сигнала (в частотной форме) на ее входе. По существу, **функция H(ω) представляет собой распределение по частоте коэффициента пропускания частотных составляющих сигнала с входа на выход системы (операции).**

Таким образом, ***свертка функций в координатной форме отображается в частотном представлении произведением фурье-образов этих функций***.

Это положение имеет фундаментальное значение в практике обработки данных.

Любая линейная система обработки данных (информационных сигналов) реализует определенную операцию трансформации сигнала, т.е. выполняет операцию свертки входного сигнала s(t) с оператором системы $h(\tau)$. С использованием преобразования свертки эта операция может производиться как с динамической, так и с частотной формой представления сигналов. При этом обработка данных, представленных в цифровой форме, производится, как правило, в частотной области, т.к. может быть на несколько порядков выше по производительности, чем во временной области. Она представляет собой последовательность следующих операций.

1. Перевод сигнала в частотную область: $s(t) \Leftrightarrow S(\omega)$.

2. Умножение спектра сигнала на передаточную функцию системы: $Y(\omega) = H(\omega)\cdot S(\omega)$.

3. Перевод спектра обработанного сигнала во временную область: $Y(\omega) \Leftrightarrow y(t)$.

8. Преобразование произведения сигналов y(t) = s(t)·h(t):

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, h(t) \exp(-j\omega t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega') \exp(j\omega' t)\, d\omega'\right] dt =$$

$$= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) H(\omega') \exp(-j(\omega-\omega')t)\, d\omega' dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega')\, d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j(\omega-\omega')t)\, dt =$$

$$= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega') S(\omega-\omega')\, d\omega' = (1/2\pi)\, H(\omega) * S(\omega).$$

Таким образом, ***произведение функций в координатной форме отображается в частотном представлении сверткой фурье-образов этих функций***, с нормировочным множителем (1/2π)

9. Спектры мощности. Временная функция мощности сигнала в общей форме определяется выражением:

$$w(t) = s(t)\, s^*(t) = |s(t)|^2.$$

где $s^*(t)$ величина , сопряженная с $s^*(t)$

Спектральная плотность мощности, соответственно, равна преобразованию Фурье произведения $s(t)\cdot s^*(t)$, которое отобразится в спектральном представлении сверткой Фурье-образов этих функций:

$$W(f) = S(f) * S^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, S^*(f-v)\, dv. \quad (4.3.10)$$

Но для всех текущих значений частоты f интеграл в правой части этого выражения равен произведению $S(f)\cdot S^*(f)$, так как для всех значений сдвига $v \neq 0$ в силу ортогональности гармоник $S(f)$ и $S^*(f-v)$ значения их произведения равны нулю. Отсюда:

$$W(f) = S(f) * S^*(f) = |S(f)|^2.$$

Спектр мощности - вещественная неотрицательная четная функция, которую очень часто называют энергетическим спектром. Спектр мощности, как квадрат модуля спектра сигнала, не содержит фазовой информации о частотных составляющих, а, следовательно, восстановление сигнала по спектру мощности невозможно. Это означает также, что сигналы с различными фазовыми характеристиками могут иметь одинаковые спектры мощности. В частности, сдвиг сигнала не отражается на его спектре мощности.

10. Равенство Парсеваля. Полная энергия спектра сигнала:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df. \quad (4.3.12)$$

Так как координатное и частотное представление по существу только разные математические отображения одного и того же сигнала, то равной должна быть и энергия сигнала в двух представлениях, откуда следует равенство Парсеваля:

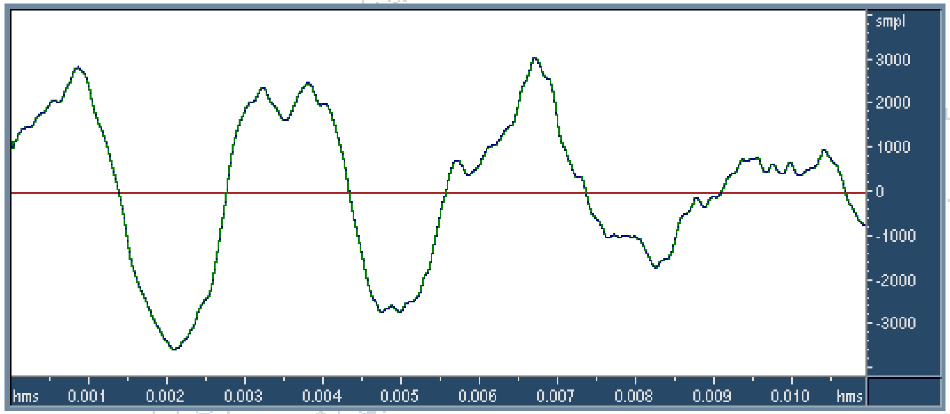
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df,$$

т.е. энергия сигнала равна интегралу модуля его частотного спектра - сумме энергий всех частотных составляющих сигнала.

Использование спектральных характеристик при обработке сигналов

- Сигнал – скалярная функция от одного или нескольких аргументов.

Примеры сигналов



s(t) – звук

f(x,y) – изображение

Оцифровка сигналов

- При каких условиях по цифровому сигналу можно точно восстановить исходный аналоговый?
- Предположим, что значения амплитуд в цифровом сигнале представлены точно.

- Рассмотрим спектр аналогового сигнала:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

x(t) – исходный сигнал
X(ν) – спектр, т.е. коэффициенты при гармониках с частотой *ν*

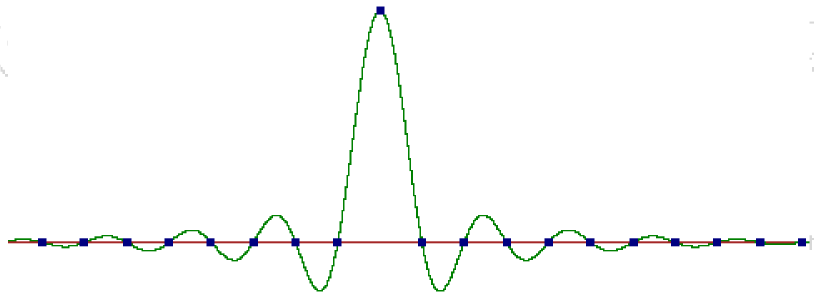
Теорема Котельникова

- Пусть

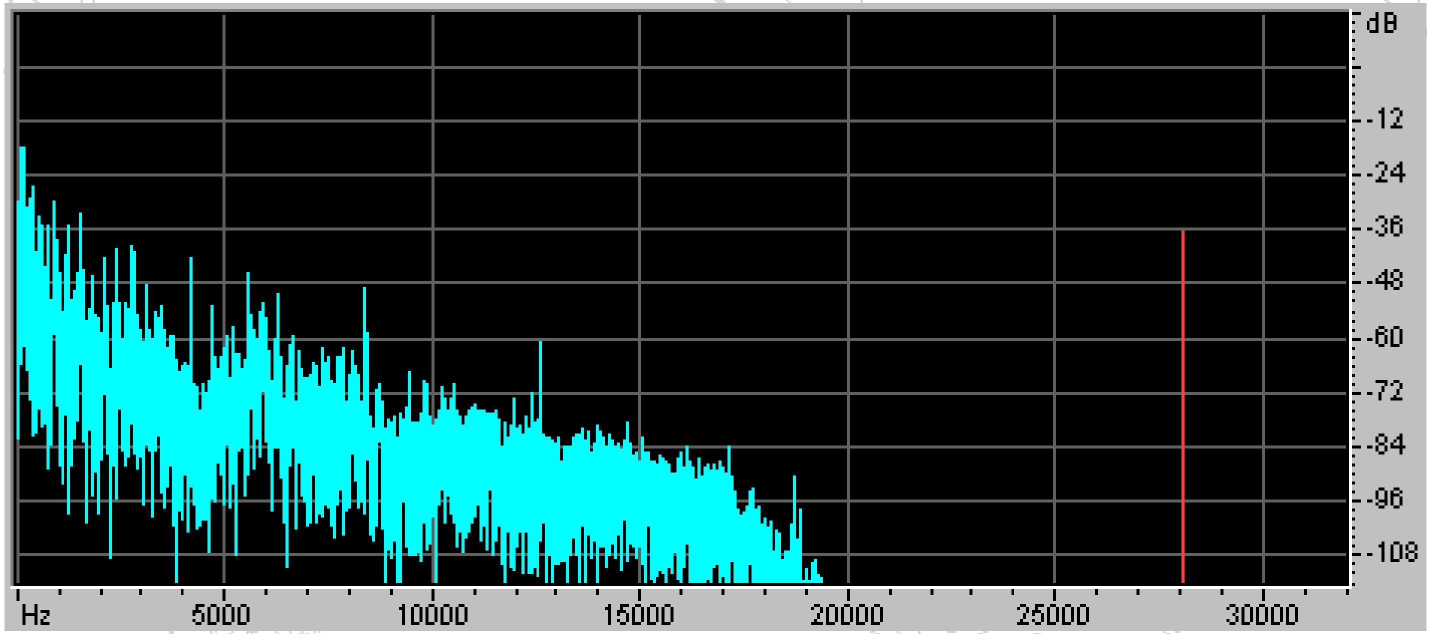
1. спектр сигнала $x(t)$ не содержит частот выше F, т.е. $X(v)=0$ за пределами отрезка $[-F, F]$
2. дискретизация сигнала $x(t)$ производится с частотой F_s, т.е. в моменты времени nT, здесь $T = F_s^{-1}$
3. $F_s \geq 2F$

Тогда исходный аналоговый сигнал *x(t)* можно точно восстановить из его цифровых отсчетов *x(nT),* пользуясь интерполяционной формулой

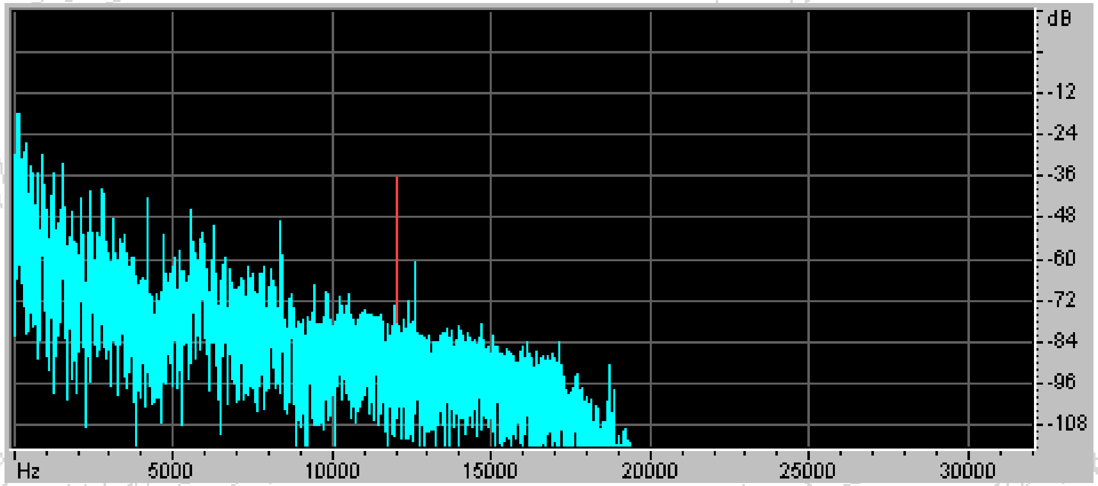
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\cdot Sinc(t-nT) \qquad Sinc(t)=\frac{\sin \pi F_s t}{\pi F_s t}$$



- Что будет, если условия теоремы Котельникова не выполнены?
- Пусть звук не содержит частот выше 20 кГц. Тогда, по теореме Котельникова, можно выбрать частоту дискретизации 40 кГц.
- Пусть в звуке появилась помеха с частотой 28 кГц. Условия теоремы Котельникова перестали выполняться.


dB
-12
-24
-36
-48
-60
-72
-84
-96
-108
Hz
5000
10000
15000
20000
25000
30000

- Проведем дискретизацию с частотой 40 кГц, а затем – восстановим аналоговый сигнал sinc-интерполяцией.

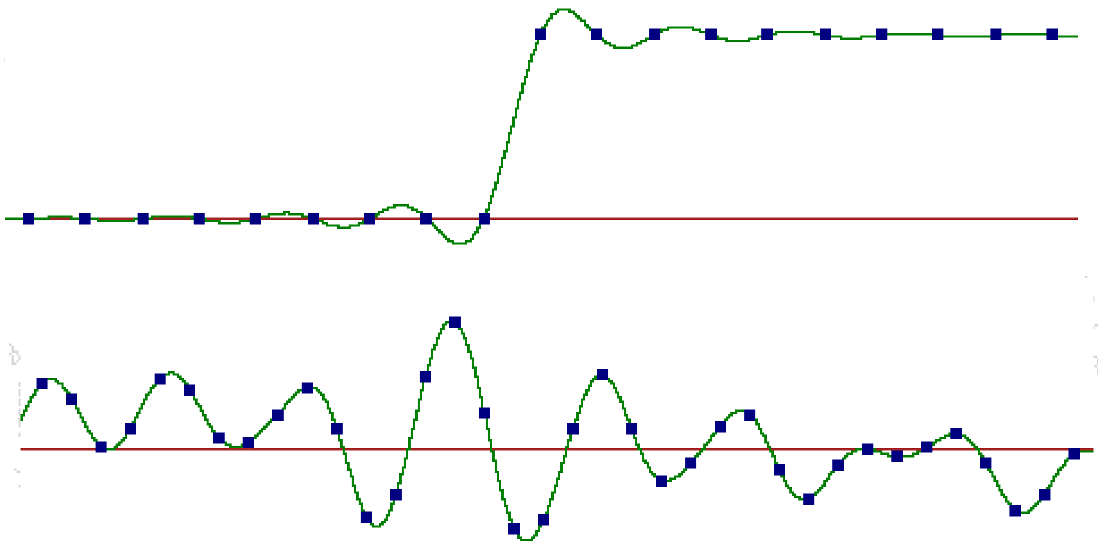


- Помеха переместилась в слышимый диапазон.

- Как избежать появления помех в сигнале?
- Применить перед оцифровкой фильтр
  - Он подавит все помехи выше половины частоты дискретизации (выше 20 кГц) и пропустить весь сигнал ниже 20 кГц.
  - После этого условия теоремы Котельникова будут выполняться и помеха не возникнет.
  - Следовательно, по цифровому сигналу можно будет восстановить исходный аналоговый сигнал.

Реконструкция аналоговых сигналов. Sinc-интерполяция.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot Sinc(t - nT)$$



Эффект Гиббса

Цифровые отсчеты

sinc-интерполяция

другая интерполяция