Лекция 3

КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА РЯДА ФУРЬЕ

Формулы Эйлера

При вещественном показателе функция e^x может быть представлена в виде ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Определим аналогично

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \dots$$

Отделяя вещественные и мнимые члены, имеем отсюда

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right)$$

и, вспомнив разложения cos$y$ и sin$y$ в ряд, определяем

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y \qquad e^{-yi} = \cos y - i \sin y$$

Эти формулы определяют показательную функцию при чисто мнимом показателе

Отсюда и получаются ***формулы Эйлера***, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

Эти формулы дают новую ***показательную форму комплексного числа,***
имеющего модуль r и аргумент φ:

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{\varphi i}$$

Показательную функцию при любом комплексном показателе $x + yi$ определяем формулой

$$e^{x+yi} = e^{x}e^{yi} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

Т.е. модуль числа e^{x+yi} будем считать равным e^{x}, а аргумент равным y

Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Преобразуем ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

и его коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

к комплексной форме.

Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Подставив эти выражения в обычный тригонометрический ряд находим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

где

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Используя выражения для c_n и c_{-n} и формулы для коэффициентов a_n, b_n получим

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

То есть,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

Аналогично

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + i \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Вычисление c_0 производится по формуле

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Формулу для разложения функции в ряд Фурье можно переписать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \qquad (3.1)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Коэффициенты такого ряда можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Равенство (3.1)называется ***комплексной формой ряда Фурье функции f(x),***

а числа c_n, — ***комплексными коэффициентами ряда Фурье.***

Заметим, для полноты картины

$$a_n = c_n + c_{-n}\,, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Случай произвольного периода

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-l; l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

а коэффициенты вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На случай комплексной формы переносятся все свойства, полученные для обычных рядов.

Прежде всего это теорема Дирихле.

Если 2π-периодическая функция *f(x)* на отрезке [-π; π] удовлетворяет условиям Дирихле:

1. *f(x) кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;*

2. *f(x) кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна,*

то соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке

Отметим, что при разложении четных и нечетных функций удобно использовать ***вещественную*** форму ряда Фурье.

Если функция $f(x)$ ***четная,*** то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $f(x)$ ***нечетная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Некоторые дополнительные сведения о рядах Фурье

Система функций e^{-inx} является полной ортонормированной системой в пространстве функций удовлетворяющих условиям Дирихле на отрезке $[a,b]$.

Это вытекает из равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \delta_{nm}$$

δ_{nm} - символ Кронекера $\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$

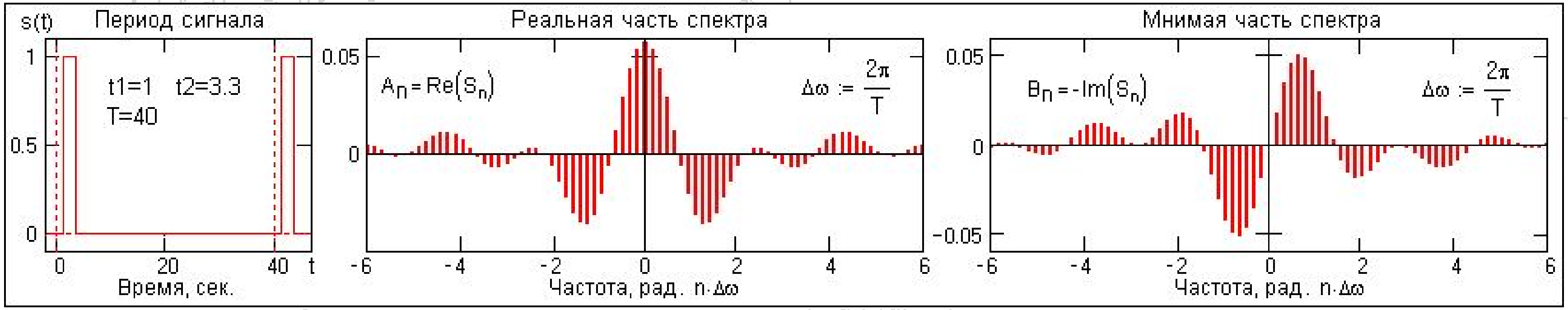
и теоремы Дирихле

С чисто математических позиций множество функций exp($in\Delta\omega t$), $-\infty < n < \infty$ образует бесконечномерный базис линейного пространства L_2[a,b] ортогональных синус-косинусных функций, а коэффициенты c_n по представляют собой проекции сигнала s(t) на эти базисные функции. Соответственно, сигнал s(t) в форме ряда Фурье– это бесконечномерный вектор в пространстве $L_2[a,b]$, точка с координатами c_n по базисным осям пространства exp($in\Delta\omega t$).

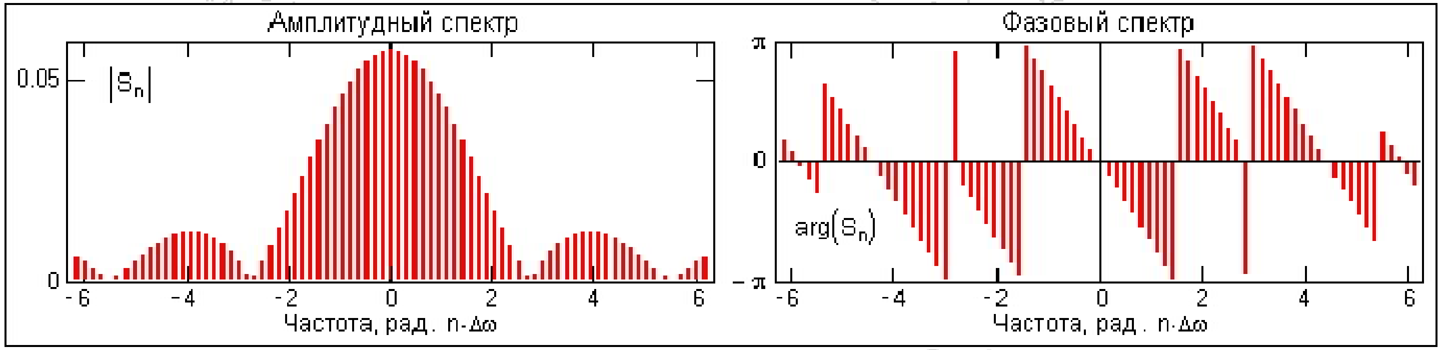
Ряд Фурье представляет собой ансамбль комплексных экспонент $\exp(jn\Delta\omega t)$ с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Функцию весовых коэффициентов принято называть **комплексным спектром периодического сигнала или фурье-образом функции** Спектр периодического сигнала является дискретной функцией, т.к. он определен только для целых значений n с шагом по частоте, обратным периоду: $\Delta\omega = 2\pi/T$ (или $\Delta f = 1/T$). Первую частотную составляющую спектра при n = 1, равную $\omega_1 = 1\cdot \Delta\omega = 2\pi/T$ (или $f_1 = 1/T$), называют *основной* частотой сигнала (первой гармоникой), остальные частоты дискретного спектра $n\omega_1$ при $n>1$ называют гармониками сигнала. Значения $S(n\Delta\omega)$ по положительным и отрицательным значениям n являются комплексно сопряженными. Шаг по частоте $\Delta\omega$ между двумя соседними синусоидами из разложения Фурье называется ***частотным разрешением*** спектра.

Разложение на косинусную и синусную составляющие позволяют выразить комплексный спектр в виде действительной и мнимой частей

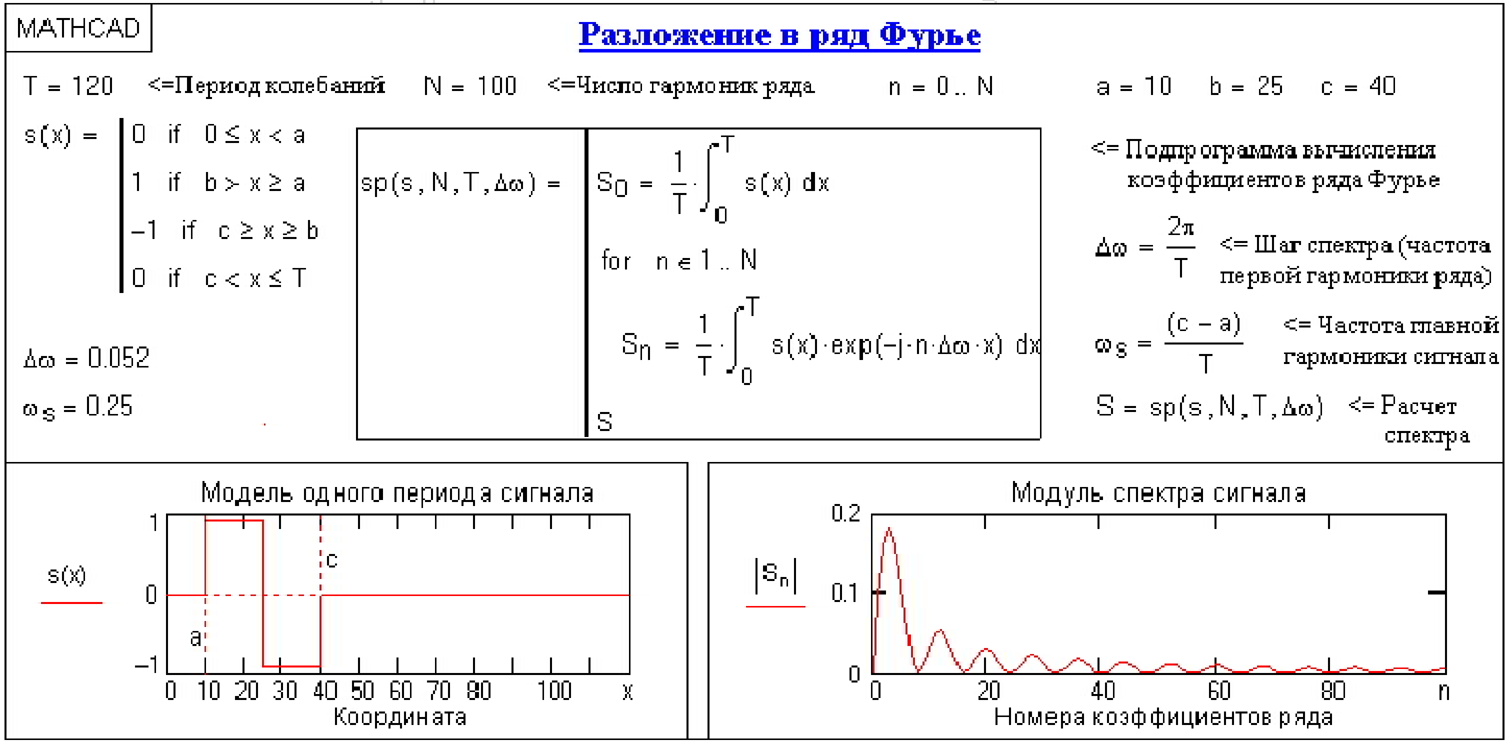
На рис. приведен пример периодического сигнала (прямоугольный импульс на интервале повторяющийся с периодом T=40) и форма действительной и мнимой части его спектра.



Комплексные числа могут быть представлены в виде модулей и аргументов комплексной экспоненты, что дает следующую форму представлентя комплексного спектра:



На рисунке показано разложение в комплексный ряд Фурье модельного сигнала, выполненное в среде Mathcad. Модель сигнала задана с тремя разрывами первого рода (скачками). Любой скачок функции содержит все частоты диапазона до бесконечности, в связи с чем ряд Фурье также бесконечен и очень медленно затухает.



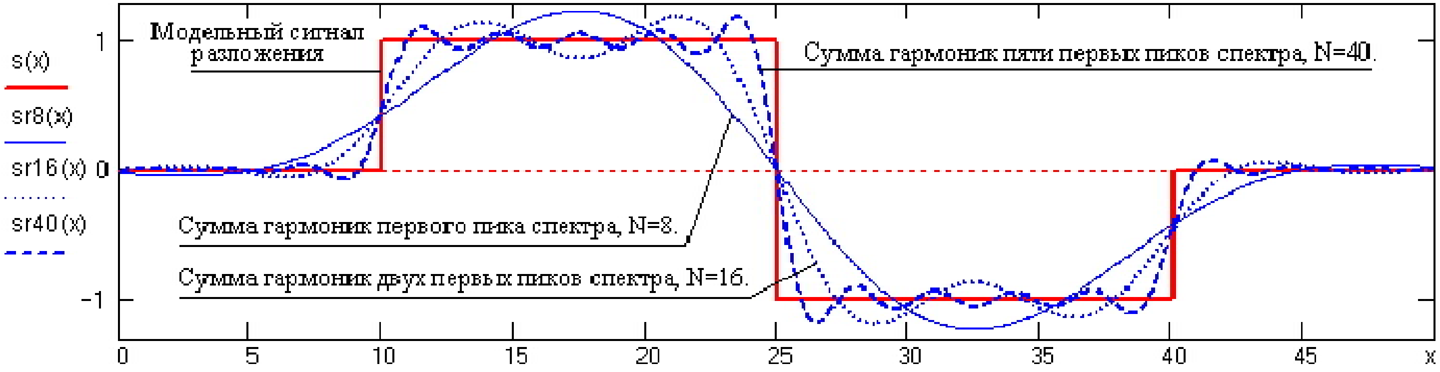
MATHCAD

Реконструкция сигнала по ограниченному ряду Фурье

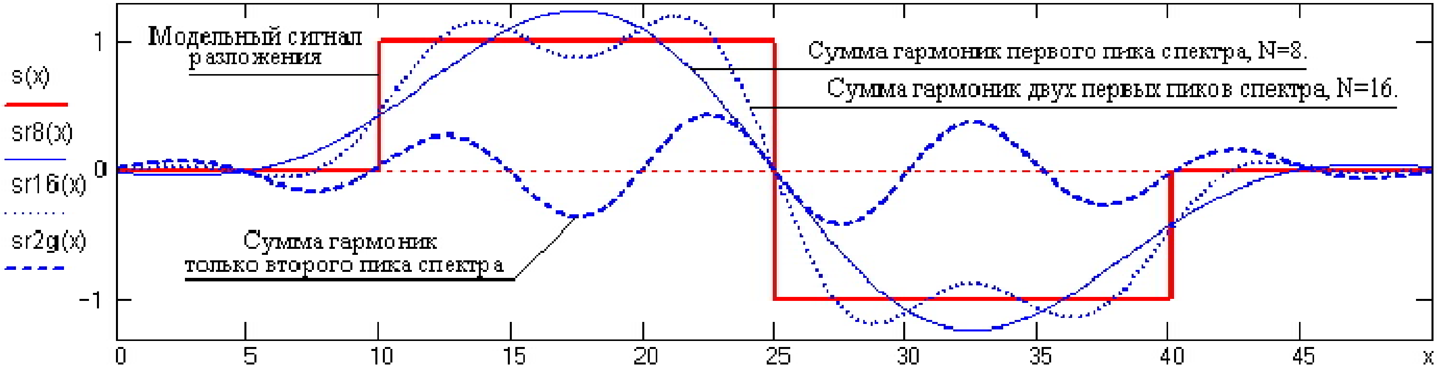
$$sr(S,\Delta\omega,n1,n2,x) = S_0 + \sum_{n=n1}^{n2}\left(S_n\cdot \exp(j\cdot n\cdot\Delta\omega\cdot x) + \overline{S_n}\cdot\exp(-j\cdot n\cdot\Delta\omega\cdot x)\right)$$ <= Формула реконструкции сигнала ограниченным рядом Фурье

$sr8(x) = sr(S,\Delta\omega,1,8,x)$ <= Реконструкция сигнала по S_0 и восьми гармоникам первого пика модуля спектра, N = 8.

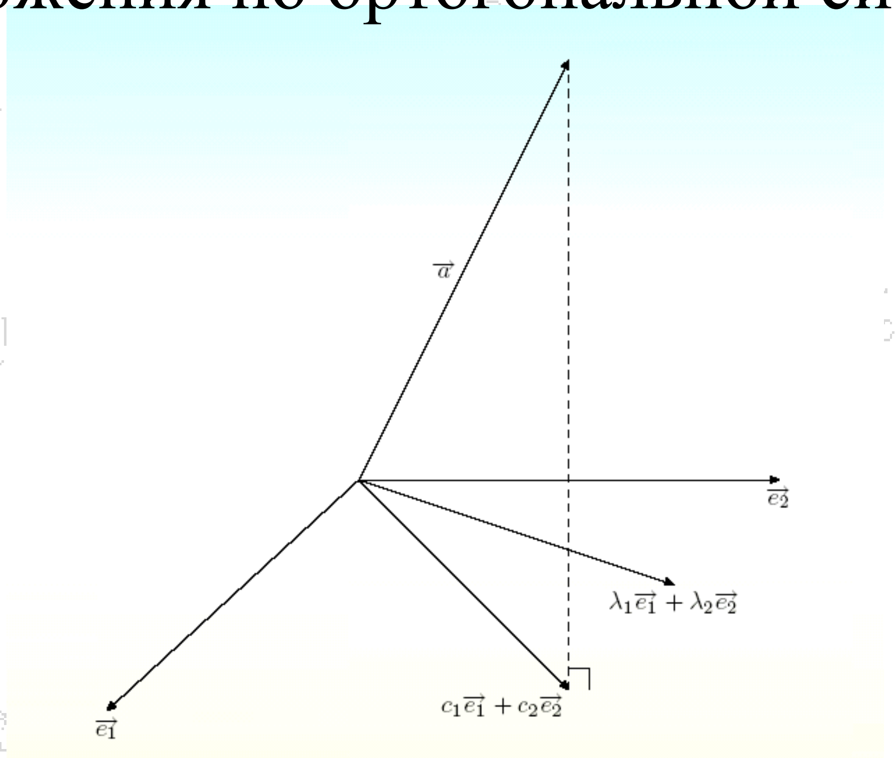
$sr16(x) = sr(S,\Delta\omega,1,16,x)$ $sr40(x) = sr(S,\Delta\omega,1,40,x)$ <= То же, по 2 и 5 первым пикам спектра, N = 16, N = 40.



$sr2g(x) := sr(S,\Delta\omega,9,16,x)$ <= Сигнал по группе гармоник только второго пика спектра, n = 9 - 16.



Отрезки ряд Фурье в определенном смысле наилучшим образом приближают функцию. Это можно увидеть из следующего чертежа, если вспомнить, что ряд Фурье получается из разложения по ортогональной системе функций.



Свойства коэффициентов ряда Фурье

Для произвольной кусочно-непрерывной, периодической с периодом 2π функции имеет место неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\,,$$

Неравенство Бесселя

Если функция разложима в ряд Фурье, то имеет место равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Равенство Парсеваля

Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Используя формулу Парсеваля получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx,$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi},$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3}\right),$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{6}.$$

В электротехнике и радиотехнике члены ряда

$$c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}}$$

называются ***гармониками*** коэффициенты c_n — комплексными ***амплитудами*** гармоник, а числа

$$\varpi_n = \frac{\pi n}{l}$$

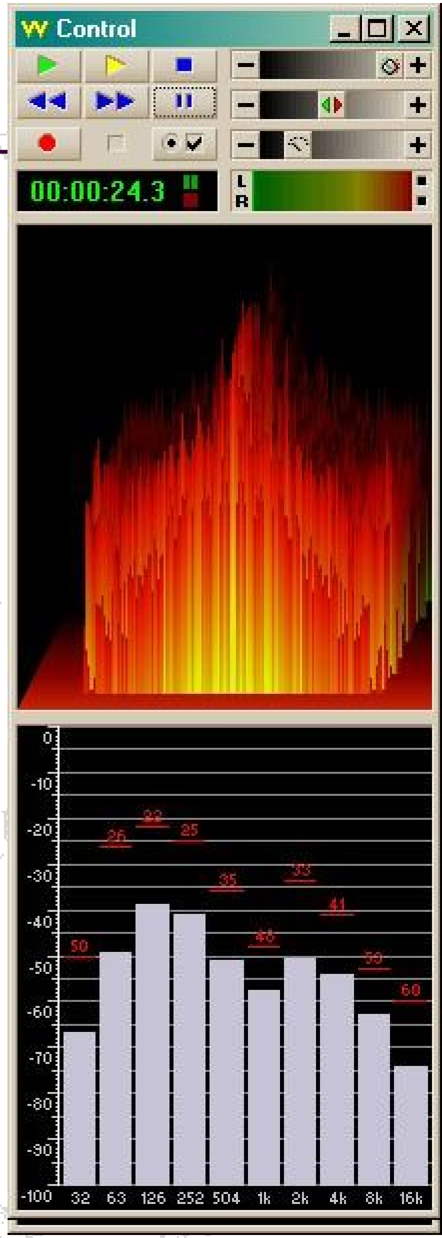
волновыми числами функции $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}.$$

Совокупность величин $\{c_1, c_2, ;\ldots, c_n, \ldots\}$ называется ***амплитудным (частотным) спектром***.

Графически спектр изображается в виде вертикальныхотрезков длиной c_n, расположенных в точках

$$\varpi_n = \frac{\pi n}{l}$$

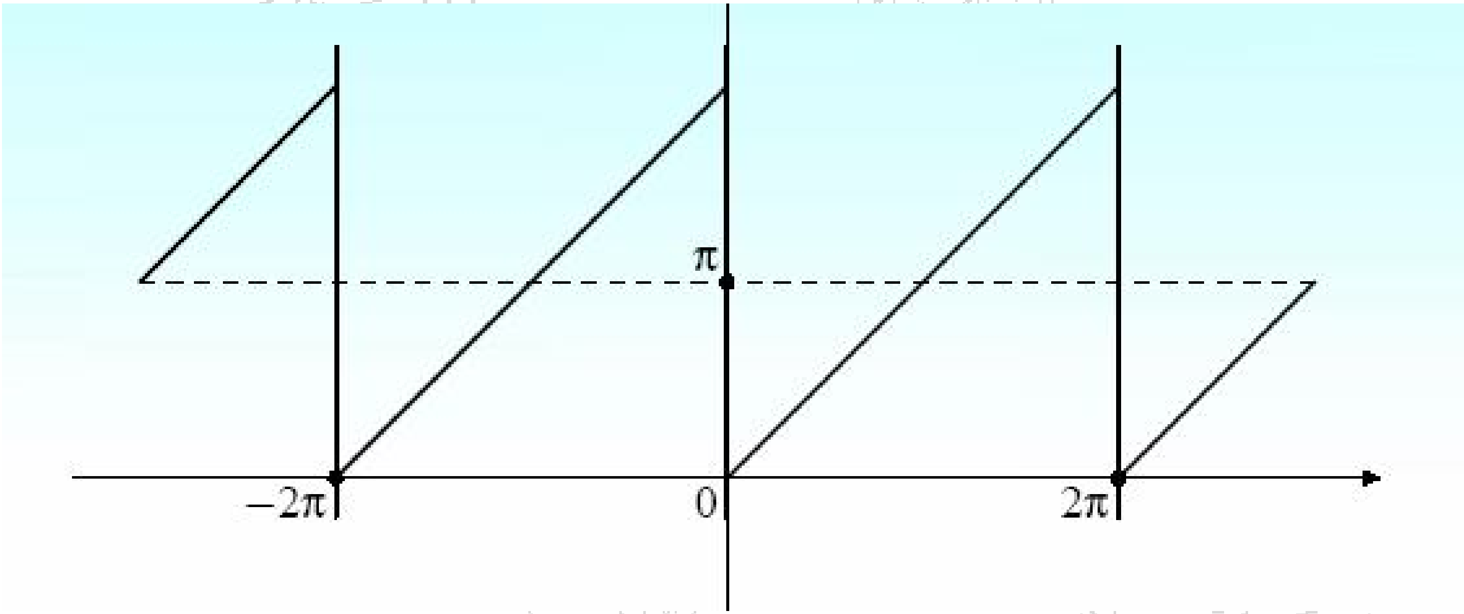
числовой оси


Control
00:00:24.3
L
R
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
32 63 126 252 504 1k 2k 4k 8k 16k

Некоторые особенности вычислений рядов Фурье

В точках разрыва ряд Фурье сходится к исходной функции очень неравномерно. Если x_0 точка разрыва, а s_n – частичная сумма ряда имеет место соотношение

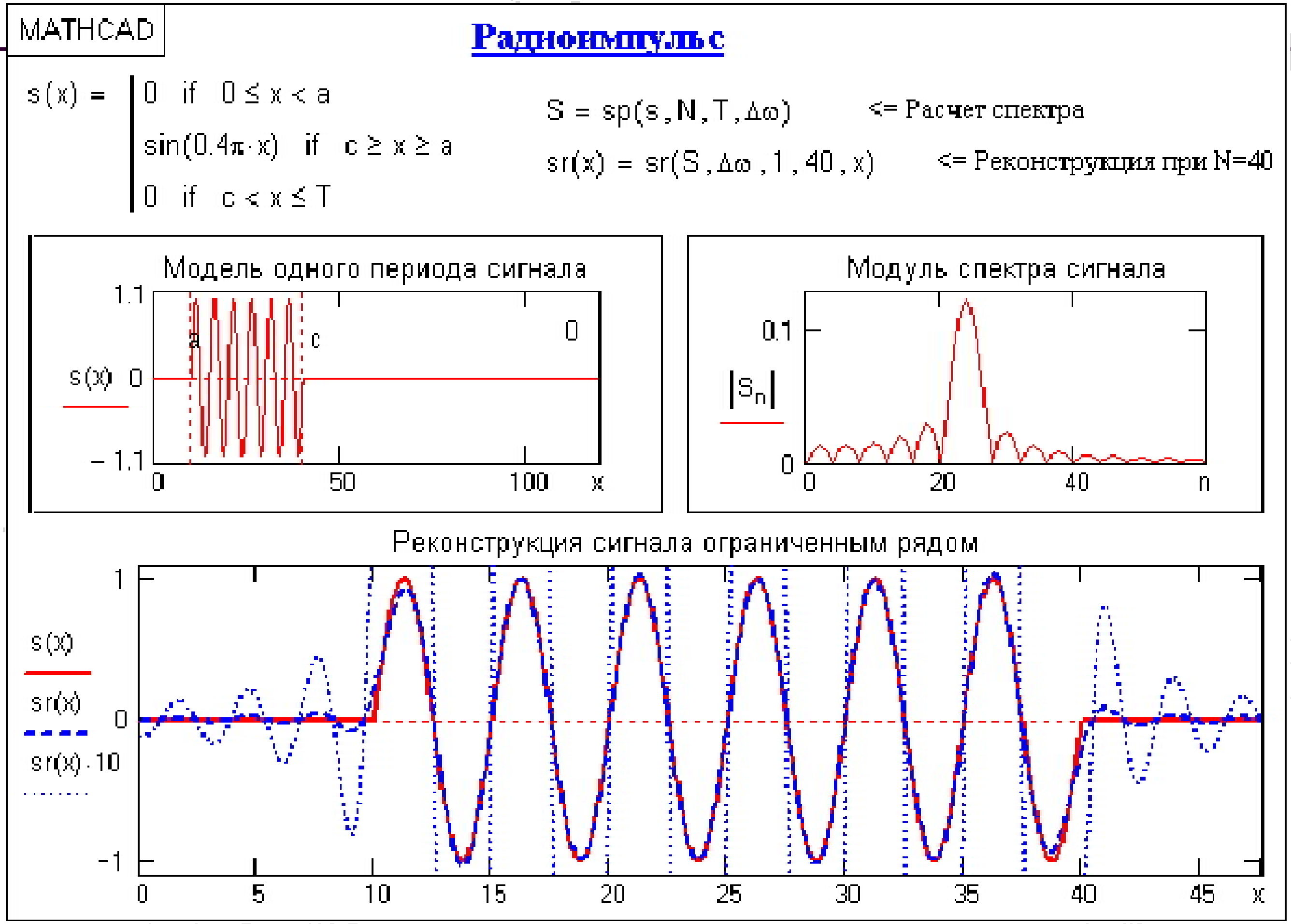
$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0}} s_n(x) > f(x_0+0)\,, \qquad \varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0}} s_n(x) < f(x_0-0)\,,$$



Это явление называется ***явлением Гиббса***

Эффект Гиббса имеет место всегда при резких нарушениях монотонности функций. На скачках эффект максимален, во всех других случаях амплитуда пульсаций зависит от характера нарушения монотонности функции.

Для усеченных рядов Фурье предельные значения максимальных выбросов по обе стороны от скачка и следующих за ними обратных выбросов при единичной амплитуде разрыва функции достигают соответственно 9% и 5% значения амплитуды скачка.



Пример явления Гиббса для радиоимпульса (точками показан реконструированный сигнал с увеличением масштаба в 10 раз).

Метод Крылова улучшения сходимости

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4-1}\sin nx\,,\qquad x\in(-\pi,\pi)\,.$$

$$\frac{n^3}{n^4-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5-n}$$

Но известно, что при $x \in (-\pi, \pi)$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\,,$$

откуда

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 - n} \sin nx\,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Приложения рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и периодической правой частью *q(x)* периода 2π

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = q(x)$$

Существует ли периодическое решение уравнения с периодом 2π?

Будем искать решение в форме ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{ikx}\,.$$

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{ikx}$$

тогда при всех ***к***

$$p_0 \cdot (ik)^n y_k + p_1 \cdot (ik)^{n-1} y_k + \cdots + p_n \cdot y_k = q_k$$

(равенство коэффициентов Фурье левой и правой частей уравнения).

Обозначая

$$P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$$

получаем соотношение (Фурье-образ уравнения)

$$P(ik) \cdot y_k = q_k$$

Если $P(ik) \neq 0$ то $y_k = \dfrac{q_k}{P(ik)}$