Лекция 2

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема Дирихле

Иога́нн Пе́тер Гу́став Лежён-Дирихле́
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 13 февраля 1805, — 5 мая 1859,
немецкий математик,

При каких условиях ряд Фурье функции *f(x)* сходится и имеет своей суммой как раз функцию *f(x)* ?

Будем рассматривать функции *f(x)* имеющие период T $=2\pi$ Такие функции называют 2π - *периодическими*.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема (Дирихле).

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

***1.** $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;*

***2.** $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.*

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2теоремы ***(условия Дирихле)***, то на отрезке [-π; π] имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (2.1)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$$

Замечания

1.Равенство (2.1) может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi; \pi]$

2.В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

3.Если функция *f(x)* с периодом 2 π на отрезке [0;2 π] удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \text{ и } \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$$

равны в силу свойств периодической функции

4.Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях.

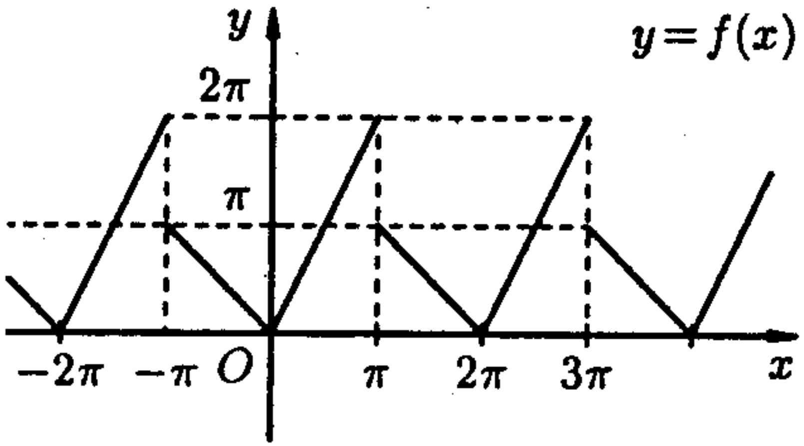
Однако, существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. ***теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое***.

Пример

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2 π, за-данную на отрезке [-π; π] формулой

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -x & \text{при } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

Решение



Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье

Находим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}2x\,dx=\frac{3\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}2x\cos nx\,dx=$$

$$\left(\text{интегрируем по частям: }\left[\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n)+\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \cdots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции *f(x)* соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

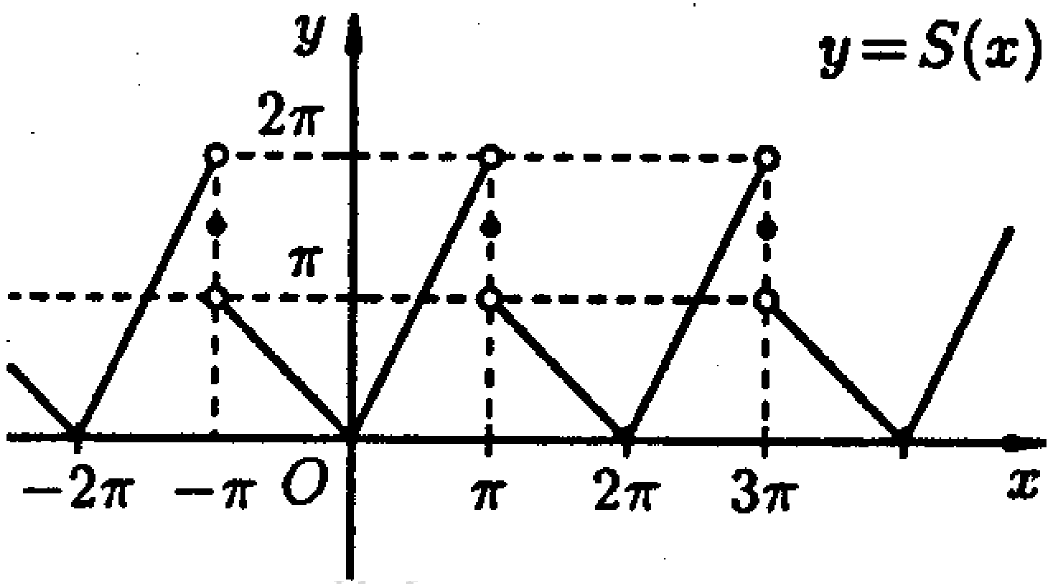
Согласно теореме Дирихле, для внутренних точкой отрезка [-π; π] имеем равенство

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \\ + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \ldots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

График функции $S(x)$ имеет вид



Замечание о разложении периодической функции в ряд Фурье.

Отметим следующее свойство периодической функции $\psi(x)$ с периодом 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx=\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)dx,$$ каково бы ни было число λ.

Действительно, так как $\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$, то, полагая $x = \xi - \pi$, можем написать при любых c и d:

$$\int_{c}^{d}\psi(x)dx=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi-2\pi)dx=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi)d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(x)dx.$$

В частности, принимая $c = -\pi$, $d = \lambda$, получим:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)dx = \int_{\pi}^{\lambda+2} \psi(x)dx\psi$$

поэтому

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx$$

Указанное свойство означает, что ***интеграл от периодической функции ψ(x) по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет всегда одно и тоже значение.***

Из доказанного свойства вытекает, что при вычислении коэффициентов Фурье мы можем заменить промежуток интегрирования (-π, π) промежутком интегрирования (λ, λ +2π), т. е. можем положить

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin kx dx \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где λ – любое число.

Пример.

Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, которая на отрезке $0 < x \leq 2\pi$ задана равенством $f(x) = x$.

Эта функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ задается двумя формулами:

$f(x) = x + 2\pi$ на отрезке $[-\pi, 0]$

$f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$.

В то же время на отрезке [0, 2π] гораздо проще она задается одной формулой $f(x) = x$. Поэтому для разложения этой функции в ряд Фурье выгоднее воспользоваться формулами (*), приравняв λ=0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}$$

Следовательно,

$$f(x) = \pi - 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x - \frac{2}{5}\sin 5x - \ldots$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке [-π; π] в ряд Фурье функция $f(x)$ является *четной* или *нечетной*, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится **неполным**).

Слайд 22

F1)
Filatov; 04.09.2005

Из определения четной и нечетной функции следует, что если ψ(x) – четная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)dx.$$

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dz = \int_{0}^{\pi} \psi(-x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)dx$$

так как по определению четной функции ψ(- x) = ψ(x).

Аналогично можно доказать, что если ψ(x) – нечетная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx=\int_{0}^{\pi}\psi(-x)dx+\int_{0}^{\pi}\psi(x)dx=-\int_{0}^{\pi}\psi(x)dx+\int_{0}^{\pi}\psi(x)dx=0$$

Теорема

Если функция $f(x)$ ***четная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если функция $f(x)$ ***нечетная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство

Если функция $f(x)$ — четная,
то $f(x)\cos nx$ — четная функция
$f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$,
а $f(z)\sin nx$ — нечетная функция
$f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$.

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x)\cos nx$ — нечетная, а $f(x)\sin nx$ — четная.

Определение

Ряды

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

называются *неполными* тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно

Пример

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, на интервале $(-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

Решение.

Очевидно, что функция $y=x$ удовлетворяет условиям Дирихле. Эта функция нечетная.

Следовательно,

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos \pi n,$$

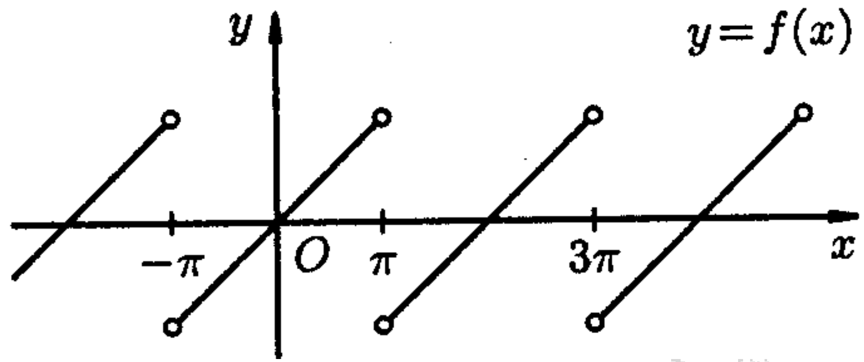
т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot \sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

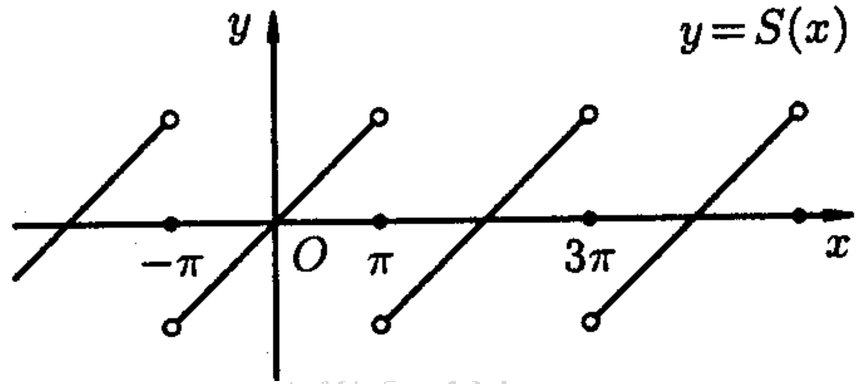
При этом

$$S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

График заданной функции



и соответствующего ряда



Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ $(f(x + 2l) = f(x)$, где l - произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделав подстановку

$$x = \frac{l}{\pi} t,$$

данную функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $\varphi(t) = f(lt/\pi)$, которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Действительно, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$ и при $-\pi < t < \pi$ имеем $-l < x < l$;

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке [- π; π] имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возвращаясь к переменной *x* и заметив, что

$$t = \frac{\pi x}{l},\ dt = \frac{\pi}{l} dx$$

Получим ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Этот ряд называется ***рядом Фурье*** для ***функции f(x)*** с периодом ***T = 2l***

Замечание.

Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2 π - периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых Т = *2l.*
В частности, если *f(x)* на отрезке *[-l; l] четная,* то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

Если *f(x)* на отрезке *[-l; l]* ***нечетная***, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пример

Разложить функцию *f(x) = x* на интервале (-4; 4) в ряд Фурье.

Решение:

Данная функция нечетная, удовлетворяет условиям Дирихле.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{4},$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_0^4 x \sin \frac{\pi n x}{4} \, dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычисляем коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi n}\cos\pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

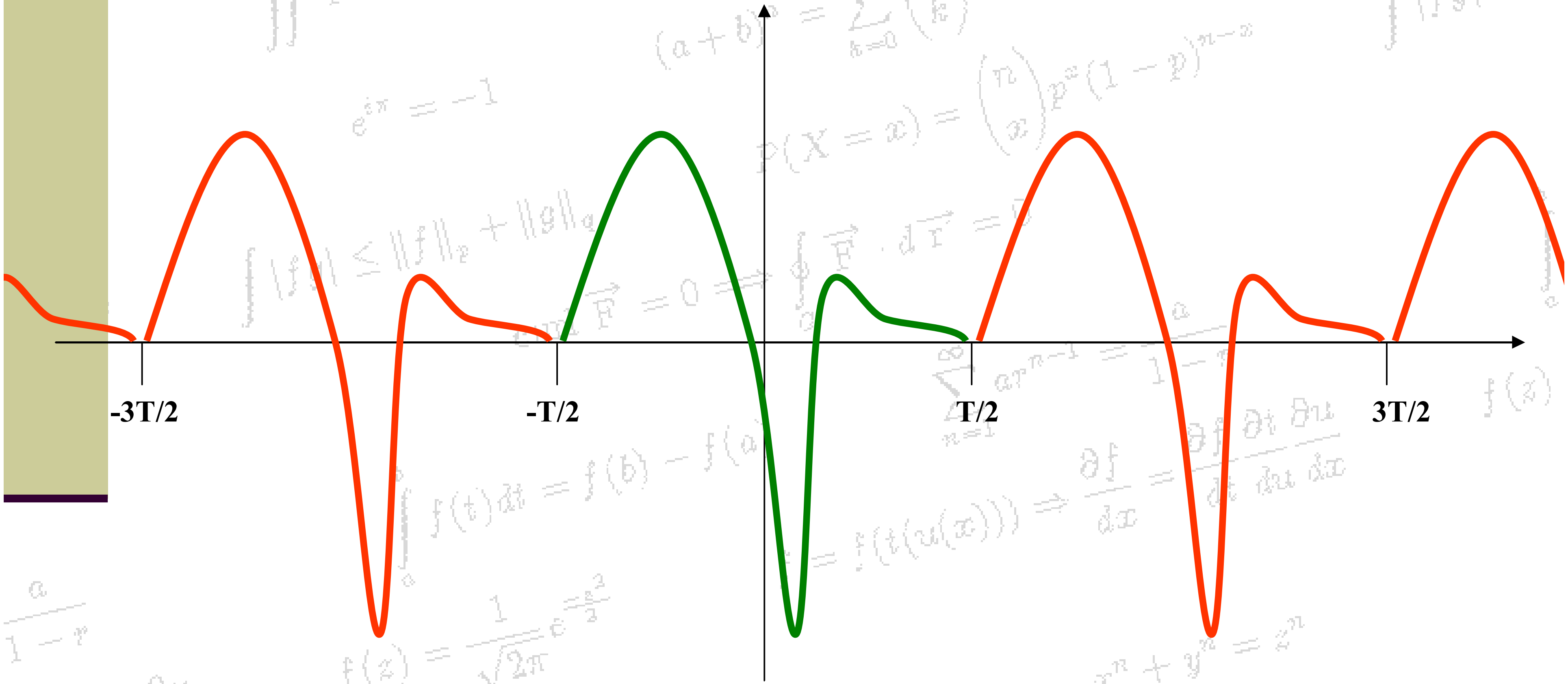
$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right)$$

для -4<x<4

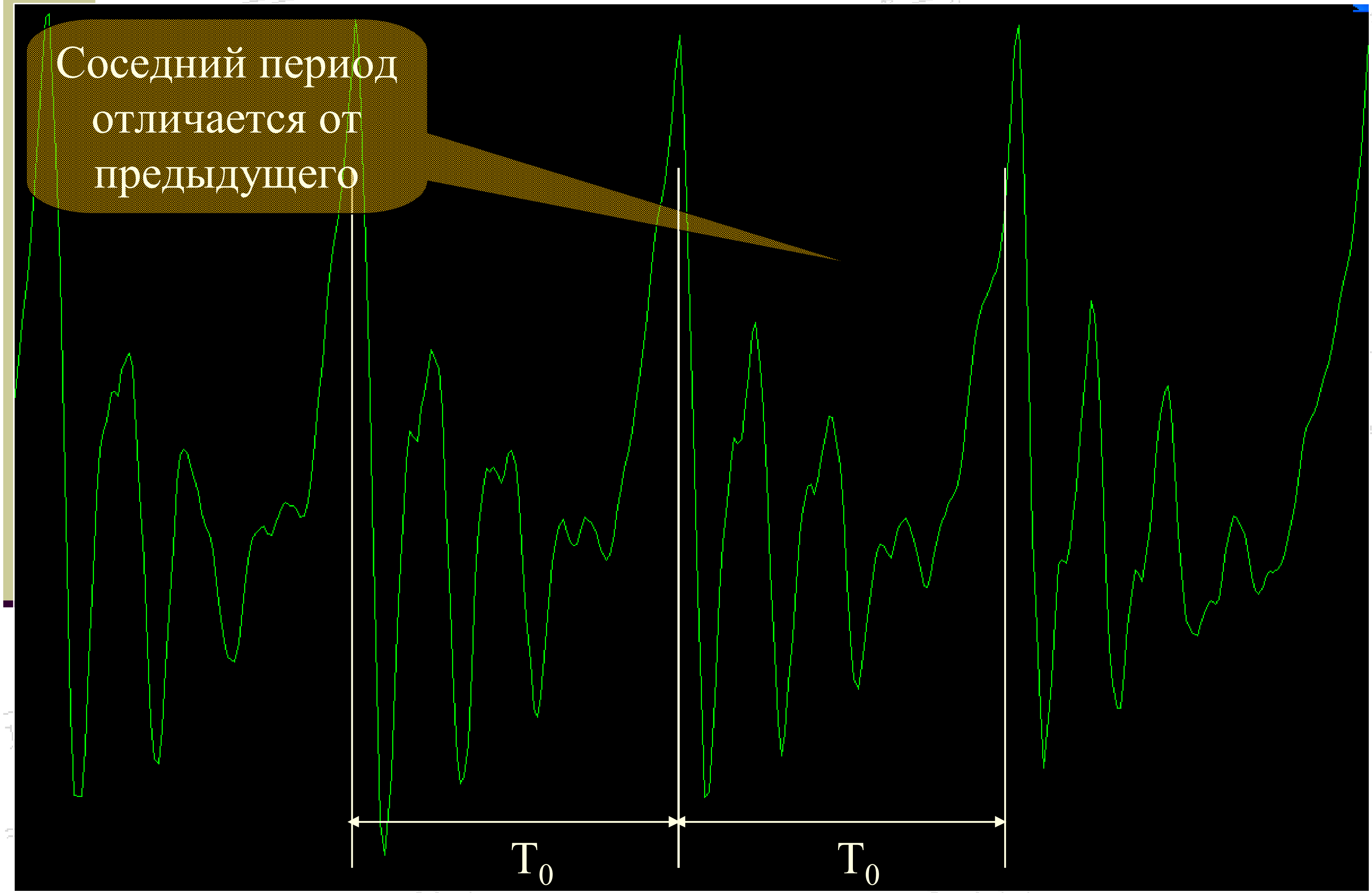
Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. **Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье**, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

О периодичности



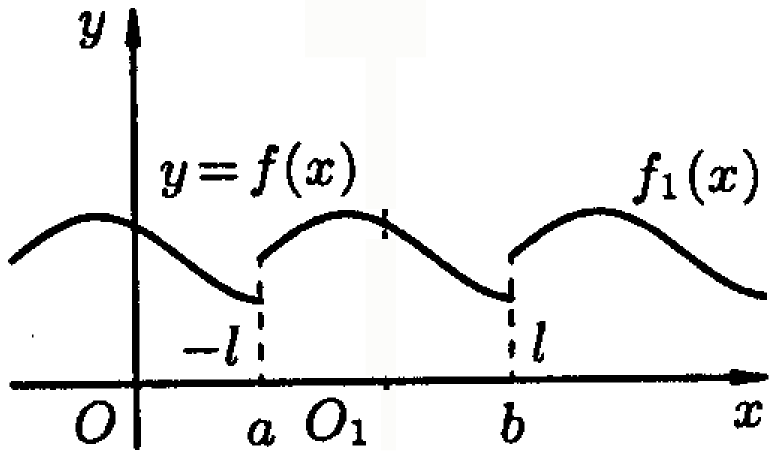
Реальный речевой сигнал



Однако *непериодическая функция f(x) может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке [a; b],* на котором она удовлетворяет условиям Дирихле.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$. Продолжим данную функцию периодически до $f_1(x)$ – периодической функции: $f_1(x) = f(t),\ a \le t = x - kT \le b,\ k \in \mathbb{Z}$ (в качестве периода T выбираем число, равное длине исходного промежутка $b-a$, т.е. $T = b-a$), причем $f_1(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]\cdot$

Полученную функцию $f_1(x)$ раскладываем в ряд Фурье способом, описанным ранее.



Заметим, что поскольку $f_1(x)$ − периодическая функция, то она определяется своими значениями на любом отрезке длиной в период T, в том числе и на отрезке $[-l;l]$, где $l=\frac{T}{2}$. А значит

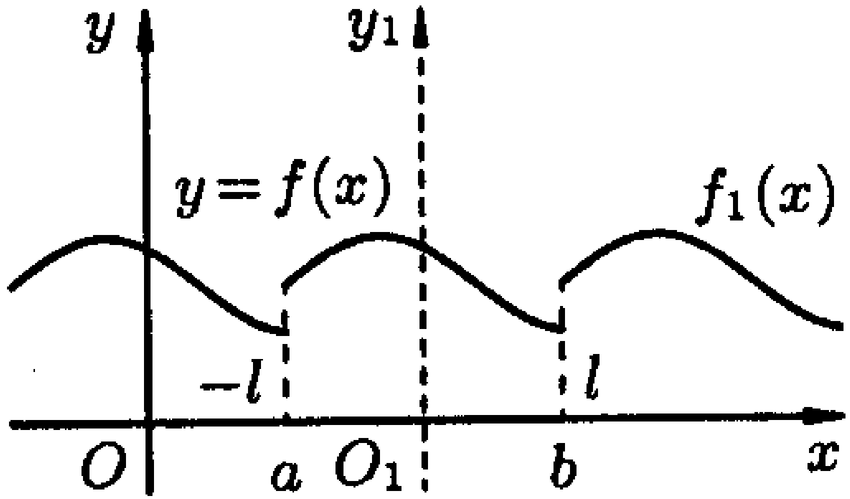
$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_1(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f_1(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{b} f_1(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\cdot$$

Аналогично $a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Т.к. коэффициенты Фурье вычисляются по $f(x)$, то мы можем получаемый тригонометрический ряд назвать *рядом Фурье* для $f(x)$. При этом равенство суммы ряда Фурье и функции $f(x)$ выполняется на отрезке $[a;b]$.

Замечание. В качестве периода функции $f_1(x)$ можно выбрать любое число, большее $b-a$, в этом случае функцию $f(x)$ необходимо доопределить произвольным образом так, чтобы она была задана на промежутке, имеющем длину, равную выбранному периоду

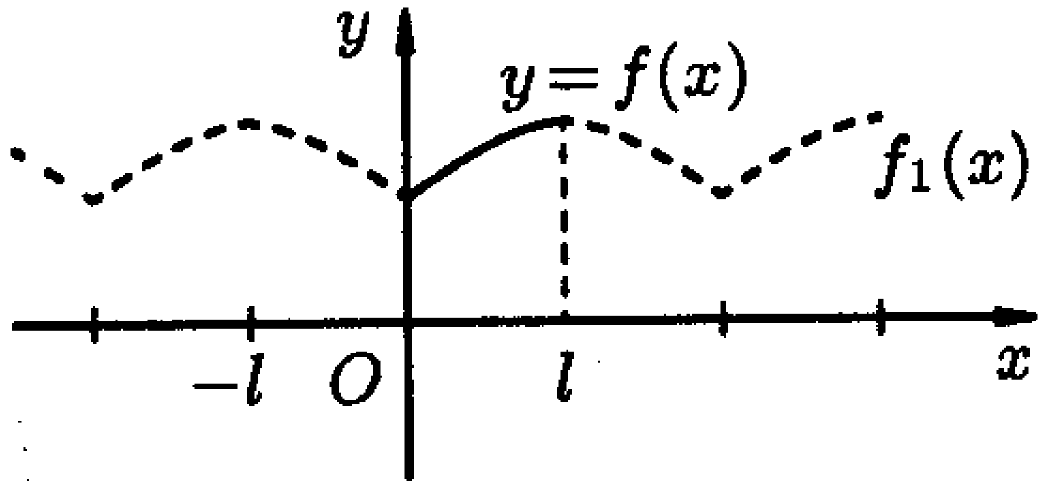
Можно просто поместить начало координат в середину отрезка [*a*, *b*] и построить функцию f_1(x) периода Т = $2l = b — a$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ на отрезке [$-l$, l]



Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$.

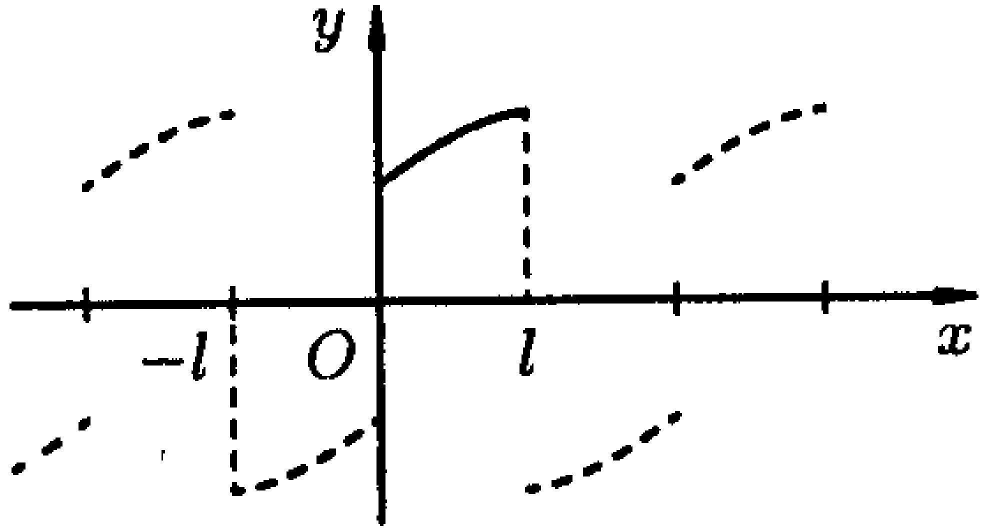
Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$.

В частности, функцию *f(x)* можно доопределить на отрезке [-*l*;0] четным образом



В этом случае функция *f*(*x*) разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l; 0]$ нечетным образом



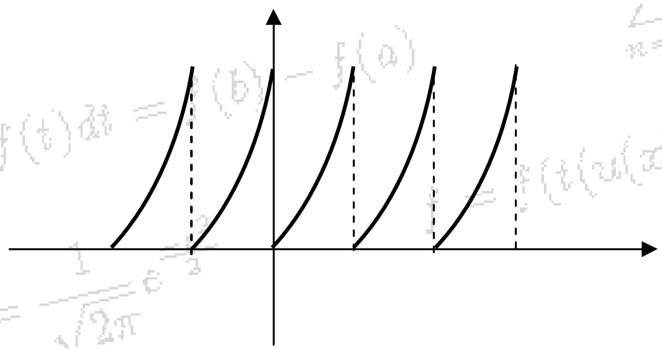
то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0;\pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $[0, \pi]$ уравнением $f(x) = x^2$.

Решение. Рассмотрим один из возможных (из бесчисленных) способ разложения этой функции в ряд Фурье на заданном интервале.

Будем полагать, что функция задана на отрезке длиной, равной периоду $T = \pi$, и периодически продолжить ее на всю числовую ось с этим периодом



Вычисляем коэффициенты Фурье полученной функции по общим формулам полагая $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\cos\ 2nx + \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{1}{4n^3}\right)\sin\ 2nx\right]\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos\ 2n\pi}{n^2} = \frac{1}{n^2}, \quad (n \neq 0);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\sin\ 2nx + \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{1}{4n^3}\right)\cos\ 2nx\right]\bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n};$$

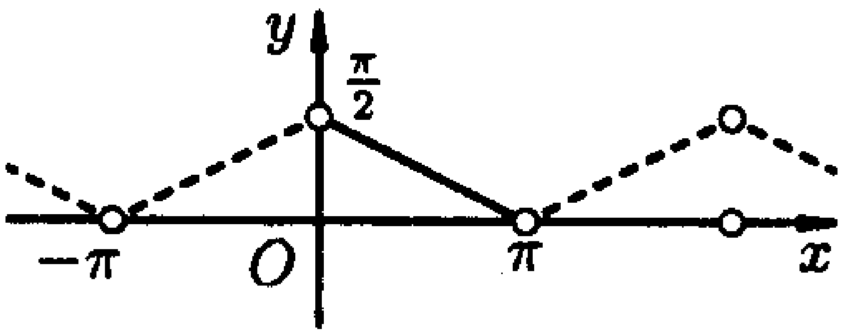
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos\ 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right).$$

Пример

Разложить в ряд косинусов функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < \pi.$$

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом



Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1-\cos \pi n).$$

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

$$0 < x < \pi$$

При этом

$$S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{0+0}{2} = 0$$

Аналогично, положив

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(|x|) & x < 0 \end{cases}$$

и разложив G в ряд Фурье, найдем, что ввиду нечетности G ее ряд будет содержать только члены с синусами.

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad \alpha_n = 0.$$

JPEG использует для сохранения ряды Фурье и при больших степенях сжатия просто отбрасывает члены ряда высшего порядка. И каждый раз при воспроизведении изображения на экране компьютер производит синтез. Причём достаточно ресурсоемкий и заметный на медленных компьютерах..

Из этого следует одно замечание - если Вы сохранили какой-нибудь рисунок в формате JPEG, то восстановить его обратно до последнего пикселя невозможно! Именно из-за этого формат называется "форматом с отерями", и именно поэтому не рекомендуется пересжимать JPEG-изображения, т.к. они обязательно станут хуже

Пример 1. Разложение в ряд функции *f(x) = x*.

Функция *f(x) = x* непрерывна в замкнутом промежутке (-π,π) и не имеет экстремумов.

Найдем коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

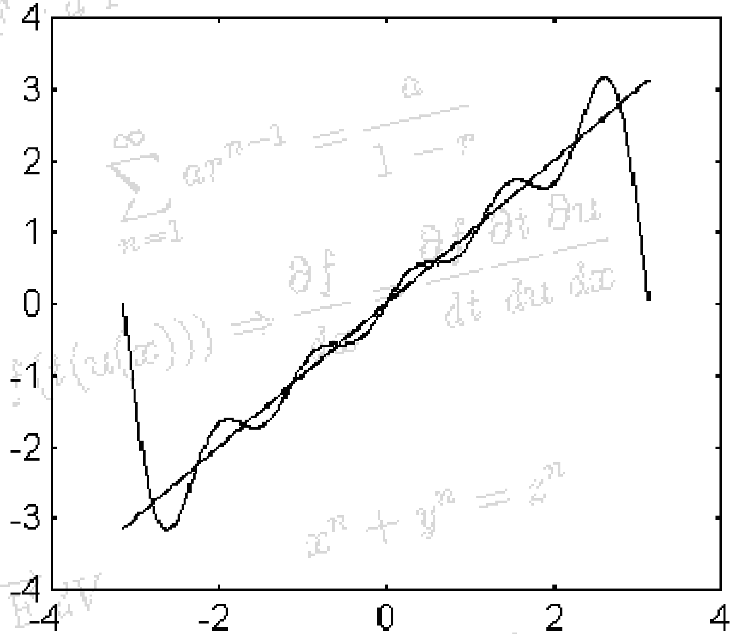
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{2\pi\cos\pi n}{\pi n} = 2(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

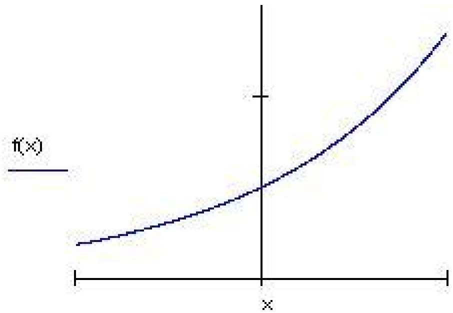
Ряд Фурье для функции $f(x)=x$ имеет вид

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\ldots\right]$$

Для $n=5$ график его будет следующим



Пример 2. Разложение в ряд Фурье функции ***f(x)*** = exp(***x***) на отрезке [-1,1] в среде Mathcad



Вычислим аналитически коэффициенты Фурье

$$\frac{1}{L}\cdot\left(\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx\right) \to \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}+\exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

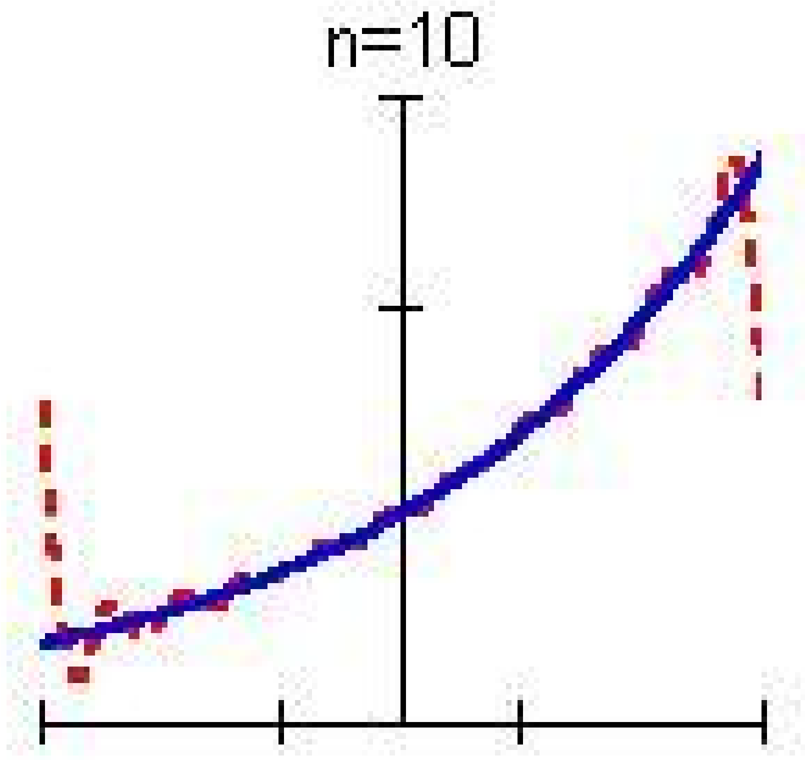
$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx \to \frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$a(k) := \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}+\exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

$$b(k) := \frac{(-k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}\cdot\exp(1)+\exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{\left(1+k^2\cdot\pi^2\right)}$$

Определим частичные суммы и построим их графики

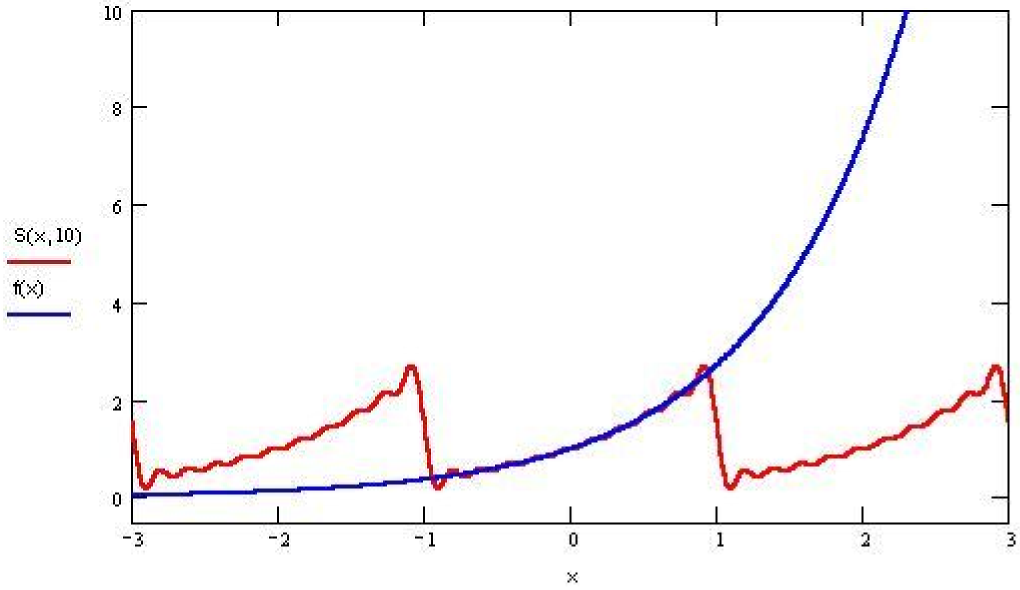
$$S(x,n) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a(k)\cdot\cos(k\cdot\pi\cdot x) + b(k)\cdot\sin(k\cdot\pi\cdot x)\right)$$



Замечания

1.Ряд Фурье сходится к данной функции только на заданном отрезке.

2.Сумма ряда является периодической функцией и вне отрезка может совсем не совпадать с данной функцией



Разложение сигнала в ряд Фурье.

Анимация показывает сумму первых 20 гармоник ряда Фурье прямоугольного импульса со скважностью, равной 4. Мы видим на этой анимации, что функция в основном формируется первыми несколькими гармониками. Высшие гармоники лишь увеличивают крутизну фронтов прямоугольника